Université de Liège
Faculté des Sciences
Département de Mathématique

Les espaces de suites S^ν

Propriétés topologiques, localement convexes et de prévalence

Céline Esser

Mémoire de fin d'études

Année 2010-2011

Introduction

Les signaux et les images sont couramment représentés et compressés à partir de leurs coefficients d'ondelettes ; l'efficacité de ces méthodes repose entre autres sur les algorithmes de décomposition rapide [30]. Par ailleurs, si l'on veut étudier des propriétés d'un signal par l'intermédiaire de ses coefficients d'ondelettes, il est indispensable, d'un point de vue mathématique, que la traduction de ces propriétés en termes de coefficients soit invariante par rapport à la base d'ondelettes choisie. Dans ce cadre, ces propriétés peuvent donc être étudiées intrinsèquement du point de vue de l'analyse fonctionnelle en utilisant les espaces de suites.

Une des propriétés les plus étudiées en analyse du signal est certainement la régularité Höldérienne, pour laquelle de nombreux résultats ont été obtenus ([1, 43]). Dans un contexte général, cette régularité peut se définir par l'exposant de Hölder du signal, introduit comme suit. Soient α un réel positif et x_0 un point de $\mathbb{R}^d$. Une fonction f définie sur $\mathbb{R}^d$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ appartient à $C^\alpha(x_0)$ s'il existe un polynôme P de degré strictement inférieur à α et des constantes $C > 0$ et $R > 0$ tels que

$$|f(x) - P(x)| \leq C|x - x_0|^\alpha$$

si $|x - x_0| \leq R$. L'exposant de Hölder de f en x_0 est le supremum de toutes les valeurs de α pour lesquelles f appartient à $C^\alpha(x_0)$. Le spectre des singularités d'un signal f est alors défini par la fonction qui associe à toute valeur h la "taille" de l'ensemble des points pour lesquels l'exposant de Hölder de f est h. Dans ce contexte, la "taille" d'un ensemble est déterminée par sa dimension de Hausdorff ([9, 21, 25]).

Dans de nombreux domaines de l'analyse, l'utilisation des espaces de Besov est naturelle et suffisante. Cependant, il est apparu dans [24] que la structure de ceux-ci n'était pas assez riche pour rendre compte de toute l'information spécifique contenue dans la distribution des coefficients. C'est dans ce contexte que S. Jaffard a introduit dans [24] les espaces de type S^ν, afin d'obtenir de nouveaux résultats sur la régularité Höldérienne d'un signal.

Dans le but d'obtenir un nouveau contexte pour étudier ces informations sur des signaux, S. Jaffard propose dans [24] la définition suivante : étant donné une fonction croissante et continue à droite $\nu : \mathbb{R} \to \{-\infty\} \cup [0, 1]$, une fonction f appartient à l'espace S^ν si ses coefficients d'ondelettes satisfont

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \forall C > 0, \exists J \geq 0 : \# E_j(C, \alpha)(f) \leq 2^{(\nu(\alpha)+\varepsilon)j}, \forall j \geq J,$$

où
$$E_j(C,\alpha)(f) = \left\{k : |c_{j,k}| \geq C2^{-\alpha j}\right\} \ , j \geq 0, \alpha \in \mathbb{R}, C \geq 0.$$
Il montre que ces espaces ne dépendent pas de la base d'ondelettes choisie, ce qui permet d'étudier ceux-ci comme des espaces de suites (c'est-à-dire en considérant uniquement les coefficients d'ondelettes). C'est de ce point de vue d'analyse fonctionnelle que nous étudierons ces espaces.

Du point de vue de l'analyse fonctionnelle, les espaces S^ν sont des espaces vectoriels de suites pouvant être munis d'une topologie tout à fait naturelle qui en fait des espaces vectoriels topologiques métrisables, séparables et complets [6].

La p-convexité locale des espaces S^ν a été également étudiée. Il s'est avéré que ces espaces n'étaient jamais p-normables. Cependant, une condition nécessaire et suffisante pour la p-convexité locale de ces espaces a été démontrée dans [2]. Ainsi, lorsque $p = 1$, les espaces S^ν sont des espaces de Fréchet et les propriétés relatives à ces espaces ont été étudiées. Les résultats montrent que ces espaces sont de Schwartz mais non nucléaires. Dans le cas où $p < 1$, ces propriétés doivent être généralisées au cas non localement convexe. Certaines questions restent encore ouvertes.

Algébriquement, le dual topologique des espaces de type S^ν est une union d'espaces du même type. Cependant, dans [2], la topologie forte sur le dual a été étudiée uniquement dans le cas localement convexe et la caractérisation du dual fort était donc incomplète. Mais récemment, J. Wengenroth et L. Frerick ont apporté dans [16] une réponse dans le cas général des espaces vectoriels topologiques métrisables et de Schwartz en montrant que leur dual fort est une limite inductive d'espaces de Banach. Cela apporte un complément au résultat qui avait été trouvé dans [2].

En utilisant cette approche, des applications dans le contexte de l'analyse multifractale de signaux ont été obtenues, notamment dans [5]. En particulier, l'introduction des espaces S^ν fournit un outil intéressant pour l'étude des spectres de singularités non concaves. Par ailleurs, dernièrement, M. Clausel et S. Nicolay se sont penchés sur un autre aspect de l'analyse multifractale, basée sur une notion d'irrégularité et non plus de régularité höldérienne. En utilisant les espaces S^ν, ils ont obtenu des résultats encourageants ([12]) qui ouvrent la porte à de nouvelles questions.

Le contenu de ce mémoire est le suivant.

Dans le premier chapitre, nous introduisons les espaces S^ν : d'où viennent-ils et quelles sont leurs premières propriétés naturelles du point de vue topologique ? Cette partie consiste en un résumé de l'information déjà obtenue dans des articles de J.-M. Aubry, F. Bastin, S. Dispa et S. Jaffard [2, 6, 7], avec plusieurs ajouts et exemples. Ce chapitre est également complété par l'étude des bases topologiques dans ces espaces.

Dans le deuxième chapitre, nous nous penchons sur la caractérisation du dual des espaces de type S^ν. Pour cette caractérisation, nous nous basons sur la note récente de J. Wengenroth et L. Frerick [16] que nous développons pour l'appliquer aux espaces qui nous intéressent. Le but est alors de l'améliorer en diminuant les hypothèses proposées.

Dans le dernier chapitre de ce mémoire, la notion de prévalence est étudiée. Le concept de prévalence permet de définir une notion de "presque partout" dans des espaces de dimension infinie. Quelques applications classiques sont également présentées. Enfin, nous montrerons comment cette notion appliquée dans le cas des espaces S^ν nous permet d'avoir des informations sur la régularité Höldérienne d'un signal.

Remerciements

Je souhaite adresser mes remerciements les plus sincères à toutes les personnes qui ont contribué de près ou de loin à l'élaboration de ce mémoire.

Plus particulièrement, mes premiers remerciements vont à Madame F. Bastin pour son immense disponibilité, son aide précieuse et son enthousiasme qui nous a menées vers différentes pistes de réflexion.

Mes remerciements s'adressent également à Monsieur S. Nicolay pour ses conseils ainsi que pour le temps qu'il m'a accordé.

Enfin, je tiens à remercier mon Papa pour la relecture attentive de ce mémoire et pour ses remarques pertinentes.

Table des matières

Chapitre 1

Introduction aux espaces S^{ν}

1.1 Première approche des espaces de type S^{ν}

Le développement de l'analyse multifractale a montré la nécessité d'organiser l'information de manière hiérarchique. Au lieu d'un ensemble séquentiel de données, une caractéristique clé des ondelettes est que les coefficients d'ondelettes héritent d'une indexation hiérarchique multi-indicée par un arbre binaire. Pour étudier l'information contenue dans ces coefficients, il faut donc que l'espace de suites considéré reflète cette organisation.

Dans la longue tradition d'étude des espaces de suites, aucun intérêt particulier n'avait été donné à une structure hiérarchique de l'ensemble des indices. Mais les applications, telles que l'analyse multifractale, comptent beaucoup sur cette structure : des coefficients à des échelles différentes n'ont pas la même importance, mais à une même échelle, ils sont souvent interchangeables. Des espaces de suites mettant l'accent sur cette caractéristique spécifique ont été introduits : les espaces de suites de Besov en sont un exemple. Cependant, ces espaces et leurs topologies ne fournissent qu'un contrôle indirect sur la répartition asymptotique de la taille des coefficients. Le contrôle direct, comme demander le nombre de coefficients ayant une certaine taille à une échelle donnée, fut la motivation qui a conduit à la classe plus générale des espaces vectoriels topologiques appelés S^{ν}.

Donnons quelques précisions et profitons-en pour introduire quelques notations. Supposons que l'espace sur lequel les ondelettes sont définies est de dimension 1 (tout ce qui suit peut se généraliser dans le cas d'une dimension quelconque). Nous nous intéressons aux fonctions périodiques et nous considérons une mère d'ondelette ψ dans la classe de Schwartz. Si l'on pose

$$\psi_{j,k}(x) := \sum_{l\in\mathbb{Z}} \psi(2^j(x-l)-k) \ , \ j \in \mathbb{N}, k \in \left\{0, ..., 2^j - 1\right\},$$

les fonctions périodiques $2^{\frac{j}{2}}\psi_{j,k}$ avec la fonction constante égale à 1 forment une base orthonormée des fonctions de période 1 dans $L^2([0,1])$. Si f est une fonction de période 1, alors nous notons

$$c_{j,k} = 2^j \int_{[0,1]} f(x)\psi_{j,k}(x)dx \ , \ j \in \mathbb{N}, k \in \left\{0, ..., 2^j - 1\right\}$$

les coefficients d'ondelettes de la fonction f.

Soit $\vec{c}$ la suite de coefficients d'ondelettes de la fonction f. Afin d'étudier la taille des coefficients à une échelle $j \in \mathbb{N}$ donnée, posons

$$F_j(x) = \#\{k : |c_{j,k}| < x\}$$

pour tout $x \geq 0$. En supposant que l'information disponible sur f est précisément la collection des fonctions F_j, nous aimerions savoir quelle information indépendante de la base d'ondelettes choisie peut être déduite des F_j. Pour cela, S. Jaffard considère dans [24] deux candidats ν_f et ρ_f, qui expriment le comportement asymptotique du nombre de coefficients ayant un ordre de grandeur donné.

Définition 1.1.1. Le profil d'ondelette ν_f de f est défini par

$$\nu_f(\alpha) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(\limsup_{j \to +\infty} \left(\frac{\log \# E_j(1, \alpha + \varepsilon)(f)}{\log 2^j} \right) \right)$$

pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, où

$$E_j(C, \alpha)(f) = \left\{k : |c_{j,k}| \geq C 2^{-\alpha j}\right\}$$

et donc

$$\# E_j(C, \alpha)(f) = 2^j - F_j(C 2^{-\alpha j}).$$

De plus, si

$$\rho_f(\alpha, \varepsilon) = \limsup_{j \to +\infty} \left(\frac{\log(\# E_j(1, \alpha + \varepsilon) - (\# E_j(1, \alpha - \varepsilon))}{\log(2^j)} \right),$$

la densité d'ondelette ρ_f de f est définie par

$$\rho_f(\alpha) = \inf_{\varepsilon > 0} \rho_f(\alpha, \varepsilon).$$

Comme souhaité, ces définitions formalisent le fait qu'il y a approximativement $2^{\nu_f(\alpha)j}$ coefficients de module plus grand que $2^{-\alpha j}$, et approximativement $2^{\rho_f(\alpha)j}$ coefficients de module environ égal à $2^{-\alpha j}$.

Proposition 1.1.2. *Si f est une fonction de période 1 qui définit une distribution et si $\vec{c}$ est la suite de coefficients d'ondelettes de la fonction f, alors il existe $\alpha_0 \in \mathbb{R}$ tel que*

$$\sup_{j \in \mathbb{N}, k \in \{0, ..., 2^j - 1\}} 2^{\alpha_0 j} |c_{j,k}| < +\infty,$$

d'où $\nu_f(\alpha) = -\infty$ pour tout $\alpha < \alpha_0$.

Démonstration. En effet, soit f une fonction périodique de période 1 qui définit une distribution. Cette distribution est donc tempérée et il existe $J \in \mathbb{N}$, $N \in \mathbb{N}$ et $C > 0$ tels que

$$\left|\int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)dx\right| \leq C \sup_{x\in\mathbb{R}}\sup_{\alpha\leq J}\left|(1+|x|)^N D^\alpha g(x)\right|$$

pour tout $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. De plus, comme la mère d'ondelettes ψ a été choisie dans la classe de Schwartz, il existe une constante $C'_{J,N} > 0$ telle que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\sup_{\alpha\leq J}(1+|x|)^N|D^\alpha\psi(x)| = C'_{J,N} < \infty.$$

Soient $j \in \mathbb{N}$ et $k \in \{0, ..., 2^j - 1\}$. Nous avons

$$\begin{aligned}
c_{j,k} &= 2^j \int_0^1 f(x)\psi_{j,k}(x)dx \\
&= 2^j \int_0^1 f(x)\sum_{l\in\mathbb{Z}}\psi(2^j(x-l)-k)dx \\
&= 2^j \sum_{l\in\mathbb{Z}}\int_0^1 f(x)\psi(2^j(x-l)-k)dx \\
&= 2^j \sum_{l\in\mathbb{Z}}\int_{-l}^{1-l} f(x)\psi(2^jx-k)dx \\
&= 2^j \int_{\mathbb{R}} f(x)\psi(2^jx-k)dx
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
|c_{j,k}| &= 2^j\left|\int_{\mathbb{R}} f(x)\psi(2^jx-k)dx\right| \\
&\leq 2^jC\sup_{x\in\mathbb{R}}\sup_{\alpha\leq J}\left|(1+|x|)^N D^\alpha(\psi(2^jx-k))\right| \\
&\leq 2^jC\sup_{x\in\mathbb{R}}\sup_{\alpha\leq J}\left|(1+|x|)^N 2^{\alpha j}(D^\alpha\psi)(2^jx-k))\right| \\
&\leq 2^jC\sup_{x\in\mathbb{R}}\sup_{\alpha\leq J}\left|(1+|x|)^N 2^{\alpha j}\frac{C'_{J,N}}{(1+|2^jx-k|)^N}\right| \\
&\leq CC'_{J,N}2^{j(1+J)}\sup_{x\in\mathbb{R}}\frac{(1+|x|)^N}{(1+|2^jx-k|)^N}
\end{aligned}$$

pour tous $j \in \mathbb{N}$, $k \in \{0, ..., 2^j - 1\}$. En utilisant la relation

$$1+|t| \leq (1+|t-s|)(1+|s|)$$

vérifiée pour tous $s, t \in \mathbb{R}$, on obtient

$$1+|x| \leq (1+|x-2^{-j}k|)(1+2^{-j}k)$$

d'où

$$\begin{aligned} 1+|x| &\leq (1+2^{-j}|2^jx-k|)(1+2^{-j}k) \\ &\leq (1+2^{-j}|2^jx-k|)(1+2^{-j}2^j) \\ &\leq 2(1+2^{-j}|2^jx-k|) \\ &\leq 2(1+|2^jx-k|). \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\frac{(1+|x|)^N}{(1+|2^jx-k|)^N} \leq 2^N$$

et nous obtenons ainsi l'existence du α_0. □

Nous supposerons donc dans la suite que les coefficients $c_{j,k}$ satisfont cette condition. De plus, il est clair que la fonction ν_f est croissante, continue à droite et à valeurs dans $\{-\infty\} \cup [0,1]$. De même, la fonction ρ_f est à valeurs dans $\{-\infty\} \cup [0,1]$ et $\rho_f(\alpha) = -\infty$ si $\alpha < \alpha_0$.

Dans [24], S. Jaffard montre que ν_f ne dépend pas de la base d'ondelettes choisie mais que cela n'est pas toujours vérifié pour la fonction ρ_f. Afin de considérer un signal f uniquement au travers de ses coefficients d'ondelettes, il est alors naturel d'utiliser la fonction ν_f. Ces observations justifient l'approche suivante.

Considérons une fonction croissante $\nu : \mathbb{R} \to \{-\infty\} \cup [0,1]$ continue à droite qui n'est pas identiquement égale à $-\infty$. Une telle fonction est appelée un *profil admissible*. Définissons

$$\alpha_{min} := \inf \{\alpha : \nu(\alpha) \geq 0\}$$

et

$$\alpha_{max} := \inf \{\alpha : \nu(\alpha) = 1\}$$

avec la convention que $\inf \emptyset = +\infty$. Nous avons donc

$$\begin{cases} \nu(\alpha) & = -\infty & \text{si } \alpha < \alpha_{min} \\ \nu(\alpha) & \in [0,1[& \text{si } \alpha_{min} \leq \alpha < \alpha_{max} \\ \nu(\alpha) & = 1 & \text{si } \alpha \geq \alpha_{max} \end{cases}$$

Remarque 1.1.3. Si $\alpha_{max} = +\infty$, alors la fonction ν est telle que $\nu(\alpha) < 1$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$. Si $\alpha_{min} = -\infty$, alors ν est une fonction à valeurs dans $[0,1]$. Il s'agit d'un cas dégénéré que nous ne considérerons pas vu la proposition 1.1.2.

Au vu des considérations précédentes, nous allons considérer les signaux uniquement au travers de leurs coefficients d'ondelettes. Pour cela, notons Ω l'ensemble des suites de complexes $\vec{c} = (c_{j,k})_{j\in\mathbb{N},k\in\{0,\ldots,2^j-1\}}$.

Définition 1.1.4.

Etant donné un profil admissible ν, **l'espace $\mathbf{S}^\nu$** est l'ensemble des suites $\vec{c} \in \Omega$ telles que

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \forall C > 0, \exists J \geq 0 : \# E_j(C,\alpha)(\vec{c}) \leq 2^{(\nu(\alpha)+\varepsilon)j}, \forall j \geq J$$

où

$$E_j(C,\alpha)(\vec{c}) = \left\{ k : |c_{j,k}| \geq C 2^{-\alpha j} \right\}$$

et où $\# A$ désigne le cardinal de l'ensemble A.

Définition 1.1.5. Si $\vec{c} \in \Omega$, nous définissons

$$\nu_{\vec{c}}(\alpha) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(\limsup_{j \to +\infty} \left(\frac{\log \# E_j(1, \alpha+\varepsilon)(\vec{c})}{\log 2^j} \right) \right)$$

pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

Proposition 1.1.6. *L'espace* S^ν *est un espace vectoriel et satisfait*

$$\mathrm{S}^\nu = \left\{ \vec{c} \in \Omega : \nu_{\vec{c}}(\alpha) \leq \nu(\alpha) \ , \ \forall \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

Démonstration. La preuve de ce résultat se trouve dans [6]. □

1.2 Exemples et connexion avec les espaces de Besov

Dans cette section, nous proposons quelques exemples concrets d'espaces S^ν, ainsi que le lien existant entre ces espaces et les espaces de Besov.

Exemple 1.2.1. Pour le premier exemple, considérons l'application ν définie pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ par

$$\nu(\alpha) = 1.$$

Dans ce cas, pour tous $\alpha \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ et $C > 0$,

$$\# E_j(C,\alpha)(\vec{c}) \leq 2^j < 2^{(\nu(\alpha)+\varepsilon)j}$$

pour tout $j \in \mathbb{R}$ et tout $\vec{c} \in \Omega$. Par conséquent

$$\mathrm{S}^\nu = \Omega.$$

Remarque 1.2.2. Remarquons que la réciproque est également vraie : si ν est un profil admissible tel que $\mathrm{S}^\nu = \Omega$, alors $\nu = 1$. En effet, procédons par l'absurde et supposons qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\nu(\alpha) < 1$. Considérons la suite $\vec{c}$ définie par

$$c_{j,k} = C 2^{-\alpha j} \quad \forall j \in \mathbb{N} \ , \ k \in \{0, ..., 2^j - 1\}$$

où $C > 0$ est une constante fixée. Puisque $\vec{c} \in \mathrm{S}^\nu$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $J \in \mathbb{N}$ tel que

$$\#\{k : |c_{j,k}| \geq C2^{-\alpha j}\} \leq 2^{(\nu(\alpha)+\varepsilon)j} \quad \forall j \geq J.$$

Soit $\varepsilon > 0$ tel que $\nu(\alpha) + \varepsilon < 1$. Alors

$$\#\{k : |c_{j,k}| \geq C2^{-\alpha j}\} = 2^j > 2^{(\nu(\alpha)+\varepsilon)j} \quad \forall j \in \mathbb{N},$$

d'où une contradiction.

Afin de considérer des exemples moins triviaux, nous allons considérer les espaces de suites de Besov $b^s_{p,q}$. Rappelons auparavant les définitions suivantes.

Définition 1.2.3. Soient $0 < p < \infty$ et X un ensemble dénombrable d'indices. On appelle $l^p(X)$ l'espace des suites de complexes $(c_n)_{n\in X}$ telles que la série $\sum_{n\in X} |c_n|^p$ converge.

Définition 1.2.4. Soit X un ensemble dénombrable d'indices. L'ensemble des suites de complexes $(c_n)_{n\in X}$ bornées est appelé l'espace $l^\infty(X)$.

Nous pouvons à présent introduire les espaces de suites de Besov $b^s_{p,q}$. Ces espaces sont les équivalents discrets des espaces de Besov périodisés $B^s_{p,q}$ de fonctions ou de distributions ([24, 34]). Plus précisément, si ψ est une mère d'ondelette choisie dans la classe de Schwartz et si $(c_{j,k})_{j\in\mathbb{N},k\in\{0,\ldots,2^j-1\}}$ sont les coefficients d'ondelette d'une fonction f de période 1 dans la base formée de la fonction constante égale à 1 et des fonctions $2^{\frac{j}{2}}\psi_{j,k}$, alors $f \in B^s_{p,q}$ si et seulement si ses coefficients d'ondelettes $(c_{j,k})_{j\in\mathbb{N},k\in\{0,\ldots,2^j-1\}}$ satisfont

$$\left(2^{\left(s-\frac{1}{p}\right)j} \left(\sum_{k=0}^{2^j-1} |c_{j,k}|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right)_{j\in\mathbb{N}} \in l^q(\mathbb{N}).$$

Cela nous amène à la définition suivante des espaces de suites de Besov.

Définition 1.2.5. Pour tous $s \in \mathbb{R}$, $0 < p < \infty$ et $0 < q \leq \infty$, une suite $\vec{x}$ de Ω appartient à l'espace de Besov $b^s_{p,q}$ si

$$\left(2^{\left(s-\frac{1}{p}\right)j} \left(\sum_{k=0}^{2^j-1} |x_{j,k}|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right)_{j\in\mathbb{N}} \in l^q(\mathbb{N}).$$

Dans la suite, nous nous intéresserons uniquement aux espaces de Besov $b^s_{p,\infty}$. Nous allons à présent munir ces espaces d'une $\min(1,p)$ norme. Rappelons tout d'abord la définition suivante.

Définition 1.2.6. Soit E un espace vectoriel et soit $0 < p \leq 1$. Une application

$$q : E \to [0, +\infty[$$

est une p semi-norme si

$$\begin{cases} q(\lambda e) = |\lambda| q(e) & \forall \lambda \in \mathbb{C}, e \in E \\ (q(e+f))^p \leq (q(e))^p + (q(f))^p & \forall e, f \in E \end{cases}$$

Si de plus

$$q(e) = 0 \Leftrightarrow e = 0,$$

alors q est une p norme.

Remarque 1.2.7. La notion de p semi-norme n'a été définie que dans le cas où $0 < p \leq 1$. Il serait naturel d'étendre cette définition au cas où $p > 1$. Cependant, si $p > 1$ et si $q : E \to [0, \infty[$ est une application telle que

$$\begin{cases} q(\lambda e) = |\lambda| q(e) & \forall \lambda \in \mathbb{C}, e \in E \\ (q(e+f))^p \leq (q(e))^p + (q(f))^p & \forall e, f \in E, \end{cases}$$

alors q est identiquement nulle. En effet, supposons qu'il existe $e \in E$ tel que $q(e) \neq 0$. Alors

$$(q(e))^p = \left(q\left(\frac{e}{2} + \frac{e}{2}\right)\right)^p \leq 2^{1-p}(q(e))^p,$$

d'où $1 \leq 2^{1-p}$, ce qui est impossible puisque $p > 1$.

Définition 1.2.8. Pour tous $s \in \mathbb{R}$ et $0 < p < \infty$, la $\min(1,p)$ norme de Besov $\|\vec{x}\|_{b^s_{p,\infty}}$ d'une suite $\vec{x}$ est définie par

$$\|\vec{x}\|_{b^s_{p,\infty}} = \sup_{j \in \mathbb{N}} 2^{\left(s-\frac{1}{p}\right)j} \left(\sum_{k=0}^{2^j-1} |x_{j,k}|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Pour vérifier que l'espace $b^s_{p,\infty}$ est $\min(1,p)$ normé, penchons-nous d'abord sur les espaces de suites l^p et caractérisons les inclusions existant entre ces espaces.

Définition 1.2.9. Soient $0 < p < \infty$ et X un ensemble dénombrable d'indices. Pour tout $\vec{c} \in l^p(X)$, posons

$$\|\vec{c}\|_p = \left(\sum_{n \in X} |c_n|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

et pour tout $\vec{c} \in l^\infty(X)$,

$$\|\vec{c}\|_\infty = \sup_{n \in X} |c_n|.$$

Définition 1.2.10. Soit $1 < p < \infty$. Puisqu'on a $0 < \frac{1}{p} < 1$, il existe un nombre réel $q > 1$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Les nombres p et q sont appelés des exposants conjugués.

Remarque 1.2.11. Si $p = 1$, l'exposant conjugué de p est $q = \infty$. Bien sûr, si $p = \infty$, l'exposant conjugué de p est $q = 1$.

Proposition 1.2.12 (Inégalité de Hölder)**.** *Soient X un ensemble dénombrable d'indices, $1 \le p \le \infty$ et q l'exposant conjugué de p. Si $\vec{c} \in l^p(X)$ et $\vec{d} \in l^q(X)$, alors $(c_n d_n)_{n\in X} \in l^1(X)$ et*

$$\sum_{n\in X} |c_n d_n| \le \|\vec{c}\|_p \|\vec{d}\|_q.$$

Démonstration. La preuve est classique et peut être trouvée dans [26, 27, 33] par exemple. □

Proposition 1.2.13. *Soient $0 < p \le \infty$ et X un ensemble dénombrable d'indices. Alors $\|.\|_p$ est une $min(1, p)$ norme sur l'espace $l^p(X)$.*

Démonstration. Dans le cas où $p \ge 1$, le résultat est classique et peut être trouvé notamment dans [26, 27, 33]. Si $0 < p < 1$, il est clair qu'il suffit de montrer que

$$\|\vec{c} + \vec{d}\|_p^p \le \|\vec{c}\|_p^p + \|\vec{d}\|_p^p.$$

Remarquons que la fonction

$$t \ge 0 \;\mapsto\; \frac{(1+t)^p}{1+t^p}$$

est décroissante sur $[0, 1]$, croissante sur $[1, +\infty[$, et son minimum réalisé en $t = 1$ vaut 2^{p-1}. De plus, sa limite en $+\infty$ vaut 1 et sa valeur en 0 vaut 1. Puisque $0 < p < 1$, nous avons donc pour tout $t \ge 0$

$$\frac{(1+t)^p}{1+t^p} \le 1.$$

En considérant $t = \frac{|y|}{|x|}$, il s'ensuit que

$$(|x| + |y|)^p \le |x|^p + |y|^p$$

pour tous $x, y \in \mathbb{C}$, $x \ne 0$. De plus, cette relation est trivialement vérifiée si $x = 0$. Par conséquent, nous obtenons que

$$\begin{aligned}
\|\vec{c} + \vec{d}\|_p^p &= \sum_{n\in X} |c_n + d_n|^p \\
&\le \sum_{n\in X} (|c_n| + |d_n|)^p \\
&\le \sum_{n\in X} (|c_n|^p + |d_n|^p) \\
&\le \|\vec{c}\|_p^p + \|\vec{d}\|_p^p,
\end{aligned}$$

d'où la conclusion. □

Le lemme suivant nous donne des informations concernant les inclusions existant entre les espaces de suites l^p. Cela nous sera utile pour l'étude des espaces de suites de Besov.

Lemme 1.2.14. *Si* $0 < p \leq q \leq \infty$ *et si* X *est un ensemble dénombrable d'indices, alors* $l^p(X) \subset l^q(X)$ *et*

$$\|\vec{x}\|_q \leq \|\vec{x}\|_p$$

pour tout $\vec{x} \in l^p(X)$.

Démonstration. Le cas où $\vec{x} = \vec{0}$ étant trivial, nous pouvons supposer que $\vec{x} \neq \vec{0}$. Si $q < \infty$, posons

$$\vec{y} = \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|_p}.$$

Il suffit à présent de montrer que $\|\vec{y}\|_q \leq 1$. Nous savons que

$$\sum_{n \in X} |y_n|^p = 1$$

d'où $|y_n| \leq 1$ pour tout $n \in X$. Par conséquent, il est clair que

$$\sum_{n \in X} |y_n|^q \leq \sum_{n \in X} |y_n|^p.$$

puisque $p \leq q$. Ainsi,

$$\|\vec{y}\|_q^q \leq \|\vec{y}\|_p^p = 1$$

d'où la conclusion.

Considérons à présent le cas où $q = \infty$. Si $\vec{x} \in l^p(X)$, alors

$$\|\vec{x}\|_p = \left(\sum_{n \in X} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Par conséquent,

$$\sum_{n \in X} |x_n|^p = \|\vec{x}\|_p^p$$

et $|x_n|^p \leq \|\vec{x}\|_p^p$ pour tout $n \in X$. Ainsi, nous obtenons que

$$\sup_{n \in X} |x_n| \leq \|\vec{x}\|_p$$

d'où la conclusion. □

Remarque 1.2.15. En utilisant le lemme 1.2.14, il est clair que si q est une p semi-norme, c'est également une p' semi-norme pour tous p, p' tels que $0 < p' < p \leq 1$. En effet, si q est une p semi-norme et si $0 < p' < p \leq 1$, alors

$$\begin{aligned} q(e+f) &\leq ((q(e))^p + (q(f))^p)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq ((q(e))^{p'} + (q(f))^{p'})^{\frac{1}{p'}} \end{aligned}$$

pour tous $e, f \in E$, d'où

$$(q(e+f))^{p'} \leq (q(e))^{p'} + (q(f))^{p'}$$

pour tous $e, f \in E$.

Proposition 1.2.16. *L'application $\|.\|_{b^s_{p,\infty}}$ est une $\min(1,p)$ norme sur l'espace $b^s_{p,\infty}$.*

Démonstration. En effet, il est clair que $\|\lambda\vec{x}\|_{b^s_{p,\infty}} = |\lambda|\|\vec{x}\|_{b^s_{p,\infty}}$ pour tous $\lambda \in \mathbb{C}$ et $\vec{x} \in b^s_{p,\infty}$, et que $\|\vec{x}\|_{b^s_{p,\infty}} = 0$ implique $\vec{x} = \vec{0}$.

De plus, supposons d'une part que $p \geq 1$. Alors pour $\vec{x}, \vec{y} \in b^s_{p,\infty}$,

$$\begin{aligned} \|\vec{x}+\vec{y}\|_{b^s_{p,\infty}} &= \sup_{j\in\mathbb{N}} 2^{\left(s-\frac{1}{p}\right)j} \left(\sum_{k=0}^{2^j-1} |x_{j,k}+y_{j,k}|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \sup_{j\in\mathbb{N}} 2^{\left(s-\frac{1}{p}\right)j} \left(\left(\sum_{k=0}^{2^j-1} |x_{j,k}|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=0}^{2^j-1} |y_{j,k}|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right) \\ &\leq \|\vec{x}\|_{b^s_{p,\infty}} + \|\vec{y}\|_{b^s_{p,\infty}} \end{aligned}$$

où la première inégalité provient du fait que $\|.\|_p$ est une semi-norme.

D'autre part, si $p < 1$ et si $\vec{x}, \vec{y} \in b^s_{p,\infty}$,

$$\begin{aligned} \|\vec{x}+\vec{y}\|^p_{b^s_{p,\infty}} &= \sup_{j\in\mathbb{N}} 2^{\left(s-\frac{1}{p}\right)jp} \left(\sum_{k=0}^{2^j-1} |x_{j,k}+y_{j,k}|^p\right) \\ &\leq \sup_{j\in\mathbb{N}} 2^{\left(s-\frac{1}{p}\right)jp} \left(\sum_{k=0}^{2^j-1} |x_{j,k}|^p + \sum_{k=0}^{2^j-1} |y_{j,k}|^p\right) \\ &\leq \|\vec{x}\|^p_{b^s_{p,\infty}} + \|\vec{y}\|^p_{b^s_{p,\infty}} \end{aligned}$$

puisque $\|.\|_p$ est une p semi-norme. □

Remarque 1.2.17. Nous pouvons étendre de manière naturelle la définition des espaces de Besov au cas où $p = \infty$ par l'ensemble des suites $\vec{x} \in \Omega$ telles que

$$\|\vec{x}\|_{b^s_{\infty,\infty}} := \sup_{j\in\mathbb{N}} \sup_{k\in\{0,\ldots,2^j-1\}} 2^{sj}|x_{j,k}| < \infty.$$

C'est l'espace de suites de Hölder C^s. Il est immédiat de vérifier que l'application $\|.\|_{b^s_{\infty,\infty}}$ est une norme sur C^s. On la note également $\|.\|_{C^s}$.

Exemple 1.2.18. Considérons à présent l'application ν définie par

$$\nu(\alpha) = \begin{cases} -\infty & \text{si} \quad \alpha < a \\ 1 & \text{si} \quad \alpha \geq a \end{cases}$$

où $a \in \mathbb{R}$ et montrons que dans ce cas,

$$\mathrm{S}^\nu = \bigcap_{\varepsilon > 0} C^{a-\varepsilon}.$$

Soit $\vec{c} \in \mathrm{S}^\nu$ et soit $\varepsilon > 0$. Si l'on fixe $C > 0$, il existe $J \in \mathbb{N}$ tel que

$$\#\{k : |c_{j,k}| \geq C2^{-(a-\varepsilon)j}\} = 0 \quad \forall\, j \geq J$$

d'où

$$2^{(a-\varepsilon)j}|c_{j,k}| < C \quad \forall\, j \geq J.$$

Comme le nombre d'indices (j,k) tels que $j < J$ est fini, on en tire que

$$\sup_{j\in\mathbb{N}} \sup_{k\in\{0,\ldots,2^j-1\}} 2^{(a-\varepsilon)j}|c_{j,k}| < \infty$$

c'est-à-dire $\vec{c} \in C^{a-\varepsilon}$.

Réciproquement, supposons que $\vec{c} \in \bigcap_{\varepsilon>0} C^{a-\varepsilon}$ et montrons que $\vec{c} \in \mathrm{S}^\nu$. Soient $\alpha \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ et $C > 0$. Si $\alpha \geq a$, alors

$$\#\{k : |c_{j,k}| \geq C2^{-\alpha j}\} \leq 2^j < 2^{(\nu(\alpha)+\varepsilon)j}$$

pour tout $j \in \mathbb{N}$. D'autre part, si $\alpha < a$, soit $\varepsilon > 0$ tel que $\alpha + \varepsilon < a$. Puisque $\vec{c} \in C^{a-\varepsilon}$, il existe une constante $D > 0$ telle que

$$\sup_{j\in\mathbb{N}} \sup_{k\in\{0,\ldots,2^j-1\}} 2^{(a-\varepsilon)j}|c_{j,k}| < D.$$

De plus, il existe $J \in \mathbb{N}$ tel que

$$C2^{(a-\varepsilon-\alpha)j} \geq D$$

si $j \geq J$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} \#\{k : |c_{j,k}| \geq C2^{-\alpha j}\} &= \#\{k : 2^{(a-\varepsilon)j}|c_{j,k}| \geq C2^{(a-\varepsilon-\alpha)j}\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

pour tout $j \geq J$, d'où $\vec{c} \in \mathrm{S}^\nu$.

La proposition suivante donne des informations sur les inclusions existant entre les espaces de suites de Besov et de Hölder.

Proposition 1.2.19.
(1) Pour tous $s, s' \in \mathbb{R}$ *et tous* $p, p' > 0$ *tels que*

$$p' \geq p \text{ et } s - \frac{1}{p} \geq s' - \frac{1}{p'},$$

nous avons

$$b^s_{p,\infty} \subset b^{s'}_{p',\infty}$$

continûment.
(2) Si $s \in \mathbb{R}$ *et* $p > 0$*, alors*

$$b^{s+\frac{1}{p}}_{p,\infty} \subset C^s$$

continûment.
(3) Si $0 < p \leq p'$ *et* $s \in \mathbb{R}$*, alors*

$$b^s_{p',\infty} \subset b^s_{p,\infty}$$

continûment.

Démonstration. Démontrons tout d'abord le point (1). Soient $s, s' \in \mathbb{R}$, $p, p' > 0$ tels que

$$p' \geq p \text{ et } s - \frac{1}{p} \geq s' - \frac{1}{p'}$$

et $\vec{x} \in b^s_{p,\infty}$. Pour tout $j \in \mathbb{N}$, nous avons

$$2^{\left(s' - \frac{1}{p'}\right)j} \left(\sum_{k=0}^{2^j - 1} |x_{j,k}|^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}} \leq 2^{\left(s - \frac{1}{p}\right)j} \left(\sum_{k=0}^{2^j - 1} |x_{j,k}|^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}}$$

puisque $s - \frac{1}{p} \geq s' - \frac{1}{p'}$. De plus, vu le lemme 1.2.14 et puisque $p' \geq p$, nous obtenons

$$\left(\sum_{k=0}^{2^j - 1} |x_{j,k}|^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}} \leq \left(\sum_{k=0}^{2^j - 1} |x_{j,k}|^{p} \right)^{\frac{1}{p}}$$

pour tout $j \in \mathbb{N}$, d'où

$$\|\vec{x}\|_{b^{s'}_{p',\infty}} \leq \|\vec{x}\|_{b^s_{p,\infty}} < \infty$$

et $\vec{x} \in b^{s'}_{p',\infty}$.

Passons à présent à la preuve du point (2). Soient $s \in \mathbb{R}$, $p > 0$ et $\vec{x} \in b^{s+\frac{1}{p}}_{p,\infty}$. Montrons que

$$\sup_{j \in \mathbb{N}} \sup_{k \in \{0, \ldots, 2^j - 1\}} 2^{sj} |x_{j,k}| < \infty.$$

Nous savons que

$$\sup_{j\in\mathbb{N}} 2^{sj}\left(\sum_{k=0}^{2^j-1}|x_{j,k}|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

et la conclusion découle directement du lemme 1.2.14 avec le cas $q=\infty$.

Pour le point (3), soient $0<p\leq p'$ et $s\in\mathbb{R}$. Considérons $\vec{x}\in b^s_{p',\infty}$. Remarquons qu'au vu des inégalités de Hölder 1.2.12, nous avons pour tout $j\in\mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^{2^j-1}|x_{j,k}|^p \leq \left(\sum_{k=0}^{2^j-1}1\right)^{\frac{1}{q'}}\left(\sum_{k=0}^{2^j-1}|x_{j,k}|^{p'}\right)^{\frac{1}{q}}$$

où $q=\frac{p'}{p}$ et q' est son exposant conjugué. Puisque $\frac{1}{q}+\frac{1}{q'}=1$, nous obtenons que

$$\frac{1}{q'}=1-\frac{p}{p'}$$

d'où

$$\left(\sum_{k=0}^{2^j-1}|x_{j,k}|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq 2^{j\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p'}\right)}\left(\sum_{k=0}^{2^j-1}|x_{j,k}|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}}.$$

Par conséquent,

$$2^{\left(s-\frac{1}{p}\right)j}\left(\sum_{k=0}^{2^j-1}|x_{j,k}|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq 2^{\left(s-\frac{1}{p}\right)j}2^{j\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p'}\right)}\left(\sum_{k=0}^{2^j-1}|x_{j,k}|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}}$$

pour tout $j\in\mathbb{N}$, ce qui entraîne

$$\|\vec{x}\|_{b^s_{p,\infty}} \leq \|\vec{x}\|_{b^s_{p',\infty}},$$

d'où la conclusion. □

Introduisons à présent une nouvelle fonction définie à partir de ν. Cette fonction est liée à l'analyse multifractale, dans le contexte du formalisme thermodynamique (que nous développerons dans le chapitre 3). La fonction d'échelle $\eta_{\vec{c}}$ d'une suite $\vec{c}$, introduite initialement en physique de la turbulence ([17]), est définie par

$$\eta_{\vec{c}}(p)=\sup\{s\in\mathbb{R}\ :\vec{c}\in b^{\frac{s}{p}}_{p,\infty}\}$$

pour tout $p>0$. En fait, cette fonction est liée à $\nu_{\vec{c}}$ (au travers d'une transformée de Legendre) comme le prouve le lemme suivant, démontré dans [8].

Lemme 1.2.20. *Si $\vec{c}$ est une suite pour laquelle il existe α_0 tel que $\nu_{\vec{c}}(\alpha) = -\infty$ pour tout $\alpha < \alpha_0$, alors*

$$\eta_{\vec{c}}(p) = \inf_{\alpha \geq \alpha_0} (\alpha p - \nu_{\vec{c}}(\alpha) + 1)$$

pour tout $p > 0$.

Ce lemme nous amène donc naturellement à la définition suivante.

Définition 1.2.21. Si ν est un profil admissible, le conjugué concave de ν est la fonction η définie par

$$\eta(p) = \inf_{\alpha \geq \alpha_{min}} (\alpha p - \nu(\alpha) + 1)$$

pour tout $p > 0$.

La proposition suivante montre que si ν n'est pas concave, alors S^ν contient strictement plus d'information que celle donnée par la connaissance des espaces de Besov et du conjugué concave de ν.

Proposition 1.2.22. *Si η est le conjugué concave de ν, alors*

$$S^\nu \subset \bigcap_{p>0} \bigcap_{\varepsilon>0} b_{p,\infty}^{\frac{\eta(p)}{p}-\varepsilon}$$

et l'égalité a lieu si et seulement si ν est concave.

Démonstration. La preuve de ce résultat peut être trouvée dans [6]. □

Cette proposition nous permet de considérer de nouveaux exemples non-triviaux d'espaces S^ν.

Exemple 1.2.23. Soit la fonction ν définie par

$$\nu(\alpha) = \begin{cases} -\infty & \text{si} \quad \alpha < 0 \\ \alpha & \text{si} \quad 0 \leq \alpha \leq 1 \\ 1 & \text{si} \quad \alpha \geq 1. \end{cases}$$

Soit $p > 0$. Alors

$$\begin{aligned} \eta(p) &= \inf_{\alpha \geq 0} (\alpha p - \nu(\alpha) + 1) \\ &= \inf \left\{ \inf_{0 \leq \alpha \leq 1} (\alpha p - \alpha + 1), \inf_{\alpha \geq 1} (\alpha p - 1 + 1) \right\} \\ &= \inf \left\{ \inf_{0 \leq \alpha \leq 1} (\alpha p - \alpha + 1), p \right\} \end{aligned}$$

et puisque

$$\inf_{0 \leq \alpha \leq 1} (\alpha p - \alpha + 1) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad p \geq 1 \\ p & \text{si} \quad 0 < p < 1, \end{cases}$$

on obtient que

$$\eta(p) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad p \geq 1 \\ p & \text{si} \quad 0 < p < 1. \end{cases}$$

Par conséquent, la fonction ν étant concave, nous obtenons que

$$\mathrm{S}^\nu = \bigcap_{0<p<1} \bigcap_{\varepsilon>0} b^{1-\varepsilon}_{p,\infty} \cap \bigcap_{p\geq 1} \bigcap_{\varepsilon>0} b^{\frac{1}{p}-\varepsilon}_{p,\infty}.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Par la proposition 1.2.19 (1), nous avons

$$b^{1-\varepsilon}_{1,\infty} \subset b^{\frac{1}{p}-\varepsilon}_{p,\infty}$$

pour tout $p \geq 1$. Ainsi

$$b^{1-\varepsilon}_{1,\infty} \subset \bigcap_{p\geq 1} b^{\frac{1}{p}-\varepsilon}_{p,\infty} \subset b^{1-\varepsilon}_{1,\infty}$$

d'où

$$\bigcap_{p\geq 1} b^{\frac{1}{p}-\varepsilon}_{p,\infty} = b^{1-\varepsilon}_{1,\infty}.$$

De plus, si $0 < p < 1$, alors par la proposition 1.2.19 (3), nous avons

$$b^{1-\varepsilon}_{1,\infty} \subset b^{1-\varepsilon}_{p,\infty}$$

d'où

$$b^{1-\varepsilon}_{1,\infty} \subset \bigcap_{0<p<1} b^{1-\varepsilon}_{p,\infty}.$$

Au total, nous obtenons donc que

$$\mathrm{S}^\nu = \bigcap_{\varepsilon>0} b^{1-\varepsilon}_{1,\infty}.$$

Exemple 1.2.24. L'exemple précédent se généralise facilement au cas où

$$\nu(\alpha) = \begin{cases} -\infty & \text{si} \quad \alpha < 0 \\ a\alpha & \text{si} \quad 0 \leq \alpha \leq \dfrac{1}{a} \\ 1 & \text{si} \quad \alpha \geq \dfrac{1}{a} \end{cases}$$

avec $a > 0$. Dans ce cas, nous trouvons que

$$\mathrm{S}^\nu = \bigcap_{\varepsilon>0} b^{\frac{1}{a}-\varepsilon}_{a,\infty}.$$

Exemple 1.2.25. Soient $\alpha_{max}, \alpha_{min} \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha_{max} - \alpha_{min} = 1$. Pour la fonction ν définie par

$$\nu(\alpha) = \left\{ \begin{array}{ccl} -\infty & si & \alpha < \alpha_{min} \\ \alpha - \alpha_{min} & \text{si} & \alpha_{min} \leq \alpha \leq \alpha_{max} \\ 1 & \text{si} & \alpha > \alpha_{max} \end{array} \right.$$

nous avons

$$\eta(p) = \left\{ \begin{array}{ccl} \alpha_{max} p & \text{si} & 0 < p < 1 \\ \alpha_{min} p + 1 & \text{si} & p \geq 1. \end{array} \right.$$

En effet, pour tout $p > 0$,

$$\begin{aligned} \eta(p) &= \inf_{\alpha \geq \alpha_{min}} (\alpha p - \nu(\alpha) + 1) \\ &= \inf \left(\inf_{\alpha_{min} \leq \alpha \leq \alpha_{max}} (\alpha p - \alpha + \alpha_{min} + 1), \inf_{\alpha > \alpha_{max}} (\alpha p - 1 + 1) \right) \\ &= \inf \left(\inf_{\alpha_{min} \leq \alpha \leq \alpha_{max}} (\alpha(p-1) + \alpha_{min} + 1), \inf_{\alpha > \alpha_{max}} (\alpha p) \right) \\ &= \inf \left(\inf_{\alpha_{min} \leq \alpha \leq \alpha_{max}} (\alpha(p-1) + \alpha_{min} + 1), \alpha_{max} p \right). \end{aligned}$$

De plus, si $p \geq 1$,

$$\begin{aligned} \inf_{\alpha_{max} \geq \alpha \geq \alpha_{min}} (\alpha(p-1) + \alpha_{min} + 1) &= \alpha_{min}(p-1) + \alpha_{min} + 1 \\ &= \alpha_{min} p + 1 \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \eta(p) &= \inf(\alpha_{min} p + 1, \alpha_{max} p) \\ &= \inf(\alpha_{min} p + 1, \alpha_{min} p + p) \\ &= \alpha_{min} p + 1. \end{aligned}$$

De même, si $0 < p < 1$,

$$\begin{aligned} \eta(p) &= \inf \left(\alpha_{max}(p-1) + \alpha_{min} + 1, \alpha_{max} p \right) \\ &= \inf \left(\alpha_{max}(p-1) + \alpha_{max}, \alpha_{max} p \right) \\ &= \alpha_{max} p \end{aligned}$$

d'où le résultat annoncé.

Par conséquent, par la proposistion 1.2.22, nous avons

$$\mathrm{S}^\nu = \bigcap_{\varepsilon > 0} \bigcap_{p \geq 1} b_{p,\infty}^{\alpha_{min} + \frac{1}{p} - \varepsilon} \cap \bigcap_{\varepsilon > 0} \bigcap_{0 < p < 1} b_{p,\infty}^{\alpha_{max} - \varepsilon}$$

Fixons $\varepsilon > 0$ et remarquons que pour tout $p \geq 1$,

$$b_{1,\infty}^{\alpha_{max} - \varepsilon} \subset b_{p,\infty}^{\alpha_{min} + \frac{1}{p} - \varepsilon}$$

par la proposition 1.2.19 (1) et donc

$$b_{1,\infty}^{\alpha_{max}-\varepsilon} \subset \bigcap_{p\geq 1} b_{p,\infty}^{\alpha_{min}+\frac{1}{p}-\varepsilon} \subset b_{1,\infty}^{\alpha_{min}+1-\varepsilon} = b_{1,\infty}^{\alpha_{max}-\varepsilon}.$$

De plus, si $0 < p < 1$, alors la proposition 1.2.19 (3) implique que

$$b_{1,\infty}^{\alpha_{max}-\varepsilon} \subset b_{p,\infty}^{\alpha_{max}-\varepsilon}.$$

Ainsi

$$\mathrm{S}^\nu = \bigcap_{\varepsilon>0} b_{1,\infty}^{\alpha_{max}-\varepsilon}.$$

Enfin, si $0 < \varepsilon < 1$, nous avons par la même proposition 1.2.19 (1) que

$$b_{1,\infty}^{\alpha_{max}-\varepsilon} \subset b_{1,\infty}^{\alpha_{max}-\varepsilon'}$$

pour tout $\varepsilon' > 1$, d'où

$$b_{1,\infty}^{\alpha_{max}-\varepsilon} \subset \bigcap_{\varepsilon'>1} b_{1,\infty}^{\alpha_{max}-\varepsilon'}.$$

Par conséquent,

$$\mathrm{S}^\nu = \bigcap_{\varepsilon>0} b_{1,\infty}^{\alpha_{max}-\varepsilon} = \bigcap_{0<\varepsilon<1} b_{1,\infty}^{\alpha_{max}-\varepsilon}.$$

1.3 Topologie naturelle sur les espaces S^ν

Dans ce paragraphe, nous introduisons une topologie naturelle sur les espaces S^ν. Pour cela, nous allons tout d'abord introduire une famille d'espaces auxiliaires qui seront utiles pour obtenir et étudier une structure d'espace métrique sur S^ν. Les preuves des résultats énoncés et non démontrés se trouvent dans [6].

Définition 1.3.1.

Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \{-\infty\} \cup [0, +\infty[$. Une suite appartient à **l'espace $\mathbf{E}(\alpha, \beta)$** s'il existe $C, C' \geq 0$ tels que

$$\#E_j(C, \alpha)(\vec{c}) \leq C' 2^{\beta j} \ , \forall j \geq 0.$$

Remarques 1.3.2.

1. Si $\beta = -\infty$, alors $E(\alpha, \beta)$ est l'ensemble de toutes les suites telles que

$$\sup_{j\in\mathbb{N}} \sup_{k\in\{0,\dots,2^j-1\}} 2^{j\alpha}|c_{j,k}| \ < \ + \infty.$$

   C'est donc l'espace de suites de Hölder C^α.
2. Si $\beta \in [1, +\infty[$, alors $E(\alpha, \beta) = \Omega$.

La proposition suivante donne le lien naturel qui existe entre les espaces $E(\alpha,\beta)$ et l'espace S^ν.

Proposition 1.3.3. *Pour toute suite* $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *dense dans* $\mathbb{R}$ *et toute suite* $(\varepsilon_m)_{m\in\mathbb{N}}$ *de* $]0,+\infty[$ *qui converge vers 0,*

$$\mathrm{S}^\nu = \bigcap_{\varepsilon>0}\bigcap_{\alpha\in\mathbb{R}} E(\alpha,\nu(\alpha)+\varepsilon) = \bigcap_{m\in\mathbb{N}}\bigcap_{n\in\mathbb{N}} E(\alpha_n,\nu(\alpha_n)+\varepsilon_m).$$

Remarque 1.3.4. Il est clair que l'intersection ci-dessus peut être réduite à l'intersection sur les $\alpha<\alpha_{max}$. En effet, si $\alpha\geq\alpha_{max}$, alors $\nu(\alpha)=1$ et pour tout $\varepsilon>0$, nous avons $E(\alpha,\nu(\alpha)+\varepsilon)=\Omega$.

Remarque 1.3.5. Dès qu'une topologie est donnée sur chacun des espaces auxiliaires $E(\alpha,\nu(\alpha)+\varepsilon)$, l'espace S^ν peut être muni naturellement de la topologie la plus faible rendant les injections

$$\mathrm{S}^\nu \to E(\alpha,\nu(\alpha)+\varepsilon)$$

continues. Une base de voisinages de 0 de cette topologie est donnée par les intersections finies dans S^ν de voisinages de 0 dans les espaces $E(\alpha,\nu(\alpha)+\varepsilon)$.

Nous allons à présent définir une distance sur chaque espace $E(\alpha,\beta)$ et étudier les propriétés de ces espaces. Vu la remarque précédente, cela nous permettra d'arriver à la définition d'une topologie naturelle sur S^ν.

Définition 1.3.6. Soient $\vec{c},\vec{d}\in E(\alpha,\beta)$. La distance entre $\vec{c}$ et $\vec{d}$ est définie par

$$d_{\alpha,\beta}(\vec{c},\vec{d}) := \inf\left\{C+C' : C,C'\geq 0 \text{ et } \#\left\{k : |c_{j,k}-d_{j,k}|\geq C2^{-\alpha j}\right\}\leq C'2^{\beta j}\ ,\ \forall j\geq 0\right\}.$$

Proposition 1.3.7. *Soient* $\alpha\in\mathbb{R}$ *et* $\beta\in\{-\infty\}\cup[0,+\infty[$. *L'ensemble* $E(\alpha,\beta)$ *est un espace vectoriel. De plus, la fonction* $d_{\alpha,\beta}$ *est une distance sur cet espace qui est invariante par translation et qui satisfait*

$$d_{\alpha,\beta}(\lambda\vec{c},\vec{0})\leq \sup\{1,|\lambda|\}\, d_{\alpha,\beta}(\vec{c},\vec{0})$$

Remarque 1.3.8. Dans certains articles, les auteurs donnent une autre définition de la distance. Notons-la d', donnée par

$$d'_{\alpha,\beta}(\vec{c},\vec{d}) := \inf\left\{C : C\geq 0 \text{ et } \#\left\{k : |c_{j,k}-d_{j,k}|\geq C2^{-\alpha j}\right\}\leq C2^{\beta j}\ ,\ \forall j\geq 0\right\}.$$

Ces deux distances définissent la même topologie. En effet, d'une part soient $\vec{c}\in E(\alpha,\beta)$ et $C>0$ tel que

$$\#\ \left\{k : |c_{j,k}|\geq C2^{\beta j}\right\}\leq C2^{\beta j}$$

pour tout $j\geq 0$. Alors $d_{\alpha,\beta}(\vec{c},\vec{0})\leq 2C$ et par conséquent, $d_{\alpha,\beta}(\vec{c},\vec{0})\leq 2d'_{\alpha,\beta}(\vec{c},\vec{0})$.
D'autre part, si $C,C'>0$ sont tels que

$$\#\ \left\{k : |c_{j,k}|\geq C2^{\beta j}\right\}\leq C'2^{\beta j}.$$

et si nous posons $D = \max(C, C')$, alors

$$\# \left\{k : |c_{j,k}| \geq D2^{\beta j}\right\} \leq D2^{\beta j}.$$

et $d'_{\alpha,\beta}(\vec{c}, \vec{0}) \leq D \leq C + C'$. Donc $d'_{\alpha,\beta}(\vec{c}, \vec{0}) \leq d_{\alpha,\beta}(\vec{c}, \vec{0})$ ce qui suffit vu la propriété d'invariance de ces distances par translation.

Définition 1.3.9. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la partie entière de α, notée $\lfloor \alpha \rfloor$, est définie comme étant le plus grand entier plus petit ou égal à α.

Proposition 1.3.10. *Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \{-\infty\} \cup [0, +\infty[$.*

1. *Si $\beta = -\infty$, alors $E(\alpha, \beta)$ est l'espace topologique normé de Hölder C^α.*
2. *Si $\beta \geq 1$, alors $d_{\alpha,\beta} \leq 1$ et $E(\alpha, \beta)$ est l'ensemble de toutes les suites. De plus,*
   - *si $\beta > 1$, la topologie définie par la distance $d_{\alpha,\beta}$ est équivalente à la topologie ponctuelle.*
   - *si $\beta = 1$ et $\alpha > 0$, alors pour tout $\lambda \neq 0$, $d_{\alpha,\beta}(\lambda\vec{1}, \vec{0}) = 1$. Cela donne des exemples de $(\lambda_m)_{m\in\mathbb{N}}$ et de $\vec{c}$ tels que $\lambda_m \to 0$ et $\lambda_m\vec{c} \nrightarrow 0$ pour la distance $d_{\alpha,\beta}$.*
3. *Si $\beta < 1$, alors $E(\alpha, \beta)$ n'est pas borné pour la distance $d_{\alpha,\beta}$.*

Démonstration. La preuve des points 1 et 2 peut être trouvée dans [6].

Pour démontrer le point 3, définissons une suite $\vec{c}^{(m)}$ de Ω comme suit :

$$c^{(m)}_{j,k} = \begin{cases} 0 & \forall k \text{ si } m > \lfloor 2^{j(d-\beta)} \rfloor \\ jm^{j|\alpha|} & \text{pour } m\lfloor 2^{\beta j} \rfloor \text{ valeurs de } k \text{ si } m \leq \lfloor 2^{j(1-\beta)} \rfloor \end{cases}$$

et montrons que pour tout m, $d_{\alpha,\beta}(\vec{c}^{(m)}, \vec{0}) = m$. Tout d'abord, pour $m \in \mathbb{N}$ fixé, $\vec{c}^{(m)} \in E(\alpha, \beta)$ car

$$\# \left\{k : |c^{(m)}_{j,k}| \geq \varepsilon 2^{-\alpha j}\right\} \leq m2^{\beta j} \ , \forall j \geq 0$$

pour tout $\varepsilon > 0$, et en particulier

$$d_{\alpha,\beta}(\vec{c}^{(m)}, \vec{0}) \leq m + \varepsilon.$$

Puisque $\varepsilon > 0$ est arbitraire, il s'ensuit que

$$d_{\alpha,\beta}(\vec{c}^{(m)}, \vec{0}) \leq m.$$

Soient à présent $C, C' \geq 0$ tels que

$$\# \left\{k : |c^{(m)}_{j,k}| \geq C2^{-\alpha j}\right\} \leq C'2^{\beta j} \ , \forall j \geq 0.$$

Pour j suffisamment grand et $m \geq 2$, nous avons

$$jm^{j|\alpha|} \geq C2^{-\alpha j}.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} m\lfloor 2^{\beta j}\rfloor &\leq \#\left\{k : |c_{j,k}^{(m)}| \geq C2^{-\alpha j}\right\} \\ &\leq C'2^{\beta j} \\ &< C'(\lfloor 2^{\beta j}\rfloor + 1) \end{aligned}$$

pour j suffisamment grand et $m \geq 2$, d'où

$$m < C'\frac{\lfloor 2^{\beta j}\rfloor + 1}{\lfloor 2^{\beta j}\rfloor}.$$

Puisque le deuxième membre tend vers C' si $j \to +\infty$, on en tire que $m \leq C'$ et donc que $m \leq C' + C$. Par conséquent

$$d_{\alpha,\beta}(\vec{c}^{(m)}, \vec{0}) \geq m.$$

La conclusion en découle directement.

□

Proposition 1.3.11. *Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \{-\infty\} \cup [0, +\infty[$.*

1. *L'addition est continue sur $(E(\alpha,\beta), d_{\alpha,\beta})$. Cependant, si $\beta \in [0,1]$, alors le produit*

$$\mathbb{C} \times (E(\alpha,\beta), d_{\alpha,\beta}) \to (E(\alpha,\beta), d_{\alpha,\beta}) : (\lambda, \vec{c}) \mapsto \lambda\vec{c}$$

n'est pas continu. Il s'ensuit que l'espace $(E(\alpha,\beta), d_{\alpha,\beta})$ avec $\beta \in [0,1]$ n'est pas un espace vectoriel topologique.

2. *L'espace $(E(\alpha,\beta), d_{\alpha,\beta})$ a une topologie plus forte que la topologie ponctuelle et toute suite de Cauchy de $(E(\alpha,\beta), d_{\alpha,\beta})$ est aussi une suite de Cauchy ponctuelle. Cependant, les bornés sont différents : un borné pour la topologie ponctuelle n'est pas nécessairement borné dans $(E(\alpha,\beta), d_{\alpha,\beta})$ et inversement.*
3. *L'espace $(E(\alpha,\beta), d_{\alpha,\beta})$ est un espace métrique complet.*

Proposition 1.3.12. *Si $\alpha \leq \alpha'$, $\beta \geq \beta'$, alors $E(\alpha,\beta) \subseteq E(\alpha',\beta')$ et $d_{\alpha',\beta'} \geq d_{\alpha,\beta}$. De plus, si $\alpha < \alpha'$, $\beta > \beta'$ et B est un ensemble borné de $E(\alpha,\beta), d_{\alpha,\beta})$, alors toute suite de B qui converge ponctuellement converge aussi dans $(E(\alpha',\beta'), d_{\alpha',\beta'})$.*

Proposition 1.3.13. *Soient $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dense dans $\mathbb{R}$ et $(\varepsilon_m)_{m\in\mathbb{N}}$ une suite de $]0, +\infty[$ qui converge vers 0. Pour chaque $m, n \in \mathbb{N}$, posons*

$$d_{m,n} := d_{\alpha_n, \nu(\alpha_n)+\varepsilon_m}$$

et

$$E(m,n) := (E(\alpha_n, \nu(\alpha_n) + \varepsilon_m), d_{m,n}).$$

Alors

$$d = \sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-(m+n)}\frac{d_{m,n}}{1 + d_{m,n}}$$

est une distance sur S^ν qui possède les propriétés suivantes :

1. *La topologie définie par d sur S^ν est la plus faible qui rend pour tous $m, n \in \mathbb{N}$, l'application identité $\mathrm{S}^\nu \to E(m,n)$ continue. Elle est en particulier plus forte que la topologie ponctuelle.*
2. *Une suite de S^ν est de Cauchy dans (S^ν, d) si et seulement si c'est une suite de Cauchy dans $(E(m,n), d_{m,n})$ pour tous $m, n \in \mathbb{N}$.*
3. *Une suite de S^ν converge dans (S^ν, d) si et seulement si elle converge dans $(E(m,n), d_{m,n})$ pour tous $m, n \in \mathbb{N}$.*
4. *L'espace (S^ν, d) est un espace vectoriel topologique complet et séparable.*

De plus, il est démontré dans [6] que la topologie définie par d est indépendante des suites $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\varepsilon_m)_{m\in\mathbb{N}}$ choisies. Plus généralement, le théorème du graphe fermé pour les espaces vectoriels topologiques métrisables complets ([26]) implique le résultat suivant.

Proposition 1.3.14. *Toutes les distances définies sur S^ν qui définissent une topologie complète plus forte que la topologie ponctuelle sont équivalentes.*

Démonstration. Supposons que d_1 et d_2 sont deux distances sur S^ν qui définissent une topologie complète plus forte que la topologie ponctuelle et considérons l'application

$$\mathrm{id}_{1,2} : (\mathrm{S}^\nu, d_1) \to (\mathrm{S}^\nu, d_2).$$

Si $\vec{c}^{(M)}$ est une suite de S^ν qui converge vers $\vec{c}_1$ pour d_1 et vers $\vec{c}_2$ pour d_2, alors on a aussi que $\vec{c}^{(M)} \to \vec{c}_1$ et $\vec{c}^{(M)} \to \vec{c}_2$ pour la topologie ponctuelle, d'où $\vec{c}_1 = \vec{c}_2$ puisque la topologie ponctuelle est séparée. Par conséquent, l'application $\mathrm{id}_{1,2}$ entre espaces vectoriels topologiques métrisables complets est à graphe fermé et est donc continue. En procédant de même pour l'application

$$\mathrm{id}_{2,1} : (\mathrm{S}^\nu, d_2) \to (\mathrm{S}^\nu, d_1),$$

on obtient l'équivalence des topologies. □

Terminons cette partie consacrée à la topologie naturelle de S^ν par la caractérisation des compacts de S^ν.

Proposition 1.3.15. *Une partie K de S^ν est compacte dans (S^ν, d) si et seulement si elle est fermée dans (S^ν, d) et si il existe pour tous $m, n \in \mathbb{N}$ des constantes $C(m,n), C'(m,n) \geq 0$ telles que*

$$K \subseteq \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left\{ \vec{c} : \ \#\left\{k : |c_{k,j}| > C(m,n) 2^{-\alpha_n j}\right\} \leq C'(m,n) 2^{j(\nu(\alpha_n)+\varepsilon_m)} \ , \forall j \geq 0 \right\}.$$

De plus, toute suite de K qui converge ponctuellement converge aussi dans S^ν.

1.4 Cas p-localement convexe

Dans cette section, nous allons voir que la convexité locale de l'espace S^ν dépend de ν, et plus précisément de son indice de convexité locale introduit ci-dessous. Par contre, l'espace S^ν n'est jamais p-normable. Commençons par rappeler quelques définitions et propriétés des espaces p-localement convexes.

1.4.1 Espaces p-localement convexes

Définition 1.4.1. Soit $0 < p \leq 1$. Un ensemble K d'un espace vectoriel E est p-convexe si pour tous $x_1, ..., x_N \in K$ et pour tous $\theta_1, ..., \theta_N \geq 0$ tels que $\sum_{n=1}^{N} \theta_n^p = 1$, la combinaison p-convexe $\sum_{n=1}^{N} \theta_n x_n$ appartient à K. L'ensemble K est dit absolument p-convexe s'il est de plus équilibré, c'est-à-dire

$$\forall x \in K, \forall \lambda \in \mathbb{C} \text{ tel que } |\lambda| \leq 1, \lambda x \in K.$$

Remarque 1.4.2. Lorsque $p = 1$, on parle habituellement de parties convexes et de parties absolument convexes.

Proposition 1.4.3. *Soit* $0 < p \leq 1$. *Une partie* K *d'un espace vectoriel* X *est absolument* p*-convexe si et seulement si*

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i K \subset K$$

pour tous $\mu_1, ..., \mu_n \in \mathbb{C}$ *tels que* $\sum_{i=1}^{n} |\mu_i|^p \leq 1$.

Démonstration. La condition est clairement suffisante. Réciproquement, si $\mu_1, ..., \mu_n$ sont tels que $\sum_{i=1}^{n} |\mu_i|^p \leq 1$ et si $x_1, ..., x_n \in K$, alors

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i &= \left(\sum_{i=1}^{n} |\mu_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\mu_i}{\left(\sum_{j=1}^{n} |\mu_j|^p \right)^{\frac{1}{p}}} x_i \right) \\ &= \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} |\mu_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}}_{\leq 1} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{|\mu_i|}{\left(\sum_{j=1}^{n} |\mu_j|^p \right)^{\frac{1}{p}}} \underbrace{\frac{\mu_i}{|\mu_i|} x_i}_{\in K \text{ car } K \text{ est équilibré}} \right)}_{\in K \text{ car } K \text{ est } p\text{-convexe}} \end{aligned}$$

qui appartient à K car K est équilibré, d'où la conclusion. □

Proposition 1.4.4. *Soient* $0 < s < r \leq 1$. *Si* A *est un ensemble absolument* r*-convexe, alors* A *est absolument* s*-convexe.*

Démonstration. C'est immédiat car si $\mu_1, ..., \mu_n$ sont tels que $\sum_{i=1}^{n} |\mu_i|^s \leq 1$, alors nous avons que $\sum_{i=1}^{n} |\mu_i|^r \leq 1$. □

Remarque 1.4.5. Par contre, un ensemble r-convexe n'est pas nécessairement s-convexe si $0 < s < r \leq 1$. En effet, $\{e\} \subset E$ est convexe mais n'est pas s-convexe si $0 < s < 1$.

Proposition 1.4.6. *Soient un espace vectoriel topologique* E *et* A *une partie absolument* p*-convexe de* E, *avec* $0 < p \leq 1$. *Alors l'adhérence de* A *est également absolument* p*-convexe.*

Démonstration. Par continuité de l'addition et de la multiplication par un scalaire dans E, nous avons

$$\lambda\bar{A} + \mu\bar{A} \subset \overline{\lambda A + \mu A}$$

pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Ainsi, $\lambda\bar{A} + \mu\bar{A} \subset \bar{A}$ si $|\lambda|^p + |\mu|^p \leq 1$. □

Définition 1.4.7. Un espace vectoriel topologique est p-localement convexe s'il possède une base de voisinages de 0 absolument p-convexes.

Définition 1.4.8. Une partie A d'un espace vectoriel E est absorbante si pour tout $e \in E$, il existe une constante $C > 0$ telle que $e \in cA$ pour tout $c \in \mathbb{C}$, $|c| \geq C$.

Proposition 1.4.9. *Soit A une partie absolument p-convexe et absorbante d'un espace vectoriel topologique E. Pour tout $e \in E$, on pose*

$$P_A(e) = \inf\{\lambda > 0 : e \in \lambda A\}.$$

Alors P_A est une p semi-norme sur E, appelée la Jauge de Minkowski de A.

Démonstration. Remarquons tout d'abord puisque A est une partie absorbante de E, pour tout $e \in E$, l'ensemble

$$\{\lambda > 0 : e \in \lambda A\}$$

est non vide. Par conséquent, la définition de $P_A(e)$ a du sens.

Soient $e \in E$ et $\lambda > 0$ tel que $e \in \lambda A$. Si $\lambda_0 \in \mathbb{C}_0$, nous avons

$$\lambda_0 e \in \lambda_0 \lambda A = |\lambda_0|\lambda \frac{\lambda_0}{|\lambda_0|} A \subset |\lambda_0|\lambda A$$

puisque A est équilibré. Par conséquent,

$$P_A(\lambda_0 e) \leq |\lambda_0|\lambda$$

pour tout $\lambda > 0$ tel que $e \in \lambda A$, d'où

$$P_A(\lambda_0 e) \leq |\lambda_0| P_A(e).$$

De plus, nous avons également

$$\begin{aligned} |\lambda_0| P_A(e) &= |\lambda_0| P_A\left(\frac{1}{\lambda_0}\lambda_0 e\right) \\ &\leq |\lambda_0| \frac{1}{|\lambda_0|} P_A(\lambda_0 e) \\ &= P_A(\lambda_0 e). \end{aligned}$$

Au total, nous avons montré que

$$P_A(\lambda_0 e) = |\lambda_0| P_A(e)$$

et cette relation est trivialement vérifiée si $\lambda_0 = 0$.

Soient à présent $e_1, e_2 \in E$ et λ_1, λ_2 positifs tels que $e_1 \in \lambda_1 A$ et $e_2 \in \lambda_2 A$. Alors,

$$\begin{aligned} e_1 + e_2 \in \lambda_1 A + \lambda_2 A &= (\lambda_1^p + \lambda_2^p)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{\lambda_1}{(\lambda_1^p + \lambda_2^p)^{\frac{1}{p}}} A + \frac{\lambda_2}{(\lambda_1^p + \lambda_2^p)^{\frac{1}{p}}} A \right) \\ &\subset (\lambda_1^p + \lambda_2^p)^{\frac{1}{p}} A \end{aligned}$$

puisque A est absolument p-convexe. Par conséquent,

$$P_A(e_1 + e_2)^p \leq \lambda_1^p + \lambda_2^p$$

pour tous $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ tels que $e_1 \in \lambda_1 A$ et $e_2 \in \lambda_2 A$. On en tire donc que

$$P_A(e_1 + e_2)^p \leq P_A(e_1)^p + P_A(e_2)^p.$$

□

Proposition 1.4.10. *Soient E un espace vectoriel topologique et A une partie absolument p-convexe et absorbante de E. Alors*

$$b_{P_A}(1) \subset A \subset B_{P_A}(1)$$

où

$$b_{P_A}(1) = \{x \in E : P_A(x) < 1\} \text{ et } B_{P_A}(1) = \{x \in E : P_A(x) \leq 1\}.$$

Démonstration. Soit $e \in b_{P_A}(1)$. Alors $P_A(e) < 1$ et il existe $0 < \lambda < 1$ tel que $e \in \lambda A$. Puisque A est équilibré, on en tire que $e \in A$.

De plus, si $e \in A = 1A$, alors $P_A(e) \leq 1$ c'est-à-dire $e \in B_{P_A}(1)$. □

Remarque 1.4.11. Il est clair que les ensembles $b_{P_A}(1)$ et $B_{P_A}(1)$ sont absolument p-convexes.

Définition 1.4.12. Un système de p semi-normes $\mathcal{P}$ sur E est filtrant si pour tous $q, q' \in \mathcal{P}$, il existe $r \in \mathcal{P}$ et $C > 0$ tels que

$$\sup\{q, q'\} \leq Cr.$$

Théorème 1.4.13. *Un espace vectoriel topologique $(E, \mathcal{T})$ est p-localement convexe si et seulement si il existe une famille filtrante de p semi-normes sur E définissant une topologie équivalente à la topologie $\mathcal{T}$.*

Démonstration. Montrons que la condition est nécessaire et supposons donc que $(E, \mathcal{T})$ est p-localement convexe. Alors il existe une base $\mathcal{U}$ de voisinages de 0 absolument p-convexes. Tout voisinage de 0 étant absorbant dans un espace vectoriel topologique, nous pouvons définir pour tout $U \in \mathcal{U}$ la p semi-norme

$$P_U : E \to [0, \infty[: e \mapsto \inf\{\lambda > 0 : e \in \lambda A\}.$$

Considérons l'ensemble des p semi-normes

$$\mathcal{P} = \{P_U : U \in \mathcal{U}\}$$

et montrons que cet ensemble est filtrant et définit une topologie équivalente à $\mathcal{T}$.

Si $V, W \in \mathcal{U}$, nous avons par définition

$$P_V \leq P_{V \cap W} \text{ et } P_W \leq P_{V \cap W}.$$

Comme $\mathcal{U}$ est une base de voisinages de 0, il existe $U \in \mathcal{U}$ avec $U \subset V \cap W$ et dans ce cas

$$P_{V \cap W} \leq P_U$$

d'où $\sup\{P_V, P_W\} \leq P_U$. Ainsi, $\mathcal{P}$ est un système filtrant de semi-normes.

Démontrons à présent l'équivalence des topologies. Soient d'une part $U \in \mathcal{T}$ et $e \in U$. Alors il existe $V \in \mathcal{U}$ tel que $e + V \subset U$. Nous savons également que $b_{P_V}(1) \subset V$ et donc

$$b_{P_V}(e, 1) = e + b_{P_V}(1) \subset e + V \subset U.$$

Par conséquent, U est un voisinage de e pour la topologie engendrée par le système $\mathcal{P}$ et comme e est arbitraire dans U, on en tire que U est ouvert pour cette topologie.

D'autre part, soit U un ouvert pour la topologie engendrée par le système $\mathcal{P}$ et soit $e \in U$. Il existe alors $V \in \mathcal{U}$ et $\varepsilon > 0$ tels que

$$e + \varepsilon b_{P_V}(1) = b_{P_V}(e, \varepsilon) \subset U.$$

Nous avons également

$$V \subset B_{P_V}(1) \subset b_{P_V}(2)$$

d'où

$$e + \frac{\varepsilon}{2} V \subset e + \frac{\varepsilon}{2} b_{P_V}(2) = e + \varepsilon b_{P_V}(1) \subset U.$$

Comme la multiplication par un scalaire est continue, il existe $V \in \mathcal{U}$ tel que $W \subset \frac{\varepsilon}{2} V$. Alors

$$e + W \subset U$$

ce qui montre que U est un voisinage de 0 pour la topologie $\mathcal{T}$. Comme $e \in U$ est arbitraire, nous obtenons que $U \in \mathcal{T}$.

La condition est clairement suffisante. En effet, si $\mathcal{P}$ est un système filtrant de p semi-normes sur E et si $e \in E$, posons

$$\mathcal{B} = \{b_p(e, \varepsilon) : p \in \mathcal{P} \text{ et } \varepsilon > 0\}$$

où

$$b_p(e, \varepsilon) = \{f \in E : p(e - f) < \varepsilon\}.$$

Pour tous $p, q \in \mathcal{P}$, nous savons qu'il existe $r \in \mathcal{P}$ et $C > 0$ tels que

$$\sup\{p, q\} \leq Cr$$

et il s'ensuit que l'intersection de deux éléments de $\mathcal{B}$ contient un élément de $\mathcal{B}$. Il existe donc une unique topologie pour laquelle les p semi-boules $b_p(e, \varepsilon)$ avec $p \in \mathcal{P}$ et $\varepsilon > 0$ forment un système fondamental de voisinages de e. Comme les p semi-boules $b_p(\varepsilon) = b_p(0, \varepsilon)$ sont des parties absolument p-convexes de E, nous obtenons la conclusion. □

1.4.2 Convexité locale des espaces de type S^ν

Lorsque ν est concave, nous savons par la proposition 1.2.22 que S^ν est une intersection d'espaces de suites de Besov $b_{p,\infty}^{\frac{\eta(p)}{p}-\varepsilon}$ pour $\varepsilon > 0$ et $p > 0$. De plus, lorsque l'on considère S^ν muni de la topologie introduite dans la section précédente, chaque application identité

$$\mathrm{S}^\nu \to b_{p,\infty}^{\frac{\eta(p)}{p}-\varepsilon}$$

est continue. En effet, on vérifie facilement que la topologie de l'espace métrisable $b_{p,\infty}^{\frac{\eta(p)}{p}-\varepsilon}$ est complète et plus forte que la topologie de la convergence ponctuelle. La continuité découle alors directement du théorème du graphe fermé.

Définition 1.4.14. Si ν est un profil admissible, sa "right-inf derivative" est définie par

$$\underline{\partial}^+\nu(\alpha) := \liminf_{h \to 0^+} \frac{\nu(\alpha + h) - \nu(\alpha)}{h}.$$

pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha \geq \alpha_{min}$. Son indice de convexité locale est défini par

$$p_0 := \min\left(1, \inf_{\alpha_{min} \leq \alpha < \alpha_{max}} \underline{\partial}^+\nu(\alpha)\right).$$

Dans [2], il est montré que si $0 < p \leq p_0$,

$$b_{p_0,\infty}^{\frac{\eta(p_0)}{p_0}-\varepsilon} \subset b_{p,\infty}^{\frac{\eta(p)}{p}-\varepsilon}.$$

En conséquence, nous pouvons en fait nous restreindre à l'intersection sur les $p \geq p_0$, c'est-à-dire

$$\mathrm{S}^\nu = \bigcap_{\varepsilon>0} \bigcap_{p \geq p_0} b_{p,\infty}^{\frac{\eta(p)}{p}-\varepsilon}$$

si ν est concave. Dans ce cas, l'espace S^ν est donc une intersection d'espaces au moins p_0-localement convexes. Cette idée mène au cas général, présenté dans la proposition suivante.

Proposition 1.4.15. *L'espace vectoriel topologique* S^ν *n'est* p*-normable pour aucun* $p > 0$. *De plus*

- *Si* $p_0 < 1$, *alors* S^ν *n'est* p*-localement convexe pour aucun* $p > p_0$.
- *Si* $p_0 > 0$, *alors* S^ν *est* p_0*-localement convexe.*

Démonstration. La démonstration de cette proposition se trouve dans l'article [2]. □

Par conséquent, il est clair que l'espace S^ν est de Fréchet si et seulement si $p_0 = 1$, c'est-à-dire $\underline{\partial}^+\nu(\alpha) \geq 1$ pour tout $\alpha_{min} \leq \alpha < \alpha_{max}$.

La topologie d'un espace de Fréchet peut toujours être définie à partie d'une suite de semi-normes. Dans le cas où l'espace est seulement p_0-localement convexe, les semi-normes sont naturellement remplacées par des p_0 semi-normes. Dans le cas des espaces S^ν, cette suite de p_0 semi-normes peut être décrite explicitement comme le montre la proposition suivante.

Proposition 1.4.16. *Si* $p_0 > 0$, *la topologie de* S^ν *est induite par la famille de normes* $\|.\|_{b^{\alpha_{min}-\varepsilon}_{\infty,\infty}}$ *et des* p_0*-normes* $\|.\|_{\alpha,\varepsilon}$ *définies par*

$$\|x\|_{\alpha,\varepsilon} := \inf \left\{ \|x'\|_{b^s_{p_0,\infty}} + \|x''\|_{b^\alpha_{\infty,\infty}} : x = x' + x'' \right\}$$

où $\alpha \in [\alpha_{min}, \alpha_{max}[$, $\varepsilon > 0$ *et* $s := \alpha + \frac{1-\nu(\alpha)}{p_0} - \varepsilon$. *Cette famille de* p_0*-normes peut être rendue dénombrable en prenant une suite* $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *dense dans* $[\alpha_{min}, \alpha_{max}[$ *et une suite* $(\varepsilon_m)_{m\in\mathbb{N}}$ *de réels positifs qui converge vers* 0.

Démonstration. La démonstration de cette proposition se trouve dans [2]. □

Dans le cas où $p_0 = 0$, la topologie de l'espace S^ν ne peut plus être décrite par une famille de p semi-normes pour une valeur de p fixée. Cependant, nous allons voir que sous une condition supplémentaire, cette topologie peut néanmoins être définie à partir de p semi-normes, p étant non fixé.

Définition 1.4.17. Un espace vectoriel topologique est localement pseudoconvexe s'il existe une famille de r semi-normes, $0 < r \leq 1$, définissant la topologie de cet espace.

Proposition 1.4.18. *Supposons que* $\alpha_{min} > -\infty$. *Pour toute suite* $(p_m)_{m\in\mathbb{N}}$ *de* $]0, 1]$ *convergeant vers* 0, *la topologie de l'espace* S^ν *peut être définie par une suite de* p_m *semi-normes. Ainsi, l'espace* S^ν *est localement pseudoconvexe.*

Démonstration. La preuve de ce résultat se trouve dans [4]. □

Remarque 1.4.19. Dans l'article [4], il est également montré que si $S^\nu \neq \Omega$, c'est-à-dire si ν n'est pas identiquement égal à 1, et si $\alpha_{min} = -\infty$, alors S^ν n'est pas localement pseudoconvexe. Cependant, il s'agit d'un cas dégénéré que nous ne considérons pas vu la proposition 1.1.2.

1.5 Bases de l'espace S^ν

Commençons par rappeler quelques notions sur les bases dans un espace vectoriel topologique séparé $(E, \mathcal{T})$, avant de présenter la base canonique de l'espace S^ν.

Définition 1.5.1. Une suite (finie ou infinie) $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E est une base topologique de E si tout $e \in E$ détermine une unique suite $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{C}$ telle que

$$\left(\sum_{n=0}^{N} \xi_n e_n\right)_{N\in\mathbb{N}}$$

converge vers e au sens de la topologie de E.

Remarque 1.5.2. Si aucune confusion n'est possible, on parlera simplement de base.

En définissant e_n^* par $< e, e_n^* >:= \xi_n$, on obtient une forme linéaire sur E, appelée la $n^{ième}$ *fonctionnelle linéaire* associée à la base $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Définition 1.5.3. Une base topologique $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E est appelée une base inconditionnelle si pour tout $e \in E$ et toute permutation π de $\mathbb{N}$, la suite

$$\left(\sum_{n=0}^{N} < e, e_{\pi(n)}^* > e_{\pi(n)}\right)_{N\in\mathbb{N}}$$

converge au sens de la topologie de E.

Définition 1.5.4. Une base topologique $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E est une base de Schauder si les fonctionnelles linéaires associées sont continues, c'est-à-dire si $e_n^* \in E'$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'application

$$P_k : E \to E : e \mapsto \sum_{n=1}^{k} \langle x, e_n^* \rangle e_n$$

est le $k^{ième}$ *projecteur en somme partielle* associé à la base $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Définition 1.5.5. Une base de E est équicontinue si les projecteurs en sommes partielles P_k forment une suite équicontinue de $L(E, E)$, c'est-à-dire si pour tout voisinage V de 0, il existe un voisinage U de 0 tel que $P_k(U) \subseteq V$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Définition 1.5.6. Une suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E est une base faible (de Schauder) si c'est une base (de Schauder) pour la topologie faible $\sigma(E, E')$ sur E, c'est-à-dire la topologie définie par les semi-normes

$$p_{A'} = \sup\{|\langle ., e' \rangle| : e' \in A'\}$$

où A' est une partie finie de E'.

Remarque 1.5.7. Comme la topologie faible sur E est plus faible que la topologie τ de départ de E, il est clair que toute base de $(E, \mathcal{T})$ est une base de $(E, \sigma(E, E'))$, c'est-à-dire une base faible de E. Le même résultat a également lieu pour les bases de Schauder vu la définition de la topologie faible.

Présentons à présent la base canonique de l'espace S^ν. Nous définissons la suite $\vec{e}^{(j,k)}$ par

$$e^{(j,k)}_{j',k'} = \begin{cases} 0 & \text{si } j' \neq j \text{ ou } k' \neq k \\ 1 & \text{si } j' = j \text{ et } k' = k \end{cases}$$

Nous ordonnons les éléments de la suite comme suit : pour tout $M \in \mathbb{N}$, il existe des uniques $J \in \mathbb{N}$ et $0 \leq h < 2^J$ tels que $M = 2^J + h$. Le $M^{\text{ième}}$ élément de la suite est le vecteur $\vec{e}^{J,h}$.

Proposition 1.5.8. *Ordonnée comme ci-dessus, la suite* $(\vec{e}^{(j,k)})_{j \in \mathbb{N}, k \in \{0,\ldots,2^j-1\}}$ *forme une base topologique de* S^ν.

Démonstration. Il est clair que la suite $\vec{e}^{(j,k)}$ appartient à l'espace S^ν car si $\alpha \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ et $C > 0$, on a

$$\#\left\{k' : |e^{(j,k)}_{j',k'}| \geq C 2^{-\alpha j'}\right\} \leq 2^{(\nu(\alpha)+\varepsilon)j'}$$

pour tout $j' \geq j + 1$. Montrons qu'il s'agit d'une base topologique de S^ν.

Soit $\vec{c} \in \mathrm{S}^\nu$. Pour tout $M \in \mathbb{N}$, il existe des uniques $J \in \mathbb{N}$ et $0 \leq h < 2^J$ tels que $M = 2^J + h$. Posons

$$\vec{c}^{(M)} = \sum_{j=0}^{J} \sum_{k=0}^{h} c_{j,k} \vec{e}^{(j,k)}$$

c'est-à-dire

$$c^{(M)}_{j,k} = \begin{cases} c_{j,k} & \text{si } j \leq J \text{ et } k \leq h \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et montrons que $\vec{c}^{(M)} \to \vec{c}$ dans S^ν. Comme $\vec{c} \in \mathrm{S}^\nu$, on peut trouver pour tous $m, n \in \mathbb{N}$, des constantes positives $C(m,n)$ et $C'(m,n)$ telles que

$$\vec{c} \in K = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left\{\vec{d} : \#\left\{k : |d_{j,k}| > C(m,n) 2^{-\alpha_n j}\right\} \leq 2^{(\nu(\alpha_n)+\varepsilon_m)j} \ , \forall j \geq 0\right\},$$

où $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite dense dans $\mathbb{R}$ et $(\varepsilon_m)_{m \in \mathbb{N}}$ est une suite positive qui converge vers 0. Puisque

$$\#\left\{k : |c^{(M)}_{j,k}| > C(m,n) 2^{-\alpha_n j}\right\} \leq \#\left\{k : |c_{j,k}| > C(m,n) 2^{-\alpha_n j}\right\}$$

pour tout $j \geq 0$, $\vec{c}^{(M)}$ appartient à K pour tout $M \in \mathbb{N}$. On a donc une suite de K qui converge ponctuellement vers $\vec{c}$ et par la proposition 1.3.15, elle converge également vers $\vec{c}$ dans S^ν. Ainsi, tout vecteur de S^ν se décompose selon les $\vec{e}^{(j,k)}$ et il est clair que cette décomposition est unique. La suite $(\vec{e}^{(j,k)})_{j \in \mathbb{N}, k \in \{0,\ldots,2^j-1\}}$ est donc une base topologique de S^ν.

□

Proposition 1.5.9. *La base topologique* $(\vec{e}^{(j,k)})_{j\in\mathbb{N},k\in\{0,\ldots,2^j-1\}}$ *de* S^ν *est une base inconditionnelle de* S^ν*.*

Démonstration. Le raisonnement de la preuve précédente s'adapte aisément. □

Proposition 1.5.10. *La base topologique* $(\vec{e}^{(j,k)})_{j\in\mathbb{N},k\in\{0,\ldots,2^j-1\}}$ *est une base de Schauder de* S^ν*.*

Démonstration. Définissons les fonctionnelles linéaires $\varepsilon_{j,k}:\mathrm{S}^\nu\to\mathbb{C}$ par

$$<\vec{c},\varepsilon_{j,k}>=c_{j,k}.$$

Puisque la topologie de S^ν est plus forte que la topologie ponctuelle et que ces fonctions sont continues ponctuellement, la conclusion est immédiate. □

Proposition 1.5.11. *La base* $(\vec{e}^{(j,k)})_{j\in\mathbb{N},k\in\{0,\ldots,2^j-1\}}$ *est une base équicontinue.*

Démonstration. Considérons les opérateurs de projection

$$P_M:\mathrm{S}^\nu\to\mathrm{S}^\nu:\vec{c}\mapsto\sum_{j=0}^{J}\sum_{k=0}^{h}c_{j,k}\vec{e}^{(j,k)}$$

pour tout $M\in\mathbb{N}$, $M=2^J+h$. Soit V un voisinage de 0 dans S^ν et cherchons un voisinage U de 0 dans S^ν tel que $P_M(U)\subseteq V$ pour tout $M\in\mathbb{N}$.

Comme V est un voisinage de 0 dans S^ν, il existe des sous-ensembles finis $\{m_1,\ldots,m_R\}$ et $\{n_1,\ldots,n_S\}$ de $\mathbb{N}$ et des constantes ε_{m_r,n_s} tels que

$$U=\bigcap_{1\le r\le R}\bigcap_{1\le s\le S}\left\{\vec{c}\in\mathrm{S}^\nu\ :d_{m_r,n_s}(\vec{c},\vec{0})<\varepsilon_{m_r,n_s}\right\}\subset V.$$

Montrons que

$$P_M(U)\subset V$$

pour tout $M\in\mathbb{N}$.

Soit $\vec{c}\in U$ et $M\in\mathbb{N}$, $M=2^J+h$. Alors

$$P_M(\vec{c})_{j,k}=\begin{cases}c_{j,k} & \text{si } j\le J,k\le h\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

et donc pour tous $m,n\in\mathbb{N}$,

$$\#\left\{k:|(P_M(\vec{c}))_{j,k}|\ge C2^{-\alpha_n j}\right\}\le\#\left\{k:|\vec{c}_{j,k}|\ge C2^{-\alpha_n j}\right\}.$$

En particulier,

$$d_{m_r,n_s}(P_M(\vec{c}),\vec{0})\le d_{m_r,n_s}(\vec{c},\vec{0})<\varepsilon_{m_r,n_s}$$

pour tous $1\le r\le R$ et $1\le s\le S$. On en tire donc que

$$P_M(\vec{c})\in\bigcap_{1\le r\le R}\bigcap_{1\le s\le S}\left\{\vec{d}:d_{m_r,n_s}(\vec{d},\vec{0})<\varepsilon_{m_r,n_s}\right\}\subset V,$$

d'où la conclusion. □

1.6 Propriétés supplémentaires des espaces de type S^ν

1.6.1 Cas $p_0 = 1$

Dans le cas où $p_0 = 1$, au vu des résultats précédents, l'espace S^ν est un espace de Fréchet. Ce cas est particulièrement intéressant car les relations existantes entre les propriétés typiques que peuvent vérifier ces espaces sont déjà bien connues ([10, 26, 27, 33]). La question est donc de savoir parmi ces propriétés, quelles sont celles que l'espace S^ν vérifie. Commençons pour cela par rappeler quelques définitions.

Soit E un espace localement convexe séparé. Pour tout voisinage absolument convexe U de 0, l'espace $E_{(U)}$ est défini par

$$E_{(U)} := E/\left\{x : \forall \rho > 0, x \in \rho U\right\}$$

et est muni de la norme

$$\|x\|_U := \inf\left\{\rho > 0 : x \in \rho U\right\}.$$

Définition 1.6.1. Une application $S : E \to F$ entre espaces normés est nucléaire si il existe une suite $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ équicontinue de E', une suite $(y_m)_{m\in\mathbb{N}}$ bornée dans F et une suite de complexes $(\lambda_m)_{m\in\mathbb{N}}$ de $l^1(\mathbb{N})$ tels que pour tout $x \in E$,

$$S(x) = \sum_{m\in\mathbb{N}} \lambda_m u_m(x) y_m$$

où la série est convergente dans F.

Définition 1.6.2. Un espace localement convexe séparé E est nucléaire si pour tout voisinage absolument convexe U de 0, il existe un voisinage absolument convexe V de 0 absorbé par U tel que l'application canonique

$$\pi_{U,V} : E_{(V)} \to E_{(U)}$$

est nucléaire.

Définition 1.6.3. Un espace localement convexe séparé E est de Schwartz si tout voisinage absolument convexe U de 0 contient un voisinage absolument convexe V de 0 tel que pour tout $\lambda > 0$, il existe un ensemble fini $M \subset E$ tel que

$$V \subset M + \lambda U.$$

Proposition 1.6.4. *Tout espace localement convexe nucléaire est de Schwartz.*

Démonstration. Soit E un espace localement convexe nucléaire et $\mathcal{U}$ une base de voisinages absolument convexes de 0. Soit $U \in \mathcal{U}$, $U = b_p(r)$ où $r > 0$ et p est une semi-norme de E. Par nucléarité, nous savons qu'il existe un voisinage absolument convexe $V = b_q(R)$ de 0 absorbé par U tel que l'application

$$\pi_{U,V} : E_{(V)} \to E_{(U)}$$

est nucléaire. Soit $\lambda > 0$. Nous cherchons un sous-ensemble fini M de E tel que

$$b_q(R) \subset M + \lambda b_p(r)$$

c'est-à-dire qui soit tel que pour tout $e \in E$ satisfaisant $q(e) \leq R$, il existe $a \in M$ tel que $p(e-a) \leq \lambda r$. Par nucléarité de l'application $\pi_{U,V}$, il existe une suite équicontinue $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ de $(E_{(V)})'$, une suite bornée $(y_m)_{m\in\mathbb{N}}$ de $E_{(U)}$ et une suite de complexes $(\lambda_m)_{m\in\mathbb{N}}$ de $l^1(\mathbb{N})$ tels que pour tout $e \in E_{(V)}$,

$$e = \sum_{m\in\mathbb{N}} \lambda_m u_m(e) y_m$$

dans $E_{(U)}$. Puisque $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est une suite équicontinue, il existe $C > 0$ tel que

$$|u_m(e)| \leq C\|e\|_V = \frac{C}{R} q(e)$$

pour tout $e \in E_{(V)}$ et pour tout $m \in \mathbb{N}$. Etant donné que la suite $(y_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $E_{(U)}$, il existe $C' > 0$ tel que

$$\|y_m\|_U \leq C'$$

pour tout $m \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire tel que

$$p(y_m) \leq rC'$$

pour tout $m \in \mathbb{N}$. Enfin, comme $(\lambda_m)_{m\in\mathbb{N}} \in l^1(\mathbb{N})$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\sum_{m=N+1}^{+\infty} |\lambda_m| \leq \frac{\lambda}{2CC'}.$$

Supposons que $e \in E$ vérifie $q(e) \leq R$. On a alors

$$\begin{aligned}
\left\| e - \sum_{m=1}^{N} \lambda_m u_m(e) y_m \right\|_U &= \left\| \sum_{m=M+1}^{+\infty} \lambda_m u_m(e) y_m \right\|_U \\
&\leq \sum_{m=N+1}^{+\infty} |\lambda_m| \frac{C}{R} q(e) C' \\
&\leq \sum_{m=N+1}^{+\infty} |\lambda_m| CC' \\
&\leq \frac{\lambda}{2}.
\end{aligned}$$

Puisque

$$\left\| e - \sum_{m=1}^{N} \lambda_m u_m(e) y_m \right\|_U = \frac{1}{r} p\left(e - \sum_{m=1}^{N} \lambda_m u_m(e) u_m \right),$$

on en tire que

$$p\left(e-\sum_{m=1}^{N}\lambda_m u_m(e)y_m\right)\leq\frac{\lambda r}{2}.$$

Posons $L => y_1, ..., y_N <$ et

$$K=\left\{\sum_{m=1}^{N}\lambda_m u_m(e)y_m : e\in E, q(e)\leq R\right\}.$$

Comme L est un espace de dimension finie, K est précompact dans L. En effet, K est borné car

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{m=1}^{N}\lambda_m u_m(e)y_m\right\|_U &\leq \sum_{m=1}^{N}|\lambda_m|\frac{C}{R}q(e)C' \\ &\leq CC'\sum_{m=1}^{N}|\lambda_m|.\end{aligned}$$

et dans un espace de dimension finie, les bornés coïncident avec les précompacts. Par conséquent, il existe $a_1, ..., a_J \in E$ tels que

$$K\subset\bigcup_{j=1}^{J}b_p\left(a_j,\frac{\lambda r}{2}\right).$$

Si $e\in E$ est tel que $q(e)\leq R$ et si $j\in\{1, ..., J\}$ satisfait

$$p\left(\sum_{m=1}^{N}\lambda_m u_m(e)y_m-a_j\right)\leq\frac{\lambda r}{2},$$

on obient finalement

$$\begin{aligned}p(e-a_j) &\leq p\left(e-\sum_{m=1}^{N}\lambda_m u_m(e)y_m\right)+p\left(\sum_{m=1}^{N}\lambda_m u_m(e)y_m-a_j\right)\\ &\leq \frac{\lambda r}{2}+\frac{\lambda r}{2}\\ &= \lambda r\end{aligned}$$

ce qui prouve que $M=\{a_1, ..., a_J\}$ convient. □

D'autres propriétés des espaces de Fréchet seront présentées plus tard. Nous pouvons néanmoins déjà signaler que la nucléarité sera la notion la plus forte. Il est donc naturel de commencer par se demander si l'espace S^ν est nucléaire. Malheureusement, cela n'est pas le cas. Pour le montrer, nous allons utiliser le lemme suivant.

Lemme 1.6.5. *Si $s' < s$ et si l'application identité*

$$id : b^s_{p_0,\infty} \to b^{s'}_{p_0,\infty} \ \textit{(resp. } C^s \to C^{s'} \textit{)}$$

est nucléaire, alors $s - s' \geq 1$.

Démonstration. Si l'application

$$id : b^s_{p_0,\infty} \to b^{s'}_{p_0,\infty}$$

est nucléaire, il existe une suite $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ équicontinue de $(b^s_{p_0,\infty})'$, une suite $(\vec{y}^{(m)})_{m\in\mathbb{N}}$ bornée de $b^{s'}_{p_0,\infty}$ et une suite de complexes $(\lambda_m)_{m\in\mathbb{N}}$ de $l^1(\mathbb{N})$ tels que pour tout $\vec{x} \in b^s_{p_0,\infty}$,

$$\vec{x} = \sum_{m\in\mathbb{N}} \lambda_m u_m(\vec{x})\vec{y}^{(m)}$$

où la série est convergente dans $b^{s'}_{p_0,\infty}$.

La suite $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ étant une suite équicontinue de $(b^s_{p_0,\infty})'$, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$|u_m(\vec{x})| \leq C\|\vec{x}\|_{b^s_{p_0,\infty}}$$

pour tout $\vec{x} \in b^s_{p_0,\infty}$ et tout $m \in \mathbb{N}$. De plus, étant donné que la suite $(\vec{y}^{(m)})_{m\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $b^{s'}_{p_0,\infty}$, il existe une constante $D > 0$ telle que

$$\|\vec{y}^{(m)}\|_{b^{s'}_{p_0,\infty}} \leq D$$

pour tout $m \in \mathbb{N}$.

En considérant le vecteur $\vec{e}^{j,k}$, on obtient que

$$1 = \sum_{m\in\mathbb{N}} \lambda_m u_m(\vec{e}^{j,k}) y^{(m)}_{j,k}$$

d'où, pour tout $j \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
1 &= \sum_{m\in\mathbb{N}} \lambda_m 2^{-j} \sum_{k=0}^{2^j-1} u_m(\vec{e}^{j,k}) y^{(m)}_{j,k} \\
&= \sum_{m\in\mathbb{N}} \lambda_m u_m \left(2^{-j} \sum_{k=0}^{2^j-1} y^{(m)}_{j,k} \vec{e}^{j,k} \right) \\
&\leq \sum_{m\in\mathbb{N}} |\lambda_m| \left| u_m \left(2^{-j} \sum_{k=0}^{2^j-1} y^{(m)}_{j,k} \vec{e}^{j,k} \right) \right|
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq C \sum_{m\in\mathbb{N}} |\lambda_m| \left\| 2^{-j} \sum_{k=0}^{2^j-1} y_{j,k}^{(m)} \vec{e}^{j,k} \right\|_{b^s_{p_0,\infty}} \\
&\leq C \sum_{m\in\mathbb{N}} |\lambda_m| 2^{-j} 2^{(s-\frac{1}{p_0})j} \left(\sum_{k=0}^{2^j-1} |y_{j,k}^{(m)}|^{p_0} \right)^{\frac{1}{p_0}} \\
&\leq CD \sum_{m\in\mathbb{N}} |\lambda_m| 2^{-j} 2^{(s-s')j}.
\end{aligned}
$$

Cette relation étant vérifiée pour tout $j \in \mathbb{N}$, on en tire que $s - s' - 1 \geq 0$.

On procède de même pour les espaces de Hölder $C^s, C^{s'}$ et en utilisant les normes correspondantes. Si l'application

$$id : C^s \to C^{s'}$$

est nucléaire, il existe une suite $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ équicontinue de $(C^s)'$, une suite $(\vec{y}^{(m)})_{m\in\mathbb{N}}$ bornée de $C^{s'}$ et une suite de complexes $(\lambda_m)_{m\in\mathbb{N}}$ de $l^1(\mathbb{N})$ tels que pour tout $\vec{x} \in C^s$,

$$\vec{x} = \sum_{m\in\mathbb{N}} \lambda_m u_m(\vec{x}) \vec{y}^{(m)}$$

où la série est convergente dans $C^{s'}$. Comme dans le premier cas, nous obtenons des constantes $C > 0$ et $D > 0$

$$|u_m(\vec{x})| \leq C \|\vec{x}\|_{C^s} \text{ et } \|\vec{y}^{(m)}\|_{C^{s'}} \leq D$$

pour tout $\vec{x} \in C^s$ et tout $m \in \mathbb{N}$.

En considérant le vecteur $\vec{e}^{j,k}$, on obtient que

$$1 = \sum_{m\in\mathbb{N}} \lambda_m u_m(\vec{e}^{j,k}) y_{j,k}^{(m)}$$

d'où, pour tout $j \in \mathbb{N}$,

$$
\begin{aligned}
1 &= \sum_{m\in\mathbb{N}} \lambda_m 2^{-j} \sum_{k=0}^{2^j-1} u_m(\vec{e}^{j,k}) y_{j,k}^{(m)} \\
&= \sum_{m\in\mathbb{N}} \lambda_m u_m \left(2^{-j} \sum_{k=0}^{2^j-1} y_{j,k}^{(m)} \vec{e}^{j,k} \right) \\
&\leq \sum_{m\in\mathbb{N}} |\lambda_m| \left| u_m \left(2^{-j} \sum_{k=0}^{2^j-1} y_{j,k}^{(m)} \vec{e}^{j,k} \right) \right|
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&\leq C\sum_{m\in\mathbb{N}}|\lambda_m|\left\|2^{-j}\sum_{k=0}^{2^j-1}y_{j,k}^{(m)}\tilde{e}^{j,k}\right\|_{C^s}\\
&\leq C\sum_{m\in\mathbb{N}}|\lambda_m|\sup_{k\in\{0,\ldots,2^j-1\}}2^{sj}2^{-j}|y_{j,k}^{(m)}|\\
&\leq CD\sum_{m\in\mathbb{N}}|\lambda_m|2^{-j}2^{sj}2^{-s'j},
\end{aligned}$$

ce qui implique que $-1+s-s'\geq 0$.

□

Lemme 1.6.6. *Soient E, F et G des espaces vectoriels normés, $S : E \to F$ une application linéaire continue et $T : F \to G$ une application nucléaire. Alors l'application $T\circ S : E \to G$ est nucléaire.*

Démonstration. Puisque l'application $T : F \to G$ est nucléaire, il existe une suite $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ équicontinue de F', une suite $(y_m)_{m\in\mathbb{N}}$ bornée dans G et une suite de complexes $(\lambda_m)_{m\in\mathbb{N}}$ de $l^1(\mathbb{N})$ tels que pour tout $f\in F$,

$$T(f)=\sum_{m\in\mathbb{N}}\lambda_m u_m(f)y_m$$

où la série est convergente dans G. Alors la suite $(u_m\circ S)_{m\in\mathbb{N}}$ appartient à E'. De plus, puisque la suite $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est une suite équicontinue de F', pour tout $\varepsilon>0$, il existe un voisinage ouvert V de 0 dans F tel que

$$|u_m(f)|\leq\varepsilon$$

pour tout $f\in V$. Par conséquent,

$$|u_m\circ S(e)|\leq\varepsilon$$

pour tout $e\in S^{-1}(V)$. Puisque S est un application continue, $S^{-1}(V)$ est un voisinage ouvert de 0 dans E et la suite $(u_m\circ S)_{m\in\mathbb{N}}$ est équicontinue. Enfin, pour tout $e\in E$, nous avons

$$(T\circ S)(e)=\sum_{m\in\mathbb{N}}\lambda_m(u_m\circ S)(e)y_m$$

où la série est convergente dans G, d'où la conclusion. □

Remarque 1.6.7. Dans le cas où S^ν est p_0-localement convexe, vu la définition de p_0, il est clair que

$$p_0(\alpha-\alpha')\leq\nu(\alpha)-\nu(\alpha')$$

pour tous α,α' tels que $\alpha_{min}\leq\alpha'\leq\alpha<\alpha_{max}$, d'où également vu la croissance de ν,

$$p_0(\alpha-\alpha_{min})\leq\nu(\alpha)-\nu(\alpha_{min})\leq\nu(\alpha_{max})-\nu(\alpha_{min})$$

pour tout α tel que $\alpha_{min}\leq\alpha<\alpha_{max}$. En faisant tendre α vers α_{max}, on en tire que

$$p_0(\alpha_{max}-\alpha_{min})\leq\nu(\alpha_{max})-\nu(\alpha_{min})\leq 1.$$

Proposition 1.6.8. *Si* $p_0 = 1$*, l'espace* S^ν *n'est pas nucléaire.*

Démonstration. Vu la remarque, puisque $p_0 = 1$, nous avons $\alpha_{max} - \alpha_{min} \leq 1$. Considérons tout d'abord le cas où $\alpha_{max} - \alpha_{min} < 1$. Il est clair que $C^{\alpha_{max}}$ est inclus continûment dans chaque espace $E(\alpha, \nu(\alpha) + \varepsilon)$, $\alpha < \alpha_{max}$, $\varepsilon > 0$. En effet, si $\vec{c} \in C^{\alpha_{max}}$, alors pour tout $\alpha < \alpha_{max}$ et tout $\delta > 0$, nous avons

$$\#\left\{k : |c_{j,k}| \geq (\|\vec{c}\|_{C^{\alpha_{max}}} + \delta)\, 2^{-\alpha j}\right\} = 0$$

pour tout $j \in \mathbb{N}$. En effet,

$$\|\vec{c}\|_{C^{\alpha_{max}}} = \sup_{j \in \mathbb{N}} \sup_{k \in \{0,\ldots,2^j-1\}} 2^{\alpha_{max} j} |c_{j,k}|$$

et par conséquent,

$$\begin{aligned}
\#\left\{k : |c_{j,k}| \geq (\|\vec{c}\|_{C^{\alpha_{max}}} + \delta)\, 2^{-\alpha j}\right\} &\leq \#\left\{k : |c_{j,k}| \geq (\|\vec{c}\|_{C^{\alpha_{max}}} + \delta)\, 2^{-\alpha_{max} j}\right\} \\
&\leq \#\left\{k : |c_{j,k}| \geq \sup_{k \in \{0,\ldots,2^j-1\}} |c_{j,k}| + \delta 2^{-\alpha_{max} j}\right\} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Ainsi, $\vec{c} \in E(\alpha, \nu(\alpha) + \varepsilon)$ pour tous $\alpha < \alpha_{max}$ et $\varepsilon > 0$, et

$$d_{\alpha,\nu(\alpha)+\varepsilon}(\vec{c}, \vec{0}) \leq \|\vec{c}\|_{C^{\alpha_{max}}} + \delta.$$

où $\delta > 0$ est arbitraire. Nous en tirons que

$$d_{\alpha,\nu(\alpha)+\varepsilon}(\vec{c}, \vec{0}) \leq \|\vec{c}\|_{C^{\alpha_{max}}}.$$

Supposons que l'espace S^ν est nucléaire. Alors, si nous fixons $s < \alpha_{min}$, il existe un voisinage V de 0 dans S^ν tel que l'inclusion

$$E_{(V)} \to C^s$$

est nucléaire. Par le lemme 1.6.6, il s'ensuit que l'inclusion

$$C^{\alpha_{max}} \to C^s$$

est également nucléaire, d'où une contradiction au vu du lemme 1.6.5. Par conséquent, l'espace S^ν ne peut être nucléaire.

Considérons à présent le cas où $\alpha_{max} - \alpha_{min} = 1$ et montrons que $\nu(\alpha) = \alpha - \alpha_{min}$ pour tout $\alpha \in [\alpha_{min}, \alpha_{max}]$. En effet, vu la remarque précédente, nous savons que

$$\nu(\alpha) - \nu(\alpha') \geq \alpha - \alpha' \tag{1.1}$$

pour tous $\alpha \geq \alpha'$ dans $[\alpha_{min}, \alpha_{max}[$. On en tire que

$$1 \geq \nu(\alpha_{max}) \geq \nu(\alpha_{max}) - \nu(\alpha_{min}) \geq 1$$

d'où $\nu(\alpha_{min}) = 0$ et $\nu(\alpha_{max}) = 1$. Ainsi,

$$\nu(\alpha) \geq \alpha - \alpha_{min}$$

pour tout $\alpha \in [\alpha_{min}, \alpha_{max}]$.

Supposons qu'il existe $s \in]\alpha_{min}, \alpha_{max}[$ tel que

$$\nu(s) > s - \alpha_{min}.$$

Alors,

$$\nu(\alpha_{max}) - \nu(s) < 1 - s + \alpha_{min} = \alpha_{max} - s,$$

ce qui contredit la relation (1.1).

Nous avons donc obtenu que $\nu(\alpha) = \alpha - \alpha_{min}$ pour tout $\alpha \in [\alpha_{min}, \alpha_{max}]$. Au vu de l'exemple 1.2.25, il vient

$$S^\nu = \bigcap_{0<\varepsilon<1} b_{1,\infty}^{\alpha_{max}-\varepsilon}$$

Si S^ν est nucléaire, alors il existe $\varepsilon, \varepsilon'$ avec $0 < \varepsilon < \varepsilon' < 1$, tels que l'application

$$id : b_{1,\infty}^{\alpha_{max}-\varepsilon} \to b_{1,\infty}^{\alpha_{max}-\varepsilon'}$$

est nucléaire, d'où une contradiction par le lemme 1.6.5. $\square$

L'espace S^ν n'étant pas nucléaire, il est alors naturel de se demander s'il est de Schwartz. La proposition suivante répond par l'affirmative à cette question.

Proposition 1.6.9. *Si $p_0 = 1$, l'espace S^ν est de Schwartz.*

Démonstration. Puisque $p_0 = 1$, par la proposition 1.4.16, nous connaissons une famille dénombrable de normes qui engendrent la topologie de S^ν. Considérons tout d'abord les normes $\|.\|_{\alpha,\varepsilon}$ avec $\alpha \in [\alpha_{min}, \alpha_{max}[$ et $\varepsilon > 0$. Fixons $\alpha \in [\alpha_{min}, \alpha_{max}[$, $\varepsilon > 0$ et posons $s = \alpha + 1 - \nu(\alpha) - \varepsilon$. Soit U la boule unité correspondante. Puisque l'application

$$\alpha \mapsto \alpha - \nu(\alpha)$$

est continue à droite, il existe $\alpha^* > \alpha$ tel que

$$\alpha - \nu(\alpha) < \alpha^* - \nu(\alpha^*) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Si l'on pose $s^* = \alpha^* + 1 - \nu(\alpha^*) - \frac{\varepsilon}{2}$, nous avons dons $s < s^*$. Considérons la boule unité V correspondant à la norme $\|.\|_{\alpha^*,\frac{\varepsilon}{2}}$. Puisque $\alpha^* > \alpha$ et $s^* > s$, nous avons $V \subset U$.

Soit $\lambda > 0$. Comme $\alpha^* > \alpha$ et $s^* > s$, il existe $J \in \mathbb{N}_0$ tel que

$$\frac{2}{\lambda} \leq \inf\left\{2^{(s^*-s)J}, 2^{(\alpha^*-\alpha)J}\right\}.$$

Alors, si $\vec{x} \in V$, nous pouvons trouver $\vec{x}'$ et $\vec{x}''$ tels que $\vec{x} = \vec{x}' + \vec{x}''$ et

$$\sup_{j\geq J} 2^{(s-1)j} \sum_{k=0}^{2^j-1} |x'_{j,k}| + \sup_{j\geq J} \sup_{k\in\{0,\dots,2^j-1\}} 2^{\alpha j}|x''_{j,k}| \leq \frac{\lambda}{2}.$$

En effet, puisque $\|\vec{x}\|_{\alpha^*,\frac{\varepsilon}{2}} < 1$, il existe $\vec{x}', \vec{x}''$ tels que $\vec{x} = \vec{x}' + \vec{x}''$ et

$$\|\vec{x}'\|_{b^{s^*}_{1,\infty}} + \|\vec{x}''\|_{b^{\alpha^*}_{\infty,\infty}} \leq 1,$$

c'est-à-dire

$$\sup_{j\in\mathbb{N}} 2^{(s^*-1)j} \sum_{k=0}^{2^j-1} |x'_{j,k}| + \sup_{j\in\mathbb{N}} \sup_{k\in\{0,\dots,2^j-1\}} 2^{\alpha^* j}|x''_{j,k}| \leq 1.$$

De là, nous obtenons

$$\sup_{j\geq J} 2^{(s-1)j}2^{(s^*-s)j} \sum_{k=0}^{2^j-1} |x'_{j,k}| + \sup_{j\geq J} \sup_{k\in\{0,\dots,2^j-1\}} 2^{\alpha j}2^{(\alpha^*-\alpha)j}|x''_{j,k}| \leq 1,$$

et vu le choix de J, nous trouvons que

$$\sup_{j\geq J} 2^{(s-1)j} \sum_{k=0}^{2^j-1} |x'_{j,k}| + \sup_{j\geq J} \sup_{k\in\{0,\dots,2^j-1\}} 2^{\alpha j}|x''_{j,k}| \leq \frac{\lambda}{2}.$$

Considérons à présent l'espace de dimension finie des suites à indices $j < J$ et $k \in \{0, ..., 2^j - 1\}$, muni de la semi-norme $\|.\|_{\alpha,\varepsilon}$. Si nous considérons uniquement ces indices pour les éléments de V, nous obtenons un ensemble V^J borné. En effet, si $\vec{x}^J \in V^J \subset V$, vu ce qui précède, nous savons qu'il existe $\vec{x}', \vec{x}''$ tels que $\vec{x}^J = \vec{x}' + \vec{x}''$,

$$\|\vec{x}'\|_{b^{s^*}_{1,\infty}} + \|\vec{x}''\|_{b^{\alpha^*}_{\infty,\infty}} \leq 1$$

et

$$\sup_{j\geq J} 2^{(s-1)j} \sum_{k=0}^{2^j-1} |x'_{j,k}| + \sup_{j\geq J} \sup_{k\in\{0,\dots,2^j-1\}} 2^{\alpha j}|x''_{j,k}| \leq \frac{\lambda}{2}.$$

De plus, puisque $s < s^*$ et $\alpha < \alpha^*$,

$$\begin{aligned}
\sup_{j<J} 2^{(s-1)j} \sum_{k=0}^{2^j-1} |x'_{j,k}| + \sup_{j<J} \sup_{k\in\{0,\dots,2^j-1\}} 2^{\alpha j}|x''_{j,k}| &\leq \sup_{j<J} 2^{(s^*-1)j} \sum_{k=0}^{2^j-1} |x'_{j,k}| + \sup_{j<J} \sup_{k\in\{0,\dots,2^j-1\}} 2^{\alpha^* j}|x''_{j,k}| \\
&\leq \|\vec{x}'\|_{b^{s^*}_{1,\infty}} + \|\vec{x}''\|_{b^{\alpha^*}_{\infty,\infty}} \\
&\leq 1.
\end{aligned}$$

La dimension de l'espace étant finie, l'ensemble V^J y est par conséquent précompact. Soit M un ensemble fini de cet espace tel que

$$V^J \subset M + \frac{\lambda}{2}U.$$

Il s'ensuit que

$$V \subset M + \lambda U.$$

En effet, soit $\vec{x} \in V$. Nous savons que nous pouvons trouver $\vec{x}'$ et $\vec{x}''$ tels que $\vec{x} = \vec{x}' + \vec{x}''$ et

$$\sup_{j \geq J} 2^{(s-1)j} \sum_{k=0}^{2^j-1} |x'_{j,k}| + \sup_{j \geq J} \sup_{k \in \{0,\dots,2^j-1\}} 2^{\alpha j} |x''_{j,k}| \leq \frac{\lambda}{2}.$$

En séparant les indices $j < J$ des indices $j \geq J$, nous obtenons que

$$\begin{aligned} \vec{x} = \vec{x}' + \vec{x}'' \in V^J + \frac{\lambda}{2}U \quad &\subset \quad M + \lambda \left(\frac{1}{2}U + \frac{1}{2}U \right) \\ &\subset \quad M + \lambda U \end{aligned}$$

puisque U est absolument convexe.

Considérons à présent la norme $\|.\|_{b^{\alpha_{min}-\varepsilon}_{\infty,\infty}}$ pour $\varepsilon > 0$ et notons U la boule unité correspondante. Soit $\varepsilon^* > 0$ tel que $\varepsilon^* < \varepsilon$ et notons V la boule unité définie par la norme $\|.\|_{b^{\alpha_{min}-\varepsilon^*}_{\infty,\infty}}$. Vu le choix de ε^*, nous avons $V \subset U$.

Soit $\lambda > 0$. Il existe $J \in \mathbb{N}_0$ tel que

$$\frac{2}{\lambda} \leq 2^{(\varepsilon - \varepsilon^*)J}.$$

Par conséquent, si $\vec{x} \in V$,

$$\sup_{j \in \mathbb{N}} \sup_{k \in \{0,\dots,2^j-1\}} 2^{(\alpha_{min} - \varepsilon^*)j} |x_{j,k}| \leq 1$$

et puisque $2^{(\alpha_{min}-\varepsilon^*)j} = 2^{(\alpha_{min}-\varepsilon)j} 2^{(\varepsilon-\varepsilon^*)j}$, il vient

$$\sup_{j \in \mathbb{N}} \sup_{k \in \{0,\dots,2^j-1\}} 2^{(\alpha_{min} - \varepsilon)j} 2^{(\varepsilon-\varepsilon^*)j} |x_{j,k}| \leq 1,$$

d'où

$$\sup_{j \geq J} \sup_{k \in \{0,\dots,2^j-1\}} 2^{(\alpha_{min} - \varepsilon)j} |x_{j,k}| \leq \frac{\lambda}{2}.$$

En considérant l'ensemble V^J défini comme précédemment et en procédant de la même manière, nous trouvons un ensemble fini M de cet espace pour lequel

$$V^J \subset M + \frac{\lambda}{2}U.$$

Cela implique que

$$V \subset M + \lambda U.$$

En effet, si $\vec{x} \in V$, alors en séparant les indices $j < J$ des indices $j \geq J$, nous pouvons écrire $\vec{x} = \vec{x}^J + \vec{y}$ avec $\vec{x}^J \in V^J$ et $y_{j,k} = 0$ si $j < J$. Il existe alors $\vec{m} \in M$ et $\vec{u} \in U$ tels que

$$\vec{x}^J = \vec{m} + \frac{\lambda}{2}\vec{u}.$$

De plus, nous avons montré que

$$\sup_{j \geq J} \sup_{k \in \{0,\ldots,2^j-1\}} 2^{(\alpha_{min}-\varepsilon)j}|x_{j,k}| \leq \frac{\lambda}{2},$$

d'où $\vec{y} \in \frac{\lambda}{2}U$. Ainsi $\vec{y} = \frac{\lambda}{2}\vec{v}$ avec $\vec{v} \in U$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} \vec{x} &= \vec{m} + \frac{\lambda}{2}\vec{u} + \frac{\lambda}{2}\vec{v} \\ &= \vec{m} + \lambda\left(\frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}\right) \\ &\in M + \lambda U \end{aligned}$$

puisque l'ensemble U est absolument convexe. $\square$

Nous avons donc montré que dans le cas où $p_0 = 1$, l'espace S^ν est un espace de Schwartz mais non nucléaire. Nous obtenons alors "gratuitement" une série de propriétés que S^ν vérifie. Rappelons d'abord quelques définitions.

Définition 1.6.10. Soit $(E, \mathcal{T})$ un espace localement convexe séparé et $\mathcal{U}$ une base de voisinages absolument convexes de 0. L'espace $(E, \mathcal{T})$

- est *distingué* si son dual fort $(E', \beta(E', E))$ est tonnelé.
- est *semi-réflexif* si son bidual, défini comme étant le dual de l'espace $(E', \beta(E', E))$, est algébriquement égal à E lui-même.
- est *réflexif* si son bidual fort, défini comme étant le dual fort de l'espace $(E', \beta(E', E))$, est topologiquement égal à E lui-même.
- satisfait la *condition de densité* si pour tout $\lambda : \mathfrak{U}(E) \to \mathbb{R}^+\backslash\{0\}$ et tout $V \in \mathfrak{U}(E)$, il existe une partie finie $\mathbf{U}$ de $\mathfrak{U}(E)$ et $B \in \mathfrak{B}(E)$ tels que

$$\bigcap_{U \in \mathbf{U}} \lambda(U)U \subset B + V,$$

  où $\mathfrak{U}(E)$ désigne le système de tous les voisinages absolument convexes fermés de 0 de E et $\mathfrak{B}(E)$ le système de toutes les parties absolument convexes et bornées de E.
- *quasi-normable* si tout $U \in \mathcal{U}$ contient un $V \in \mathcal{U}$ tel que pour tout $\lambda > 0$, on peut trouver un ensemble borné $B \subset E$ tel que

$$V \subset B + \lambda U.$$

- est *semi-Montel* si tout borné de E est relativement compact.
- est *de Montel* si E est semi-Montel et tonnelé.

Dans le cas des espaces de Fréchet, les différentes relations existant entre ces propriétés peuvent être résumées par le schéma suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & & \text{Montel} \arrow[r] \arrow[dr] & \text{Réflexif} \arrow[dr] & \\
\text{Nucléaire} \arrow[r] & \text{Schwartz} \arrow[ur] \arrow[dr] & & & \text{Distingué} \\
 & & \text{Quasi-normable} \arrow[r] & \text{Condition de Densité} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

où $\to$ signifie "*implique*" (([10, 26, 27, 33]).

Nous obtenons donc immédiatement que lorsque $p_0 = 1$, l'espace S^ν est également de Montel, réflexif, distingué, quasi-normable et satisfait la condition de densité.

1.6.2 Cas $p_0 < 1$

Dans le cas où $p_0 < 1$, l'espace S^ν n'est pas localement convexe. Si nous voulons étudier les propriétés des espaces de Fréchet dans ce cadre, il nous faut auparavant généraliser ces notions aux cas des espaces vectoriels p-localement convexes ou localement pseudoconvexes seulement.

Définition 1.6.11. Un espace p-localement convexe séparé E est de Schwartz si tout voisinage absolument p-convexe U de 0 contient un voisinage absolument p-convexe V de 0 tel que pour tout $\lambda > 0$, il existe un ensemble fini $M \subset E$ tel que

$$V \subset M + \lambda U.$$

Au vu des résultats obtenus dans le cas $p_0 = 1$, il semble naturel de se demander si l'espace S^ν est de Schwartz lorsque son indice de convexité locale est inférieur à 1. La preuve 1.6.9 présentée dans la section 1.6.1 s'adapte facilement en utilisant les p_0 semi-normes données dans 1.4.16 lorsque $p_0 > 0$. Dans le cas où $p_0 = 0$, il faut cependant adopter une approche différente.

Définition 1.6.12. Un espace vectoriel topologique séparé E est de Schwartz si tout voisinage U de 0 contient un voisinage V de 0 tel que pour tout $\lambda > 0$, il existe un ensemble fini $M \subset E$ tel que

$$V \subset M + \lambda U.$$

Proposition 1.6.13. *Pour tout profil admissible ν, l'espace S^ν est de Schwartz.*

Démonstration. Soit U un voisinage de 0 dans S^ν. Alors il existe $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \{-\infty\} \cup [0,+\infty[$ et $\varepsilon > 0$ tels que

$$\left\{\vec{c} \in \mathrm{S}^\nu \ : d_{\alpha,\beta}(\vec{c},\vec{0}) < \varepsilon\right\} \subset U.$$

Supposons tout d'abord que $\beta \neq -\infty$. Soient $\alpha' > \alpha$, $\beta' < \beta$ et $s < \alpha_{min}$. Considérons le voisinage de 0 dans S^ν défini par

$$V = \left\{\vec{c} \in \mathrm{S}^\nu \ : d_{\alpha',\beta'}(\vec{c},\vec{0}) < \varepsilon\right\} \cap \left\{\vec{c} \in \mathrm{S}^\nu \ : \|\vec{c}\|_{C^s} < \varepsilon\right\}.$$

Puisque $\alpha' > \alpha$ et $\beta' < \beta$, nous savons par la proposition 1.3.12 que $d_{\alpha,\beta} \leq d_{\alpha',\beta'}$ et donc que $V \subset U$. Pour conclure, il suffit de montrer que V est précompact dans $E(\alpha,\beta)$. Comme cet espace est un espace métrique, il suffit de montrer que de toute suite de V, on peut extraire une sous-suite convergente dans $E(\alpha,\beta)$.

Soit $(\vec{c}^{(m)})_{m\in\mathbb{N}}$ une suite de V. Vu le choix de V, cette suite est ponctuellement bornée et on peut donc en extraire une sous-suite ponctuellement convergente. Notons-la également $(\vec{c}^{(m)})_{m\in\mathbb{N}}$ et notons $\vec{c}$ sa limite. Comme la suite $(\vec{c}^{(m)} - \vec{c})_{m\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $E(\alpha',\beta')$, il existe $R, R' > 0$ tels que pour tout $m \in \mathbb{N}$ et tout $j \in \mathbb{N}$,

$$\#\{k : |c_{j,k}^{(m)} - c_{j,k}| > R2^{-\alpha' j}\} \geq R'2^{\beta' j}.$$

Soit $\eta > 0$. Puisque $\alpha' > \alpha$ et $\beta' > \beta$, il existe $J \in \mathbb{N}$ tel que

$$R2^{-j\alpha'} = 2^{-j\alpha}\eta\frac{2^{-j(\alpha'-\alpha)}R}{\eta} \leq \eta 2^{-j\alpha}$$

et

$$R'2^{j\beta'} = R'2^{-j(\beta-\beta')}2^{j\beta} \leq \eta 2^{j\beta}$$

pour tout $j \geq J$. Ainsi, nous avons

$$\begin{aligned}\#\{k : |c_{j,k}^{(m)} - c_{j,k}| \geq \eta 2^{-\alpha j}\} &\leq \#\{k : |c_{j,k}^{(m)} - c_{j,k}| \geq R2^{-\alpha' j}\} \\ &\leq R'2^{j\beta'} \\ &\leq \eta 2^{j\beta}\end{aligned}$$

pour tous $m \in \mathbb{N}$ et $j \geq J$. La convergence ponctuelle donne ensuite $M \in \mathbb{N}$ tel que

$$|c_{j,k}^{(m)} - c_{j,k}| < \eta 2^{-j\alpha}$$

pour tous $m \geq M$, $j < J$ et $k \in \{0,...,2^j - 1\}$. Au total, on obtient donc

$$\#\{k : |c_{j,k}^{(m)} - c_{j,k}| \geq \eta 2^{-\alpha j}\} \leq \eta 2^{\beta j}$$

pour tous $j \in \mathbb{N}$ et $m \geq M$, ce qui suffit.

Si $\beta = -\infty$, on raisonne de la même façon en utilisant cette fois les espaces de Hölder C^α et $C^{\alpha'}$ où $\alpha' < \alpha$. □

Considérons maintenant une approche naïve similaire pour généraliser la notion de nucléarité au cas des espaces p-localement convexes.

Définition 1.6.14. Une application $S : E \to F$ entre espaces p-normés est p-nucléaire si il existe une suite $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ équicontinue de E', une suite $(y_m)_{m\in\mathbb{N}}$ bornée dans F et une suite de complexes $(\lambda_m)_{m\in\mathbb{N}}$ de $l^p(\mathbb{N})$ tels que pour tout $x \in E$,

$$S(x) = \sum_{m\in\mathbb{N}} \lambda_m u_m(x) y_m$$

où la série est convergente dans F.

Définition 1.6.15. Un espace p-localement convexe séparé E est p-nucléaire si pour tout voisinage absolument p-convexe U de 0, il existe un voisinage absolument p-convexe V de 0 absorbé par U tel que l'application canonique

$$\pi_{U,V} : E_{(V)} \to E_{(U)}$$

est p-nucléaire.

Néanmoins, comme le montre la proposition suivante, cette définition ne convient pas car si un espace est p-nucléaire, il est localement convexe.

Proposition 1.6.16. *Soit* $0 < p \leq 1$. *Si* E *est un espace* p*-localement convexe et* p*-nucléaire, alors* E *est localement convexe et nucléaire.*

Démonstration. Montrons que la topologie de E est engendrée par le système filtrant de semi-normes

$$\mathcal{P} = \{\sup_{m\in\mathbb{N}} |u_m| : (u_m)_{m\in\mathbb{N}} \text{ est une suite équicontinue de } E'\}.$$

Les suites formant les semi-normes étant équicontinues, la topologie engendrée par $\mathcal{P}$ est plus faible que la topologie de E.

Réciproquement, pour tout voisinage absolument p-convexe U de 0, il existe un voisinage absolument p-convexe V de 0 absorbé par U tel que l'application canonique

$$\pi_{U,V} : E_{(V)} \to E_{(U)}$$

est p-nucléaire. Ainsi, il existe une suite $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ équicontinue de $E'_{(V)}$, une suite $(y_m)_{m\in\mathbb{N}}$ bornée $E_{(U)}$ et une suite de complexes $(\lambda_m)_{m\in\mathbb{N}}$ de $l^p(\mathbb{N})$ tels que pour tout $x \in E_{(V)}$,

$$x = \sum_{m\in\mathbb{N}} \lambda_m u_m(x) y_m$$

où la série est convergente dans $E_{(U)}$. Pour tout $x \in E_{(V)}$, nous avons

$$\begin{aligned}
\|x\|_U^p &= \|\sum_{m\in\mathbb{N}} \lambda_m u_m(x) u_m\|_U^p \\
&\leq \sum_{m\in\mathbb{N}} |\lambda_m|^p |u_m(x)|^p \|y_m\|_U^p \\
&\leq C_1 \sup_{m\in\mathbb{N}} |u_m(x)|^p \sum_{m\in\mathbb{N}} |\lambda_m|^p \\
&\leq C_1 C_2 \sup_{m\in\mathbb{N}} |u_m(x)|^p
\end{aligned}$$

où les constantes C_1 et C_2 proviennent du fait que la suite $(y_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $E_{(U)}$ et que la série $\sum_{m\in\mathbb{N}} |\lambda_m|^p$ est convergente. Ceci prouve que l'espace est localement convexe. Puisque $l^p(\mathbb{N})$ est inclus dans $l^1(\mathbb{N})$ si $0 < p \leq 1$, nous obtenons également la nucléarité de l'espace E. □

Une autre généralisation de la notion de nucléarité au cas des espaces vectoriels topologiques, basée sur la notion de dimension diamétrale, est présentée dans [35]. Néanmoins, ce domaine reste jusqu'à présent peu connu et il serait intéressant d'étudier d'autres propriétés des espaces vectoriels topologiques (métrisables ou non) dans le cadre p-localement convexe ou localement pseudoconvexe.

Remarque 1.6.17. La dimension diamétrale d'un espace fournit une information concernant la "position" de cet espace entre "être de Schwartz" et "être nucléaire" ([26]). Dans [4], la dimension diamétrale des espaces S^{ν} a été calculée et les résultats montrent que cette dimension diamétrale est la même pour tous les espaces S^{ν}. Une étude des résultats existants dans le contexte de l'isomorphisme entre espaces ayant même dimension diamétrale afin de tenter de repérer les éléments pouvant être exploités dans le cadre des espaces S^{ν} serait donc intéressante. La question est toujours ouverte pour l'instant.

Chapitre 2

Dual des espaces de type S^ν

Dans ce chapitre, nous nous penchons sur la caractérisation du dual des espaces S^ν. Nous allons voir qu'il s'agit en fait d'une union d'espaces de suites du même type dépendant du profil admissible ν.

Etant donné la caractérisation du dual, il semble alors naturel de munir celui-ci de la topologie de la limite inductive. Dans le cas $p_0 = 1$, nous montrons que cette topologie coïncide avec la topologie forte sur le dual. La généralisation de ce résultat au cas $p_0 < 1$ est ensuite traitée sur base d'une note récente de J. Wengenroth et L. Frerick ([16]).

2.1 Caractérisation du dual

Définition 2.1.1. Soit E un espace vectoriel topologique. Le dual (topologique) E' de E est défini par

$$E' = \{T : E \to \mathbb{C} : T \text{ est linéaire et continu}\}.$$

Dans le cas d'espaces localement convexes de dimension supérieure ou égale à 1, le théorème de Hahn-Banach assure l'existence de fonctionnelles linéaires continues non-nulles. Ainsi, le dual d'un espace localement convexe de dimension supérieure ou égale à 1 n'est jamais réduit à $\{0\}$. Par contre, cela n'est pas toujours le cas pour les espaces vectoriels topologiques (par exemple, les espaces $L^p([0,1])$ avec $0 < p < 1$ [33]). Néanmoins, dans le chapitre 1, nous avons présenté une base de Schauder de l'espace S^ν. Le dual de cet espace n'est donc pas réduit à $\{0\}$ étant donné qu'il contient au moins les fonctionnelles linéaires continues $\varepsilon_{j,k}$ pour $j \in \mathbb{N}$ et $k \in \{0, ..., 2^j - 1\}$.

Pour caractériser le dual des espaces S^ν en tant qu'espaces de suites, nous procédons de la manière suivante. Notons $< .,. >$ le produit scalaire dans Ω, c'est-à-dire

$$< \vec{x}, \vec{y} >= \sum_{j\in\mathbb{N}} \sum_{k=0}^{2^j-1} x_{j,k} \overline{y_{j,k}}$$

pour tous $\vec{x}, \vec{y} \in \Omega$ pour lesquels cette série converge dans $\mathbb{C}$. Si $u \in (\mathrm{S}^\nu)'$, alors u peut être identifié à une suite $\vec{y} = (y_{j,k})_{j\in\mathbb{N}, k\in\{0,\ldots,2^j-1\}}$ telle que

$$u(\vec{x}) =< \vec{x}, \vec{y} >$$

pour tout $\vec{x} \in \mathrm{S}^\nu$. En effet, si l'on pose

$$\vec{y} = \sum_{j\in\mathbb{N}} \sum_{k=0}^{2^j-1} \overline{u(\vec{e}^{j,k})}\vec{e}^{j,k},$$

nous avons $u(\vec{x}) =< \vec{x}, \vec{y} >$ puisque la suite $(\vec{e}^{j,k})_{j\in\mathbb{N}, k\in\{0,\ldots,2^j-1\}}$ forme une base topologique de l'espace S^ν (voir 1.5.8).

Fixons une nouvelle notation :

$$\llbracket \beta \rrbracket = \begin{cases} -\infty & \text{si } \beta < 0 \\ \beta & \text{si } 0 \leq \beta \leq 1 \\ 1 & \text{si } \beta \geq 1 \end{cases}$$

Définition 2.1.2. Le profil dual de ν est la fonction ν' définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\nu' : \alpha' \mapsto \llbracket \alpha' + \inf\{\alpha : \nu(\alpha) - \alpha > \alpha'\} \rrbracket.$$

Remarque 2.1.3. Le profil dual ν' de ν est également un profil admissible ([2]).

Proposition 2.1.4. *Si ν' est le profil dual de ν, alors*

$$\alpha'_{min} = -\alpha_{min}$$

et

$$1 - \alpha_{max} \leq \alpha'_{max} \leq 1 - \alpha_{min}.$$

Démonstration. Montrons tout d'abord que $\alpha'_{min} = -\alpha_{min}$. Supposons que $\alpha' < -\alpha_{min}$. Alors $\alpha' + \alpha_{min} < 0$ et il existe $\alpha_0 > \alpha_{min}$ tel que $\alpha' + \alpha_0 < 0$. Comme $\alpha_0 > \alpha_{min}$, nous avons $\alpha' + \alpha_0 < 0 \leq \nu(\alpha_0)$. Par conséquent

$$\alpha' + \inf\{\alpha : \nu(\alpha) - \alpha > \alpha'\} \leq \alpha' + \alpha_0 < 0$$

et $\nu'(\alpha') = -\infty$. Ainsi

$$\nu'(\alpha') \geq 0 \Rightarrow \alpha' \geq -\alpha_{min}$$

et on conclut que $\alpha'_{min} \geq -\alpha_{min}$.

Soient à présent $\alpha' \geq -\alpha_{min}$ et α tel que $\nu(\alpha) - \alpha > \alpha'$. Alors $\nu(\alpha) \neq -\infty$ c'est-à-dire $\alpha \geq \alpha_{min}$. On en tire que

$$\alpha' + \alpha \geq \alpha' + \alpha_{min} \geq 0$$

d'où

$$\alpha' + \inf\{\alpha : \nu(\alpha) - \alpha > \alpha'\} \geq 0$$

et $\nu'(\alpha')$ est réel. Ainsi,

$$\alpha' \geq -\alpha_{min} \Rightarrow \nu'(\alpha') \geq 0$$

et $\alpha'_{min} \leq -\alpha_{min}$.

Passons maintenant à la deuxième partie. Supposons que $\alpha' \geq 1 - \alpha_{min}$ et soit α tel que $\nu(\alpha) - \alpha > \alpha'$. En particulier, on a $\alpha \geq \alpha_{min}$ et

$$\alpha' + \alpha \geq \alpha' + \alpha_{min} \geq 1$$

et par conséquent

$$\llbracket \alpha' + \inf\{\alpha : \nu(\alpha) - \alpha > \alpha'\} \rrbracket = 1.$$

Ainsi $\nu'(\alpha') = 1$ et donc $\alpha'_{max} \leq 1 - \alpha_{min}$.

D'autre part, si $\alpha' < 1 - \alpha_{max}$, il existe $\alpha_0 > \alpha_{max}$ tel que $\alpha' + \alpha_0 < 1$. Dans ce cas,

$$\nu(\alpha_0) - \alpha_0 = 1 - \alpha_0 > \alpha'$$

et par conséquent, il s'ensuit que

$$\alpha' + \inf\{\alpha : \nu(\alpha) - \alpha > \alpha'\} \leq \alpha' + \alpha_0 < 1$$

c'est-à-dire $\nu'(\alpha') < 1$ et donc $1 - \alpha_{max} \leq \alpha'_{max}$. □

Graphiquement, excepté pour les discontinuités et les points où la valeur 1 est atteinte, le graphique de ν' est obtenu par une symétrie horizontale du graphique de ν par rapport à l'axe $\beta = 2\alpha$. En effet, en ces points, nous avons que

$$\nu'(\alpha') = \nu(\alpha) \text{ si } \alpha' + \alpha = \nu(\alpha).$$

Si $(\alpha, \nu(\alpha))$ appartient au graphe de ν, son symétrique horizontal par rapport à l'axe $\beta = 2\alpha$ est donné par $(\nu(\alpha) - \alpha, \nu(\alpha))$. Ce point appartient bien au graphe de ν' puisque

$$(\nu(\alpha) - \alpha, \nu(\alpha)) = (\alpha', \nu'(\alpha'))$$

si $\alpha' + \alpha = \nu(\alpha)$.

Pour $\varepsilon > 0$, on pose

$$\nu'_\varepsilon(\alpha') := \nu'(\alpha' - \varepsilon) \quad \forall \alpha' \in \mathbb{R}$$

Avec ces notations, nous obtenons le théorème suivant, démontré dans [2]. Le dual de S^ν est ainsi identifié comme annoncé à un espace de suites.

Théorème 2.1.5. *Le dual topologique de* S^ν *est*

$$(\mathrm{S}^\nu)' = \bigcup_{\varepsilon > 0} S^{\nu'_\varepsilon}.$$

Remarque 2.1.6. Pour tout $\varepsilon > 0$, l'indice de convexité locale de $S^{\nu'_\varepsilon}$ est égal à 1. En effet, si $\alpha' \in [\alpha'_{min} + \varepsilon, \alpha'_{max} + \varepsilon[$, nous avons

$$\begin{aligned}
\underline{\partial}^+ \nu'_\varepsilon(\alpha') &= \liminf_{h\to 0^+} \frac{\nu'_\varepsilon(\alpha'+h) - \nu'_\varepsilon(\alpha')}{h}\\
&= \liminf_{h\to 0^+} \frac{\nu'(\alpha'-\varepsilon+h) - \nu'(\alpha'-\varepsilon)}{h}\\
&= \liminf_{h\to 0^+} \frac{h + \inf\{\alpha : \nu(\alpha)-\alpha > \alpha'-\varepsilon+h\} - \inf\{\alpha : \nu(\alpha)-\alpha > \alpha'-\varepsilon\}}{h}\\
&= 1.
\end{aligned}$$

Les espaces $S^{\nu'_\varepsilon}$ sont donc des espaces de Fréchet-Schwartz.

Remarque 2.1.7. Si $(\varepsilon_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de $]0, +\infty[$ qui tend vers 0, alors

$$(\mathrm{S}^\nu)' = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} S^{\nu'_{\varepsilon_m}}.$$

En effet, si $\vec{x} \in (\mathrm{S}^\nu)'$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\vec{x} \in S^{\nu'_\varepsilon}$. Comme la suite $(\varepsilon_m)_{m\in\mathbb{N}}$ décroît vers 0, il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $\varepsilon_m \leq \varepsilon$. Alors $\vec{c} \in S^{\nu'_{\varepsilon_m}}$. En effet, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$ et $C > 0$, il existe $J \in \mathbb{N}$ tel que

$$\#\{k : |c_{j,k}| \geq C2^{-\alpha j}|\} \leq 2^{(\nu'_\varepsilon(\alpha)+\delta)j}$$

pour tout $j \geq J$. Puisque ν' est croissant, nous avons

$$\nu'_\varepsilon(\alpha) = \nu'(\alpha - \varepsilon) \leq \nu'(\alpha - \varepsilon_m) = \nu'_{\varepsilon_m}(\alpha).$$

Ainsi

$$\#\{k : |c_{j,k}| \geq C2^{-\alpha j}|\} \leq 2^{(\nu'_{\varepsilon_m}(\alpha)+\delta)j}$$

pour tout $j \geq J$ et nous en tirons que $\vec{c} \in S^{\nu'_{\varepsilon_m}}$. L'autre inclusion est immédiate. Remarquons également que la suite $(S^{\nu'_{\varepsilon_m}})_{m\in\mathbb{N}}$ est croissante puisque $\nu'_m \leq \nu'_m$ si $n \geq m$.

2.2 Le dual fort des espaces de type S^ν

Dans la section précédente, le dual de l'espace S^ν a été algébriquement identifié à une union croissante d'espaces de Fréchet-Schwartz $S^{\nu'_{\varepsilon_m}}$ pour toute suite $(\varepsilon_m)_{m\in\mathbb{N}}$ qui décroît vers 0. Il est alors naturel de munir le dual de S^ν de la topologie de la limite inductive sur cette union. Rappelons-en la définition.

Définition 2.2.1. Soit $(E_m)_{m\in\mathbb{N}}$ une suite d'espaces vectoriels topologiques tels que $E_m \subset E_{m+1}$ pour tout $m \in \mathbb{N}$ et tels que chacune des inclusions $i_m : E_m \to E_{m+1}$ soit continue. La limite inductive de la suite $(E_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est l'espace vectoriel $E = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} E_m$ muni de la topologie la plus forte rendant les inclusions

$$I_m : E_m \to E$$

continues. Cet espace est noté $\underrightarrow{\mathrm{ind}}_m E_m$.

Une autre topologie naturelle dont on peut munir le dual E' d'un espace vectoriel topologique E est la topologie forte. Rappelons qu'il s'agit de la topologie de la convergence uniforme sur les bornés de E. Elle est notée $\beta(E', E)$ et l'espace E' muni de cette topologie est noté E'_b ou $(E', \beta(E', E))$.

Dans le cas des espaces de type S^ν, il est montré dans [2] que les injections canoniques

$$S^{\nu'_{\varepsilon_m}} \to (\mathrm{S}^\nu)'_b$$

sont continues pour tout $m \in \mathbb{N}$. Par conséquent, la limite inductive $\underrightarrow{\mathrm{ind}}_m S^{\nu'_{\varepsilon_m}}$ est toujours plus forte que la topologie forte sur le dual de S^ν. Nous aimerions savoir si ces deux topologies coïncident. Le résultat suivant répond à cette question dans le cas localement convexe.

Proposition 2.2.2. *Si $p_0 = 1$, alors $(\mathrm{S}^\nu)'_b = \underrightarrow{\mathrm{ind}}_m S^{\nu'_{\varepsilon_m}}$ topologiquement.*

Démonstration. L'application identité

$$(\mathrm{S}^\nu)'_b \to \underrightarrow{\mathrm{ind}}_m S^{\nu'_{\varepsilon_m}}$$

est une application linéaire à graphe fermé d'un espace ultrabornologique dans un espace à réseau. En effet, le dual fort d'un espace de Fréchet-Schwartz est ultrabornologique et toute limite inductive séparée est un espace à réseau. Puisque la topologie de la limite inductive $\underrightarrow{\mathrm{ind}}_m S^{\nu'_{\varepsilon_m}}$ est toujours plus forte que la topologie forte sur le dual de S^ν qui est une topologie séparée, il suffit alors d'appliquer le théorème du graphe fermé de De Wilde ([41]) pour conclure. □

Afin de traiter le cas $p_0 < 1$, nous allons à présent développer un résultat récent de J. Wengenroth et L. Frerick ([16]).

Définition 2.2.3. Un espace localement convexe E est appelé un espace (LB) s'il peut être représenté comme limite inductive d'un suite croissante d'espaces de Banach.

Dans la suite, pour toute partie non-vide A d'un espace vectoriel E, nous notons $\Gamma(A)$ l'enveloppe absolument convexe de A ; c'est l'intersection de toutes les parties absolument convexes de E qui contiennent A, donnée par

$$\Gamma(A) = \left\{ \sum_{j=1}^{J} \alpha_j a_j : J \in \mathbb{N}_0, a_j \in A, \alpha_j \in \mathbb{C}, \sum_{j=1}^{J} |\alpha_j| \leq 1 \right\}.$$

Lemme 2.2.4. *Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace vectoriel topologique et $\mathcal{U}$ une base de voisinages de 0. Notons $\mathcal{S}$ la topologie définie sur X par la base de voisinages de 0*

$$\{\Gamma(U) : U \in \mathcal{U}\}.$$

1. *Alors $\mathcal{S}$ est la plus fine topologie localement convexe sur X qui est plus faible que $\mathcal{T}$.*

2. Les espaces $(X, \mathcal{T})$ *et* $(X, \mathcal{S})$ *ont le même espace dual.*

Démonstration. Démontrons tout d'abord le premier point. Puisque la topologie $\mathcal{S}$ est définie à partir d'une base de voisinages absolument convexes de 0, l'espace $(X, \mathcal{S})$ est un espace localement convexe. De plus, la topologie est plus faible que $\mathcal{T}$ puisque $U \subset \Gamma(U)$ pour tout $U \in \mathcal{U}$. Enfin, si $\mathcal{S}'$ est une topologie localement convexe sur X plus faible que $\mathcal{T}$, alors pour tout voisinage absolument convexe V de 0 dans $(X, \mathcal{S}')$, il existe $U \in \mathcal{U}$ tel que

$$U \subset V$$

puisque $\mathcal{S}'$ est plus faible que $\mathcal{T}$. Du caractère absolument convexe de V, on obtient que

$$\Gamma(U) \subset V$$

et par conséquent, $\mathcal{S}$ est une topologie localement convexe plus fine que $\mathcal{S}'$.

Montrons à présent que $(X, \mathcal{T})$ et $(X, \mathcal{S})$ ont le même dual. En effet, d'une part, puisque $\mathcal{S}$ est plus faible que $\mathcal{T}$, le dual de X par rapport à $\mathcal{S}$ est inclus dans le dual de X par rapport à $\mathcal{T}$. De plus, si $x' : X \to \mathbb{C}$ est une application continue pour la topologie $\mathcal{T}$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $U \in \mathcal{U}$ tel que

$$|x'(u)| \leq \varepsilon \text{ pour tout } u \in U.$$

Alors, si $u \in \Gamma(U)$, il existe $u_1, ...u_N \in U$ et $\alpha_1, ..., \alpha_N \in \mathbb{C}$ tels que

$$u = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i u_i \text{ et } \sum_{i=1}^{N} |\alpha_i| \leq 1.$$

Par conséquent,

$$|x'(u)| \leq \sum_{i=1}^{N} |\alpha_i||x'(u_i)| \leq \varepsilon \sum_{i=1}^{N} |\alpha_i| \leq \varepsilon$$

et on en tire que x' est également continue pour la topologie $\mathcal{S}$ sur X. □

Rappelons que si E est un espace vectoriel topologique séparé, il existe un espace vectoriel topologique séparé complet $\hat{E}$ dans lequel E forme un sous-espace dense. Cet espace est unique à isomorphisme topologique près et on l'appelle le complété de E. Une base de voisinages de 0 du complété de E est donnée par l'ensemble des adhérences dans $\hat{E}$ des éléments d'une base de voisinages de 0 dans E. De plus, si F est un espace vectoriel complet et séparé, alors pour toute application linéaire continue $T : E \to F$, il existe une unique extension linéaire et continue $\hat{T} : \hat{E} \to F$ ([40, 27, 26, 45]).

Dans le cas localement convexe, le complété de E est également localement convexe et peut être construit de la manière suivante ([42]). Soit $\mathcal{P}$ un ensemble filtrant de semi-normes définissant la topologie de E. On dit que deux suites généralisées de Cauchy $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ et $(y_\alpha)_{\alpha \in A}$ sont équivalentes si pour tout $p \in \mathcal{P}$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha_0 \in A$ tel que

$$p(x_\alpha - y_\alpha) \leq \varepsilon \ \forall \alpha \geq \alpha_0.$$

Alors $\hat{E}$ est le quotient de

$$\{(x_\alpha)_{\alpha\in A} : (x_\alpha)_{\alpha\in A} \text{ est de Cauchy}\}$$

par cette relation d'équivalence, muni du système filtrant de semi-normes $\hat{\mathcal{P}} = \{\hat{p} : p \in \mathcal{P}\}$, où $\hat{p}$ est l'extension de p à $\hat{E}$. De plus, l'extension d'une application linéaire continue $T : E \to F$ est donnée par

$$\hat{T} : \hat{E} \to F : [(x_\alpha)_{\alpha\in A}] \mapsto \lim_{\alpha\in A} T(x_\alpha).$$

Lemme 2.2.5. *Un espace vectoriel topologique séparé et son complété ont le même espace dual.*

Démonstration. Soit E un espace vectoriel topologique séparé et $\hat{E}$ son complété. Si u est une application linéaire continue définie sur E, on sait que u s'étend de manière unique en une application linéaire continue $\hat{u}$ sur $\hat{E}$. Définissons l'application j par

$$j : E' \to \hat{E}' : u \mapsto \hat{u}.$$

Cette application est clairement injective. De plus, la restriction à E d'une fonctionnelle linéaire continue sur $\hat{E}$ est continue sur E, d'où la surjectivité. □

La proposition suivante est immédiate.

Proposition 2.2.6. *Soient E et F deux espaces localement convexes. Si $\mathcal{Q}$ désigne un système filtrant de semi-normes sur F, alors pour tout $q \in \mathcal{Q}$ et tout borné B de E,*

$$q_B : L(E,F) \to \mathbb{R} : T \mapsto \sup_{b\in B} q(T(b))$$

est une semi-norme sur $L(E,F)$. Pour toute famille filtrante $\mathfrak{S}$ de bornés de E,

$$Q_{\mathfrak{S}} = \{q_B : q \in \mathcal{Q}, B \in \mathfrak{S}\}$$

est un système filtrant de semi-normes sur $L(E,F)$.

Lemme 2.2.7. *Soit E un espace localement convexe séparé et soit $\mathfrak{S}$ un ensemble filtrant de parties bornées de E. La $\mathfrak{S}$-topologie sur E' coïncide avec la $\hat{\mathfrak{S}}$-topologie sur E', où $\hat{\mathfrak{S}}$ représente l'ensemble des adhérences dans $\hat{E}$ des ensembles de $\mathfrak{S}$.*

Démonstration. Si $B \in \mathfrak{S}$, alors $B \subset \bar{B}$ où l'adhérence est prise dans $\hat{E}$ et par conséquent

$$\sup_{b\in B} | < b, e' > | \leq \sup_{b\in \bar{B}} | < b, e' > |$$

pour tout $e' \in \mathcal{L}(E,F)$.

Réciproquement, si $\bar{B} \in \hat{\mathfrak{S}}$ et si $C > 0$ est tel que

$$\sup_{b \in B} | < b, e' > | \leq C,$$

alors

$$| < b, e' > | \leq C \ \forall b \in B$$

et par continuité,

$$| < b, e' > | \leq C \ \forall b \in \bar{B}.$$

Ainsi,

$$\sup_{b \in \bar{B}} | < b, e' > | \leq \sup_{b \in B} | < b, e' > |$$

et le lemme est démontré. □

Lemme 2.2.8. *Le complété d'un espace localement convexe séparé de Schwartz est un espace de Schwartz.*

Démonstration. La démonstration de ce lemme se trouve dans [26].

□

Lemme 2.2.9. *Soit F un sous-espace dense d'un espace vectoriel topologique métrisable E. Toute partie précompacte de E est incluse dans l'enveloppe absolument convexe fermée d'une suite de F qui converge vers* 0.

Démonstration. Soient E un espace vectoriel topologique métrisable et A un sous-ensemble précompact de E. Considérons une base de voisinages équilibrés $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de 0 dans E telle que $U_1 = E$ et

$$U_{n+1} + U_{n+1} \subset U_n \ \forall n \in \mathbb{N}\,.$$

Posons $A_0 = A$ et supposons que pour $n \geq 1$ fixé, un ensemble A_{n-1} précompact dans E a été construit. Il existe alors un sous-ensemble fini $N_n \subset A_{n-1}$ tel que

$$A_{n-1} \subset N_n + 2^{-n-1} U_{n+2}.$$

Pour tout $y \in N_n$, soit $x \in F$ tel que

$$y - x \in 2^{-n-1} U_{n+2}$$

et soit M_n le sous-ensemble fini de F contenant les éléments x obtenus de la sorte. Alors

$$\begin{array}{rcl} A_{n-1} & \subset & N_n + 2^{-n-1} U_{n+2} \\ & \subset & M_n + 2^{-n-1} U_{n+2} + 2^{-n-1} U_{n+2} \\ & \subset & M_n + 2^{-n-1} U_{n+1} \end{array}$$

et l'ensemble

$$A_n := (A_{n-1} - M_n) \cap 2^{-n-1} U_{n+1}$$

est précompact.

Soit $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite strictement croissante d'entiers tels que $k_0 = 0$ et $k_n - k_{n-1}$ est le nombre d'élements dans M_n pour tout $n \geq 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons

$$2^n M_n = \left\{x_{k_{n-1}+1}, ..., x_{k_n}\right\}.$$

Puisque U_{n+2} est équilibré et puisque $U_n + U_n \subset U_{n-1}$ pour tout $n \geq 1$, nous avons

$$\begin{aligned} M_n &\subset N_n + 2^{-n-1}U_{n+2} \\ &\subset A_{n-1} + 2^{-n-1}U_{n+2} \\ &\subset 2^{-n}U_n + 2^{-n-1}U_{n+2} \\ &\subset 2^{-n}U_n + 2^{-n}U_{n+2} \\ &\subset 2^{-n}U_n + 2^{-n}U_n \\ &\subset 2^{-n}U_{n-1}, \end{aligned}$$

et par conséquent, nous avons $2^n M_n \subset U_{n-1}$. En particulier, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de F définie ci-dessus converge vers 0 dans E.

Soit $a \in A$. Alors, il existe $m_1 \in M_1$ et $u_2 \in U_2$ tels que

$$a = m_1 + \frac{1}{4}u_2.$$

Puisque $a - m_1$ appartient à $(A_0 - M_1) \cap \frac{1}{4}U_2 = A_1$, nous trouvons $m_2 \in M_2$ et $u_3 \in U_3$ tels que

$$a = m_1 + m_2 + \frac{1}{8}u_3.$$

En continuant de la sorte, on obtient une suite $(m_i)_{i\geq 1}$ et une suite $(u_n)_{n\geq 2}$ telles que pour tout $n \geq 1$,

$$a = \sum_{i=1}^{n} m_i + 2^{-n-1}u_{n+1}.$$

Puisque la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ converge vers 0 dans E, la série $\sum_{i\geq 1} m_i$ converge vers a dans E. Pour tout $i \geq 1$, il existe $k_{i-1} < k(i) \leq k_i$ tel que $m_i = 2^{-i}x_{k(i)}$. Posons $\rho_i = 2^{-i}$ pour tout $i \geq 1$. Alors

$$a \in \overline{\Gamma}\left(\{x_n : n \in \mathbb{N}\}\right)$$

puisque la série $\sum_{i\geq 1} \rho_i x_{k(i)}$ converge vers a dans E, d'où la conclusion.

□

Lemme 2.2.10. *Si* $(E, \mathcal{T})$ *est un espace localement convexe métrisable de Schwartz et si* $(\hat{E}, \hat{\mathcal{T}})$ *est son complété, alors les topologies fortes* $\beta(E', (E, \mathcal{T}))$ *et* $\beta(E', (\hat{E}, \hat{\mathcal{T}}))$ *sur le dual coïncident.*

Démonstration. Si B est un borné de E, alors B est également un borné de $\hat{E}$ et la topologie forte sur le dual par rapport à E est plus faible que celle par rapport à $\hat{E}$. Réciproquement, considérons $\hat{B}$ un borné de $\hat{E}$ et montrons que $\hat{B}$ est inclus dans l'adhérence dans $\hat{E}$ d'un borné de E. L'espace E étant de Schwartz, le lemme 2.2.8 implique que $\hat{E}$ est un espace de Fréchet-Schwartz et par conséquent, de Montel. Puisque $\hat{B}$ y est borné, il est donc précompact dans $\hat{E}$. Etant donné que E est un sous-espace dense de $\hat{E}$, le lemme 2.2.9 implique qu'il est inclus dans l'enveloppe absolument convexe fermée d'une suite de E qui converge vers 0, ce qui suffit.

□

Nous pouvons à présent démontrer le résultat de L. Frerick et J. Wengenroth. Rappelons pour cela que nous notons A^{Δ} le polaire d'une partie non vide A d'un espace vectoriel topologique E, c'est-à-dire

$$A^{\Delta} = \{e' \in E' : \sup_{e \in A} | < e, e' > | \leq 1\}.$$

Proposition 2.2.11 (Frerick, Wengenroth)**.** *Le dual fort d'un espace vectoriel topologique de Schwartz métrisable est un espace (LB).*

Démonstration. Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace vectoriel topologique métrisable. Notons $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante formant une base de voisinages de 0. Supposons que $(X, \mathcal{T})$ est de Schwartz, c'est-à-dire

$$\forall n \in \mathbb{N} \ \exists m \geq n \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists E \subset X \text{ fini tel que } U_m \subset E + \varepsilon U_n.$$

On définit sur X la topologie $\mathcal{S}$ ayant comme base de voisinages de 0

$$\{\Gamma(U_n) : n \in \mathbb{N}\}.$$

Alors par le lemme 2.2.4, c'est la plus fine topologie localement convexe sur X qui est plus faible que $\mathcal{T}$ et les espaces $(X, \mathcal{T})$ et $(X, \mathcal{S})$ ont le même dual.

Nous allons à présent montrer que les topologies fortes sur le dual coïncident. Pour cela, montrons tout d'abord que toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de X qui converge vers 0 dans $(X, \mathcal{S})$ est contenue dans l'enveloppe absolument convexe d'une suite de X qui converge vers 0 dans $(X, \mathcal{T})$. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une telle suite. Alors

$$\forall n \in \mathbb{N} \ \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } x_m \in \Gamma(U_n) \ \forall m \geq N$$

et quitte à répéter chaque U_n un nombre fini de fois, on peut supposer que $x_n \in \Gamma(U_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On en tire qu'il existe $m_n \in \mathbb{N}$, $\lambda_{n,k} \in \mathbb{C}$ et $u_{n,k} \in U_n$ tels que

$$x_n = \sum_{k=1}^{m_n} \lambda_{n,k} u_{n,k} \text{ et } \sum_{k=1}^{m_n} |\lambda_{n,k}| \leq 1.$$

Si nous numérotons les éléments de la matrice $(u_{n,k})_{n\in\mathbb{N},k\in\{1,\ldots,m_n\}}$ en une suite $(y_m)_{m\in\mathbb{N}}$, celle-ci converge vers 0 dans $\mathcal{T}$ puisque $\forall n \in \mathbb{N}$

$$u_{m,k} \in U_n \ \forall m \geq n,$$

la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant décroissante. De plus, il est évident que

$$x_n \in \Gamma\left(\{y_m : m \in \mathbb{N}\}\right).$$

Remarquons ensuite que $(X, \mathcal{S})$ est encore un espace de Schwartz. En effet, si $n \in \mathbb{N}$, alors comme $(X, \mathcal{T})$ est de Schwartz, il existe $m \geq n$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partie finie E de X avec

$$U_m \subset \frac{\varepsilon}{2} U_n + E.$$

Alors, on a

$$\Gamma(U_m) \subset \Gamma\left(\frac{\varepsilon}{2} U_n + E\right) \subset \frac{\varepsilon}{2}\Gamma(U_n) + \Gamma(E).$$

Considérons $L => e : e \in E <$ muni de la semi-norme de Jauge associée à $\Gamma(U_n)$. Puisque L est un espace de dimension finie et puisque $\Gamma(E) \subset L$ y est borné, on en tire que $\Gamma(E)$ est précompact dans L. Par conséquent, il existe un sous-ensemble fini F de L tel que

$$\Gamma(E) \subset F + \frac{\varepsilon}{2}\Gamma(U_n).$$

Ainsi,

$$\Gamma(U_m) \subset \frac{\varepsilon}{2}\Gamma(U_n) + F + \frac{\varepsilon}{2}\Gamma(U_n) = \varepsilon\Gamma(U_n) + F$$

ce qui prouve que $(X, \mathcal{S})$ est de Schwartz. Par conséquent, il est semi-Montel et tout ensemble borné de $(X, \mathcal{S})$ est relativement compact. Ainsi, par le lemme 2.2.9, tout ensemble borné de $(X, \mathcal{S})$ est inclus dans l'enveloppe absolument convexe fermée d'une suite de X convergeant vers 0 dans $(X, \mathcal{S})$ et donc aussi dans l'enveloppe absolument convexe fermée d'une suite de X convergeant vers 0 dans $(X, \mathcal{T})$ vu ce qui a été montré auparavant. En particulier, tout ensemble borné de $(X, \mathcal{S})$ est inclus dans l'enveloppe absolument convexe d'un ensemble borné de $(X, \mathcal{T})$.

Nous pouvons à présent montrer que les topologies $\beta(X', (X, \mathcal{T}))$ et $\beta(X', (X, \mathcal{S}))$ coïncident. Soit $B^\vartriangle$ un voisinage de 0 pour la topologie $\beta(X', (X, \mathcal{S}))$, où B est un borné de $(X, \mathcal{S})$. Vu ce qui précède, il existe un borné A de $(X, \mathcal{T})$ tel que $B \subset \Gamma(A)$. Ainsi

$$A^\vartriangle = (\Gamma(A))^\vartriangle \subset B^\vartriangle$$

et $B^\vartriangle$ un voisinage de 0 pour la topologie $\beta(X', (X, \mathcal{T}))$. Réciproquement, si B est un borné de $(X, \mathcal{T})$, alors

$$B^\vartriangle = (\Gamma(B))^\vartriangle.$$

Puisque B est un borné de $(X, \mathcal{T})$, il est clair que $\Gamma(B)$ est un borné de $(X, \mathcal{S})$ et $B^\vartriangle$ est un voisinage de 0 pour la topologie $\beta(X', (X, \mathcal{S}))$.

Pour conclure, il suffit maintenant de se rappeler que le dual fort d'un espace localement convexe métrisable de Schwartz est un espace (LB). En effet, si $(X, \mathcal{S})$ est un espace localement convexe métrisable de Schwartz, alors par les lemmes 2.2.8, 2.2.5 et 2.2.10, son complété est un espace de Fréchet-Schwartz avec le même dual fort. Or, tout espace de Fréchet-Schwartz est distingué, et par conséquent, la topologie forte sur son dual coïncide avec la topologie de la limite inductive de ses espaces de Banach locaux.

□

Nous pouvons à présent revenir aux espaces de type S^ν. Nous avons déjà montré que le dual fort $(\mathrm{S}^\nu)'_b$ et la limite inductive $\underrightarrow{\mathrm{ind}}_m S^{\nu'_{\varepsilon_m}}$ coïncidaient dans le cas localement convexe. Il restait à traiter le cas $p_0 < 1$, ce qui est fait dans le résultat suivant.

Proposition 2.2.12. *Pour tout profil admissible ν, nous avons $(\mathrm{S}^\nu)'_b = \underrightarrow{\mathrm{ind}}_m S^{\nu'_{\varepsilon_m}}$ topologiquement.*

Démonstration. Nous savons déjà que la topologie de la limite inductive sur le dual est plus forte que la topologie forte sur ce même dual. Pour montrer l'équivalence, considérons l'application identité

$$(\mathrm{S}^\nu)'_b \to \underrightarrow{\mathrm{ind}}_m S^{\nu'_{\varepsilon_m}}$$

qui est trivialement à graphe fermé. Par les propositions 1.6.13 et 2.2.11, nous savons que le dual fort de l'espace S^ν est un espace (LB). Or toute limite inductive d'espaces de Banach est ultrabornologique. De plus, toute limite inductive séparée est un espace à réseau. Le résultat découle alors du théorème du graphe fermé de De Wilde. □

2.3 Amélioration du résultat concernant le dual fort

La question que nous nous posons dans cette section est de savoir s'il est possible de diminuer les hypothèses présentées dans la proposition 2.2.11. En effet, afin d'identifier le dual fort de S^ν avec la topologie de la limite inductive, il suffit de montrer que le dual fort $(\mathrm{S}^\nu)'_b$ est ultrabornologique. Le théorème du graphe fermé de De Wilde permet alors de conclure.

Dans le cas d'un espace localement convexe métrisable, il est connu que le dual fort est ultrabornologique si et seulement si il est tonnelé ([26]). Le but est de généraliser cette caractérisation au cas des espaces vectoriels topologiques. Comme tout espace ultrabornologique est tonnelé, la question est de savoir si le dual fort d'un espace vectoriel topologique métrisable et distingué est ultrabornologique.

Lemme 2.3.1. *Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace vectoriel topologique métrisable et distingué. Notons $\mathcal{U}$ une base de voisinages de 0 et définissons sur X la topologie $\mathcal{S}$ ayant comme base de voisinages de 0*

$$\{\Gamma(U) : U \in \mathcal{U}\}.$$

Alors les duaux forts de $(X, \mathcal{T})$ et $(X, \mathcal{S})$ coïncident.

Démonstration. Par le lemme 2.2.4, nous savons que les espaces $(X, \mathcal{T})$ et $(X, \mathcal{S})$ ont le même dual. Il reste à montrer que les topologies fortes sur le dual $\beta(X', (X, \mathcal{T}))$ et $\beta(X', (X, \mathcal{S}))$ coïncident.

Soit B un borné de $(X, \mathcal{T})$. Alors, il est clair que $\Gamma(B)$ est un borné de $(X, \mathcal{S})$ et $B^\vartriangle = (\Gamma(B))^\vartriangle$ est un voisinage de 0 pour la topologie $\beta(X', (X, \mathcal{S}))$.

Réciproquement, soit B un borné de $(X, \mathcal{S})$. Comme l'espace $(X, \mathcal{T})$ est distingué, pour prouver que $B^\vartriangle$ est un voisinage de 0 dans $(X', \beta(X', (X, \mathcal{T}))$, il suffit de montrer que c'est un tonneau. Il est clairement absolument convexe. De plus, $B^\vartriangle$ est absorbant car B est borné. Enfin, montrons que $B^\vartriangle$ est un fermé de $(X', \beta(X', (X, \mathcal{T}))$. Puisque

$$B^\vartriangle = \bigcap_{b \in B} \{b\}^\vartriangle,$$

on en tire que $B^\vartriangle$ est un fermé de X' muni de la topologie simple $\sigma(X', X)$. C'est donc un fermé de X' pour toute topologie plus forte que la topologie simple. En particulier, $B^\vartriangle$ est fermé dans $(X', \beta(X', (X, \mathcal{T}))$. Il s'ensuit que $B^\vartriangle$ est un tonneau de $(X', \beta(X', (X, \mathcal{T}))$, d'où l'équivalence des topologies sur X'.

□

Dans le cas d'un espace localement convexe métrisable, nous savons que le dual fort est complet. Le corollaire suivant montre que dans le cas non localement convexe, ce résultat reste valide si l'on suppose que l'espace est de plus distingué.

Corollaire 2.3.2. *Si* $(X, \mathcal{T})$ *est un espace vectoriel topologique métrisable et distingué, son dual fort est complet.*

Démonstration. Notons $\mathcal{U}$ une base de voisinages de 0 dans $(X, \mathcal{T})$ et définissons sur X la topologie $\mathcal{S}$ ayant comme base de voisinages de 0

$$\{\Gamma(U) : U \in \mathcal{U}\}.$$

Par le lemme 2.3.1, l'espace $(X, \mathcal{S})$ est un espace localement convexe métrisable qui a le même dual fort que $(X, \mathcal{T})$. Comme le dual fort d'un espace localement convexe métrisable est complet, $(X', \beta(X', (X, \mathcal{S}))$ est complet. Puisque $(X', \beta(X', (X, \mathcal{T}))$ est tonnelé, l'égalité des duaux forts permet de conclure. □

Proposition 2.3.3. *Le dual fort d'un espace vectoriel topologique métrisable et distingué est un espace (LB).*

Démonstration. Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace vectoriel topologique métrisable et distingué. Par le lemme 2.3.1, son dual fort coïncide avec le dual fort d'un espace localement convexe métrisable. Il s'ensuit que $(X', \beta(X', (X, \mathcal{T}))$ est ultrabornologique. C'est donc un espace (LB).

□

Remarque 2.3.4. Remarquons que si un espace vectoriel topologique métrisable est de Schwartz, la proposition 2.2.11 montre que son dual fort est un espace (LB). Cet espace est donc en particulier distingué. Par conséquent, la proposition que nous venons de démontrer est plus forte que le résultat 2.2.11.

Chapitre 3

Prévalence

3.1 Introduction

Dans $\mathbb{R}^n$, il est généralement accepté qu'une propriété est vérifiée presque partout si l'ensemble des points où cette propriété n'est pas vérifiée a une mesure de Lebesgue nulle. Nous aimerions généraliser cette notion de "presque partout" au cas des espaces de dimension infinie, tels que les espaces C^k ou L^p. Lors de cette généralisation, nous voulons garder certaines propriétés des ensembles ayant une mesure de Lebesgue nulle :

1. Un ensemble de mesure nulle est d'intérieur vide.
2. Tout sous-ensemble d'un ensemble de mesure nulle est de mesure nulle.
3. Toute union dénombrable d'ensembles de mesures nulles est de mesure nulle.
4. Tout translaté d'un ensemble de mesure nulle est de mesure nulle.

Nous pourrions essayer de définir la notion de "presque partout" sur un espace de dimension infinie en termes d'une mesure spécifique. La mesure de Lebesgue étant invariante par translation et localement finie, il semble naturel d'essayer de trouver une mesure jouissant également de ces propriétés.

Proposition 3.1.1. *Soit μ une mesure non-nulle définie sur les boréliens d'un espace séparable de Banach E de dimension infinie. Si la mesure μ est invariante par translation, alors pour tout ouvert U de E, $\mu(U) = \infty$.*

Démonstration. En effet, supposons que la boule ouverte B de rayon $\varepsilon > 0$ a une mesure finie. Comme l'espace est de dimension infinie, on peut construire une infinité de boules ouvertes disjointes de rayon $\frac{\varepsilon}{4}$ contenues dans la boule de départ. Toutes ces boules ont la même mesure puisque la mesure considérée est invariante par translation. Soit $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de telles boules. Alors

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \subset B$$

et la somme des mesures des boules B_n est finie. Par conséquent, elles doivent être de mesure nulle. Comme l'espace est séparable, il peut être recouvert par une union dénombrable de boules de rayon $\frac{\varepsilon}{4}$ et l'espace est donc de mesure nulle, d'où une contradiction. □

Ainsi, la seule mesure borélienne localement finie et invariante par translation d'un espace de Banach séparable de dimension infinie est la mesure triviale $\mu(B) = 0$ pour tout borélien B.

Remarque 3.1.2. Si l'espace E n'est pas séparable et si μ est une mesure borélienne sur E localement finie et invariante par translation, nous avons quand même obtenu des ouverts de mesure nulle, ce qui contredit la propriété 1 que nous voulions conserver.

En l'absence d'une mesure raisonnable qui est invariante par translation sur un espace de dimension infinie, nous pouvons au moins espérer avoir une mesure qui satisfait la propriété 4. Une telle mesure est dite *quasi-invariante*. Malheureusement, nous nous heurtons encore à un problème comme le montre la proposition suivante.

Proposition 3.1.3. *Considérons une mesure définie sur les boréliens d'un espace localement convexe E de dimension infinie. Si cette mesure est σ-finie et quasi-invariante, alors elle est identiquement nulle.*

Démonstration. La preuve de cette proposition peut être trouvée dans [44]. □

Plutôt que de chercher un analogue partiel à la mesure de Lebesgue pour les espaces de dimension infinie, Hunt, Sauer et Yorke cherchèrent une autre caractérisation de la propriété "avoir une mesure de Lebesgue nulle" qui admet une extension naturelle aux espaces de dimension infinie ([20]).

Dans $\mathbb{R}^n$, notons $\mathbb{B}^n$ la classe de Borel de $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{L}$ la mesure de Lebesgue et considérons la classe des mesures de probabilité sur les boréliens à support compact, c'est-à-dire les mesures μ pour lesquelles il existe un compact K de $\mathbb{R}^n$ tel que

$$\mu(K) = \mu(\mathbb{R}^n) = 1.$$

Proposition 3.1.4. *Soit S un ensemble borélien de $\mathbb{R}^n$. Alors $\mathcal{L}(S) = 0$ si et seulement si il existe une mesure de probabilité μ à support compact définie sur $\mathbb{B}^n$ telle que*

$$\mu(S + x) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^n .$$

Cette caractéristique des ensembles boréliens de $\mathbb{R}^n$ sera démontrée plus tard (proposition 3.3.16).

Etant donné une mesure de probabilité μ à support compact, on peut définir une mesure $\tilde{\mu}$ invariante par translation en posant

$$\tilde{\mu}(S) = \begin{cases} 0 & \text{si tout translaté de } S \text{ est de mesure nulle pour } \mu \\ \infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ce que la proposition ci-dessus montre est que toute mesure de la sorte est plus grande ou égale à $\mathcal{L}$ sur $\mathbb{B}^n$. Ainsi, une manière de montrer qu'un borélien est petit, dans un sens d'invariance par translation, est de montrer qu'il existe une mesure de probabilité μ à support compact telle que $\tilde{\mu}(S) = 0$. Une telle stratégie est possible dans les espaces de dimension infinie car il est facile de trouver des mesures de probabilité à support compact.

3.2 Produit de mesures

Dans cette section, nous présentons quelques résultats importants sur les produits infinis de mesures qui nous seront utiles par la suite.

Soient $((X_\alpha, \mathcal{A}_\alpha))_{\alpha \in A}$ une famille d'espaces mesurables et $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$. Considérons l'espace mesurable

$$\left(X, \bigotimes_{\alpha \in A} \mathcal{A}_\alpha\right),$$

où $\bigotimes_{\alpha \in A} \mathcal{A}_\alpha$ est la σ-algèbre produit engendrée par les σ-algèbres $\mathcal{A}_\alpha$, c'est-à-dire la plus petite σ-algèbre sur X pour laquelle les projections

$$\pi_{\alpha_0} : X \to X_{\alpha_0} : (x_\alpha)_{\alpha \in A} \mapsto x_{\alpha_0}$$

sont mesurables.

Dans la suite, nous appelerons *partie élémentaire* de X tout sous-ensemble de X de la forme

$$\prod_{\alpha \in A} A_\alpha$$

où $A_\alpha \in \mathcal{A}_\alpha$ pour tout $\alpha \in A$ et $A_\alpha = X_\alpha$ sauf pour un nombre fini d'indices. Notons $\mathcal{E}$ l'ensemble des parties élémentaires de X.

Définition 3.2.1. Soient X un ensemble quelconque et $\mathcal{F}$ une famille de sous-ensembles de X. La plus petite σ-algèbre sur X contenant $\mathcal{F}$ est appelée la σ-algèbre engendrée par $\mathcal{F}$ et est notée $\sigma(\mathcal{F})$.

Proposition 3.2.2. *Soit $((X_\alpha, \mathcal{A}_\alpha))_{\alpha \in A}$ une famille d'espaces mesurables. Alors*

$$\bigotimes_{\alpha \in A} \mathcal{A}_\alpha = \sigma(\mathcal{E}).$$

Démonstration. Si $E \in \mathcal{E}$, il existe une partie finie A_1 de A et des éléments $A_\alpha \in \mathcal{A}_\alpha$ pour tout $\alpha \in A_1$ tels que

$$E = \prod_{\alpha \in A} E_\alpha$$

où $E_\alpha = A_\alpha$ si $\alpha \in A_1$ et $E_\alpha = X_\alpha$ sinon. Alors

$$E = \prod_{\alpha \in A} E_\alpha = \bigcap_{\alpha \in A} \pi_\alpha^{-1}(E_\alpha) = \bigcap_{\alpha \in A_0} \pi_\alpha^{-1}(A_\alpha) \in \bigotimes_{\alpha \in A} \mathcal{A}_\alpha$$

puisque l'intersection est finie. Ainsi

$$\sigma(\mathcal{E}) \subset \bigotimes_{\alpha \in A} \mathcal{A}_\alpha.$$

Réciproquement, il suffit de montrer que toute projection est mesurable pour $\sigma(\mathcal{E})$. Soient $\alpha_0 \in A$ et $A_{\alpha_0} \in \mathcal{A}_{\alpha_0}$. Nous avons

$$\pi_{\alpha_0}^{-1}(A_{\alpha_0}) = \prod_{\alpha \in A} B_\alpha$$

où $B_{\alpha_0} = A_{\alpha_0}$ et $B_\alpha = X_\alpha$ si $\alpha \neq \alpha_0$. Par conséquent, $\pi_{\alpha_0}^{-1}(A_{\alpha_0}) \in \mathcal{E}$, d'où la conclusion. □

Pour toute partie finie A_0 de A, notons $\mathcal{B}_{A_0}$ l'ensemble des éléments de la forme

$$\left(\prod_{\alpha \in A \setminus A_0} X_\alpha \right) \times E$$

où E appartient à l'algèbre engendrée sur $\prod_{\alpha \in A_0} X_\alpha$ par

$$\left\{ \prod_{\alpha \in A_0} A_\alpha : A_\alpha \in \mathcal{A}_\alpha \ \forall \alpha \in A_0 \right\}.$$

Vu la proposition précédente, nous avons

$$\sigma\left(\mathcal{B}_{A_0}\right) = \left\{ \left(\prod_{\alpha \in A \setminus A_0} X_\alpha \right) \times E : E \in \bigotimes_{\alpha \in A_0} \mathcal{A}_\alpha \right\}.$$

Lemme 3.2.3. *Si $\mathcal{A}$ désigne l'algèbre engendrée par $\mathcal{E}$, alors*

$$\mathcal{A} = \bigcup_{A_0 \subset A, A_0 \textit{ fini}} \mathcal{B}_{A_0}.$$

Démonstration. Il est clair que si A_0 est une partie finie de A, alors $\mathcal{B}_{A_0}$ est une algèbre sur X. De plus, si $A_0 \subset A_1$ sont deux parties finies de A, on a

$$\mathcal{B}_{A_0} \subset \mathcal{B}_{A_1}.$$

Par conséquent, $\bigcup_{A_0 \subset A, A_0 \text{ fini}} \mathcal{B}_{A_0}$ est une algèbre sur X. De plus, elle contient $\mathcal{E}$, d'où

$$\mathcal{A} \subset \bigcup_{A_0 \subset A, A_0 \text{ fini}} \mathcal{B}_{A_0}.$$

D'autre part, pour toute partie finie A_0 de A, $\mathcal{B}_{A_0} \subset \mathcal{A}$, ce qui conclut la preuve.

□

Si $((X_\alpha, \mathcal{A}_\alpha, \mu_\alpha))_{\alpha\in A}$ est une famille d'espaces mesurés, nous aimerions définir une mesure μ sur $(X, \bigotimes_{\alpha\in A} \mathcal{A}_\alpha)$ telle que

$$\mu\left(\prod_{\alpha\in A} A_\alpha\right) = \prod_{\alpha\in A} \mu_\alpha(A_\alpha)$$

pour tout ensemble élémentaire $\prod_{\alpha\in A} A_\alpha$ de X. Afin que le produit ci-dessus soit bien défini, nous allons supposer que pour tout $\alpha \in A$, μ_α est une mesure de probabilité sur X_α.

Remarque 3.2.4. Soit X un ensemble arbitraire. Rappelons qu'une collection de sous-ensembles de X est un π-système sur X si elle est stable pour l'intersection finie. Il est connu que si deux mesures finies définies sur un espace mesurable $(X, \mathcal{A})$ sont égales sur X et sur les éléments d'un π-système engendrant $\mathcal{A}$, elles sont égales partout ([36]).

Lemme 3.2.5. *Soient $((X_\alpha, \mathcal{A}_\alpha, \mu_\alpha))_{\alpha\in A}$ une famille d'espaces probabilisés et $X = \prod_{\alpha\in A} X_\alpha$. Il existe une mesure finiment additive μ définie sur l'algèbre $\mathcal{A}$ engendrée par $\mathcal{E}$ telle que*

$$\mu\left(\prod_{\alpha\in A} A_\alpha\right) = \prod_{\alpha\in A} \mu_\alpha(A_\alpha)$$

pour tout ensemble élémentaire $\prod_{\alpha\in A} A_\alpha$ de X.

Démonstration. Pour toute partie A_0 finie de A, la théorie des produits finis de mesures assure l'existence d'une mesure μ_{A_0} définie sur $\left(\prod_{\alpha\in A_0} X_\alpha, \bigotimes_{\alpha\in A_0} \mathcal{A}_\alpha\right)$ telle que

$$\mu_{A_0}\left(\prod_{\alpha\in A_0} A_\alpha\right) = \prod_{\alpha\in A_0} \mu_\alpha(A_\alpha)$$

pour tous $A_\alpha \in \mathcal{A}_\alpha$, $\alpha \in A_0$. Définissons l'application μ^{A_0} sur $\sigma(\mathcal{B}_{A_0})$ par

$$\mu^{A_0}\left(\left(\prod_{\alpha\in A\setminus A_0} X_\alpha\right) \times E\right) = \mu_{A_0}(E).$$

Il est clair que μ^{A_0} est une mesure finie sur $\sigma(\mathcal{B}_{A_0})$.

Remarquons que si $A_1 \subset A_0$ et si $A_\alpha \in \mathcal{A}_\alpha$ pour tout $\alpha \in A_1$, alors

$$\begin{aligned}\mu^{A_0}\left(\left(\prod_{\alpha\in A\setminus A_1} X_\alpha\right) \times \left(\prod_{\alpha\in A_1} A_\alpha\right)\right) &= \mu_{A_0}\left(\left(\prod_{\alpha\in A_0\setminus A_1} X_\alpha\right) \times \left(\prod_{\alpha\in A_1} A_\alpha\right)\right) \\ &= \prod_{\alpha\in A_0\setminus A_1} \mu_\alpha(X_\alpha) \cdot \prod_{\alpha\in A_1} \mu_\alpha(A_\alpha)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \prod_{\alpha\in A_1} \mu_\alpha(A_\alpha)\\
&= \mu_{A_1}\left(\prod_{\alpha\in A_1} A_\alpha\right)\\
&= \mu^{A_1}\left(\left(\prod_{\alpha\in A\setminus A_1} X_\alpha\right)\times\left(\prod_{\alpha\in A_1} A_\alpha\right)\right).
\end{aligned}
$$

Vu la remarque 3.2.4, on en tire que

$$\mu^{A_0}(B) = \mu^{A_1}(B)$$

pour tout $B \in \sigma(\mathcal{B}_{A_1})$. Ainsi, si A_1, A_2 sont deux parties finies de A et si $B \in \sigma(\mathcal{B}_{A_1}) \cap \sigma(\mathcal{B}_{A_2})$, alors

$$\mu^{A_1}(B) = \mu^{A_1\cup A_2}(B) = \mu^{A_2}(B).$$

En particulier, si A_1, A_2 sont deux parties finies de A et si $B \in \mathcal{B}_{A_1} \cap \mathcal{B}_{A_2}$, alors

$$\mu^{A_1}(B) = \mu^{A_1\cup A_2}(B) = \mu^{A_2}(B).$$

Il s'ensuit par le lemme 3.2.3 que l'application μ définie par

$$\mu(B) = \mu^{A_0}(B) \text{ si } B \in \mathcal{B}_{A_0} \text{ où } A_0 \subset A \text{ est fini.}$$

est bien définie sur $\mathcal{A}$.

Montrons que μ est finiment additif. Soient B_1 et B_2 deux éléments disjoints de $\mathcal{A}$. Alors, par le lemme 3.2.3, il existe deux parties finies A_1, A_2 de A telles que $B_1 \in \mathcal{B}_{A_1}$ et $B_2 \in \mathcal{B}_{A_2}$. Si $A_0 = A_1 \cup A_2$, alors B_1 et B_2 appartiennent à $\mathcal{B}_{A_0}$. Il existe donc des ensembles C_1 et C_2 dans l'algèbre engendrée sur $\prod_{\alpha\in A_0} X_\alpha$ par $\left\{\prod_{\alpha\in A_0} A_\alpha : A_\alpha \in \mathcal{A}_\alpha\ \forall\alpha\in A_0\right\}$ tels que

$$B_1 = \left(\prod_{\alpha\in A\setminus A_0} X_\alpha\right)\times C_1 \quad , \quad B_2 = \left(\prod_{\alpha\in A\setminus A_0} X_\alpha\right)\times C_2.$$

Par conséquent,

$$
\begin{aligned}
\mu(B_1\cup B_2) &= \mu^{A_0}\left(\left(\prod_{\alpha\in A\setminus A_0} X_\alpha\right)\times (C_1\cup C_2)\right)\\
&= \mu_{A_0}(C_1\cup C_2)\\
&= \mu_{A_0}(C_1) + \mu_{A_0}(C_2)\\
&= \mu(B_1) + \mu(B_2).
\end{aligned}
$$

Le lemme est ainsi démontré. □

Remarque 3.2.6. Soient $((X_\alpha, \mathcal{A}_\alpha, \mu_\alpha))_{\alpha\in A}$ une famille d'espaces probabilisés, $X = \prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ et μ la mesure finiment additive définie comme dans la démonstration du lemme ci-dessus. Si A_0 est une partie finie de A, on pose

$$\mu_{A_0}(E) = \mu\left(\left(\prod_{\alpha\in A\setminus A_0} X_\alpha\right) \times E\right)$$

pour tout $E \in \bigotimes_{\alpha\in A_0} \mathcal{A}_\alpha$. Vu la construction de μ, μ_{A_0} est une mesure sur l'espace mesurable $\left(\prod_{\alpha\in A_0} X_\alpha, \bigotimes_{\alpha\in A_0} \mathcal{A}_\alpha\right)$ telle que

$$\mu_{A_0}\left(\prod_{\alpha\in A_0} A_\alpha\right) = \prod_{\alpha\in A_0} \mu_\alpha(A_\alpha)$$

pour tous $A_\alpha \in \mathcal{A}_\alpha$, $\alpha \in A_0$. C'est la mesure produit

$$\prod_{\alpha\in A_0} \mu_\alpha.$$

Jusqu'à présent, nous avons construit une mesure finiment additive sur l'algèbre engendrée par $\mathcal{E}$ qui satisfait la propriété souhaitée. Afin d'étendre cette mesure à la σ-algèbre engendrée par $\mathcal{E}$, nous aurons besoin de la proposition suivante.

On désigne par *mesure dénombrablement additive* sur une algèbre $\mathcal{A}$ toute mesure μ finiment additive sur $\mathcal{A}$ telle que pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments deux à deux disjoints de $\mathcal{A}$ dont l'union appartient à $\mathcal{A}$, nous avons

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n).$$

Proposition 3.2.7. *Soient X un ensemble quelconque, $\mathcal{A}$ une algèbre sur X et une mesure dénombrablement additive $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$. Pour tout $A \subset X$, posons*

$$\mu^*(A) = \inf\left\{\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) : A_n \in \mathcal{A}\ \forall n \in \mathbb{N}, A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right\}.$$

Alors μ^* est une mesure extérieure sur X, tout ensemble de $\mathcal{A}$ est μ^*-mesurable et

$$\mu^*(A) = \mu(A)$$

pour tout $A \in \mathcal{A}$.

Démonstration. Montrons tout d'abord que μ^* est une mesure extérieure sur X. Il est clair que $\mu^*(\emptyset) = 0$ et que si $A \subset B$, $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$. Soient $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'ensembles de

X, $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ et $\varepsilon > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, considérons une suite $(A_{n,m})_{m\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{A}$ tels que $A_n \subset \bigcup_{m\in\mathbb{N}} A_{n,m}$ et

$$\sum_{m\in\mathbb{N}} \mu(A_{n,m}) \leq \mu^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}.$$

Alors $A \subset \bigcup_{m,n\in\mathbb{N}} A_{n,m}$ et donc

$$\mu^*(A) \leq \sum_{m,n\in\mathbb{N}} \mu(A_{n,m}) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(A_n) + \varepsilon.$$

Puisque $\varepsilon > 0$ est arbitraire, on obtient que

$$\mu^*(A) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(A_n)$$

et μ^* est une mesure extérieure sur X.

Montrons à présent que tout ensemble de $\mathcal{A}$ est μ^*-mesurable. Soient donc $A \in \mathcal{A}$ et $M \subset X$. Montrons que

$$\mu^*(M \cap A) + \mu^*(M \cap A^c) \leq \mu^*(M)$$

où A^c désigne le complémentaire de A dans X. Soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{A}$ telle que $M \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ et

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) \leq \mu^*(M) + \varepsilon$$

Puisque $(M \cap A) \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(A \cap A_n)$, $(M \cap A^c) \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(A^c \cap A_n)$ et que $(A \cap A_n)$ et $(A^c \cap A_n)$ appartiennent à $\mathcal{A}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on en tire que

$$\begin{aligned}
\varepsilon + \mu^*(M) &\geq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} (\mu(A \cap A_n) + \mu(A^c \cap A_n)) \\
&\geq \mu^*(A \cap M) + \mu^*(A^c \cap M)
\end{aligned}$$

d'où la mesurabilité de A puisque $\varepsilon > 0$ est arbitraire.

Enfin, si $A \in \mathcal{A}$, montrons que $\mu(A) = \mu^*(A)$. Puisque $A \subset A$, nous avons $\mu^*(A) \leq \mu(A)$. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{A}$ telle que $A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Posons

$$B_0 = A_0 \text{ et } B_n = A_n \setminus \bigcup_{j<n} A_j \ \forall n > 0.$$

Alors $B_n \in \mathcal{A}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$. Puisque la suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est formée d'ensembles deux à deux disjoints, nous obtenons alors

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \mu\left(A \cap \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) \\ &= \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A \cap B_n)\right) \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A \cap B_n) \\ &\leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(B_n) \\ &\leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) \end{aligned}$$

et il s'ensuit que $\mu(A) \leq \mu^*(A)$. □

Corollaire 3.2.8 (Théorème d'extension de Hahn)**.** *Soient X un ensemble quelconque et $\mathcal{A}$ une algèbre sur X. Toute mesure dénombrablement additive μ sur $\mathcal{A}$ s'étend en une mesure sur $\sigma(\mathcal{A})$. Si μ est fini, cette extension est unique.*

Démonstration. La restriction de toute mesure extérieure à la σ-algèbre formée de ses parties mesurables est une mesure. Puisque l'ensemble des parties μ^*-mesurables de X contient $\mathcal{A}$, elle contient $\sigma(\mathcal{A})$ et la restriction de μ^* à $\sigma(\mathcal{A})$ convient.

L'unicité est immédiate vu la remarque 3.2.4 et puisque $\mathcal{A}$ est en particulier un π-système contenant X. □

Lemme 3.2.9. *Soient X un ensemble quelconque, $\mathcal{A}$ une algèbre sur X et μ une mesure finiment additive sur $\mathcal{A}$. Si*

$$\lim_{n\to+\infty} \mu(A_n) = 0$$

pour toute suite décroissante $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{A}$ tels que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \emptyset$, alors μ est dénombrablement additif.

Démonstration. Soit $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{A}$ deux à deux disjoints tels que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \in \mathcal{A}$. Montrons que

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(B_n).$$

Posons pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$A_k = \bigcup_{j\geq k} B_j.$$

Puisque $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \in \mathcal{A}$ et que $\mathcal{A}$ est une algèbre, il est clair que $A_k \in \mathcal{A}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. De plus, la suite $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante telle que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \emptyset$. Nous avons donc

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) = \sum_{n=1}^{k} \mu(B_n) + \mu(A_{k+1})$$

d'où la conclusion puisque $\mu(A_{k+1})$ converge vers 0 par hypothèse si k tend vers l'infini. □

Théorème 3.2.10. *Soient* $((X_\alpha, \mathcal{A}_\alpha, \mu_\alpha))_{\alpha\in A}$ *une famille d'espaces probabilisés et* $X = \prod_{\alpha\in A} X_\alpha$. *Il existe une unique mesure* μ *sur* $\left(X, \bigotimes_{\alpha\in A} \mathcal{A}_\alpha\right)$ *telle que*

$$\mu\left(\prod_{\alpha\in A} A_\alpha\right) = \prod_{\alpha\in A} \mu_\alpha(A_\alpha)$$

pour tout ensemble élémentaire $\prod_{\alpha\in A} A_\alpha$ *de* X.

Démonstration. Soit μ la mesure finiment additive sur l'algèbre $\mathcal{A}$ engendrée par $\mathcal{E}$ donnée dans la démonstration du lemme 3.2.5. Cette mesure est finie puisque

$$\mu\left(\prod_{\alpha\in A} X_\alpha\right) = \prod_{\alpha\in A} \mu_\alpha(X_\alpha) = 1.$$

Si nous montrons que μ est dénombrablement additif, alors par le théorème de Hahn 3.2.8, μ s'étend de manière unique en une mesure sur $\sigma(\mathcal{A})$. De plus, $\sigma(\mathcal{A}) = \sigma(\mathcal{E})$. En effet, on a bien sûr $\mathcal{A} \subset \sigma(\mathcal{E})$ d'où $\sigma(\mathcal{A}) \subset \sigma(\mathcal{E})$. De plus, si $E \in \mathcal{E}$, alors $E \in \mathcal{A} \subset \sigma(\mathcal{A})$ et on en tire l'égalité des σ-algèbres.

Il reste donc à montrer que μ est dénombrablement additif. Soit $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de $\mathcal{A}$ telle que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n = \emptyset$. Si nous montrons que

$$\lim_{n\to+\infty} \mu(B_n) = 0,$$

alors nous obtiendrons la conclusion par le lemme 3.2.9. Puisque la suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, il en est de même pour la suite $(\mu(B_n))_{n\in\mathbb{N}}$. Procédons par l'absurde et supposons que $\lim_{n\to+\infty} \mu(B_n) > 0$.

Par le lemme 3.2.3, il existe une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de parties finies de A telle que $B_n \in \mathcal{B}_{A_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Puisque $\mathcal{B}_C \subset \mathcal{B}_D$ si $C \subset D$ sont deux parties finies de A, on peut supposer que la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Par conséquent, il existe une suite $(\alpha_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de A et une suite strictement croissante $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de naturels telles que

$$A_n = \{\alpha_1, ..., \alpha_{k_n}\}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour chaque toute partie finie C de A, posons

$$S_C = \prod_{\alpha\in A\setminus C} X_\alpha$$

et définissons la mesure (vu 3.2.6)

$$\mu_C(E) = \mu\left(E \times S_C\right)$$

pour tout $E \in \bigotimes_{\alpha \in C} \mathcal{A}_\alpha$.

Puisque $B_n \in \mathcal{B}_{A_n}$, il existe E_n dans l'algèbre engendrée par $\left\{\prod_{\alpha \in A_n} A_\alpha : A_\alpha \in \mathcal{A}_\alpha \ \forall \alpha \in A_n\right\}$ sur $\prod_{\alpha \in A_n} X_\alpha$ tel que

$$B_n = E_n \times S_{A_n}.$$

Par le théorème de Fubini,

$$\mu(B_n) = \mu_{A_n}(E_n) = \int_{X_{\alpha_1}} ... \int_{X_{\alpha_{k_n}}} \chi_{E_n}(s_{\alpha_1}, ..., s_{\alpha_{k_n}}) d\mu_{\alpha_{k_n}}(s_{\alpha_{k_n}}) ... d\mu_{\alpha_1}(s_{\alpha_1}).$$

et la fonction

$$f_n(s_{\alpha_1}) = \int_{X_{\alpha_2}} ... \int_{X_{\alpha_{k_n}}} \chi_{E_n}(s_{\alpha_1}, s_{\alpha_2}, ..., s_{\alpha_{k_n}}) d\mu_{\alpha_{k_n}}(s_{\alpha_{k_n}}) ... d\mu_{\alpha_2}(s_{\alpha_2})$$

est définie pour μ_{α_1}-presque tout s_{α_1} dans X_{α_1}. Puisque

$$\mu(B_n) = \int_{X_{\alpha_1}} f_n d\mu_{\alpha_1}$$

ne converge pas vers 0 et puisque $0 \leq f_n \leq 1$, le théorème de la convergence dominée fournit $s^0_{\alpha_1} \in X_{\alpha_1}$ tel que $f_n(s^0_{\alpha_1})$ est défini pour tout $n \in \mathbb{N}$ et ne converge pas vers 0. Alors

$$f_n(s^0_{\alpha_1}) = \int_{X_{\alpha_2}} ... \int_{X_{\alpha_{k_n}}} \chi_{E_n}(s^0_{\alpha_1}, s_{\alpha_2}, ..., s_{\alpha_{k_n}}) d\mu_{\alpha_{k_n}}(s_{\alpha_{k_n}}) ... d\mu_{\alpha_2}(s_{\alpha_2})$$

est défini pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $k_n > 2$ et ne converge pas vers 0. En appliquant le même raisonnement, nous trouvons $s^0_{\alpha_2} \in X_{\alpha_2}$ tel que

$$\int_{X_{\alpha_3}} ... \int_{X_{\alpha_{k_n}}} \chi_{E_n}(s^0_{\alpha_1}, s^0_{\alpha_2}, s_{\alpha_3} ..., s_{\alpha_{k_n}}) d\mu_{\alpha_{k_n}}(s_{\alpha_{k_n}}) ... d\mu_{\alpha_3}(s_{\alpha_3})$$

est défini pour tout $n \in \mathbb{N}$ et ne converge pas vers 0. Par induction, nous obtenons une suite $(s^0_{\alpha_i})_{i \in \mathbb{N}}$ telle que $s^0_{\alpha_i} \in X_{\alpha_i}$ et telle que pour tous $m \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que $m < k_n$, l'intégrale

$$\int_{X_{\alpha_m}} ... \int_{X_{\alpha_{k_n}}} \chi_{E_n}(s^0_{\alpha_1}, ..., s^0_{\alpha_{m-1}}, s_{\alpha_m} ..., s_{\alpha_{k_n}}) d\mu_{\alpha_{k_n}}(s_{\alpha_{k_n}}) ... d\mu_{\alpha_m}(s_{\alpha_m})$$

existe. De plus, pour tout $m \in \mathbb{N}$, si N désigne le premier naturel tel que $k_N > m$, la suite

$$\left(\int_{X_{\alpha_m}} ... \int_{X_{\alpha_{k_n}}} \chi_{E_n}(s^0_{\alpha_1}, ..., s^0_{\alpha_{m-1}}, s_{\alpha_m} ..., s_{\alpha_{k_n}}) d\mu_{\alpha_{k_n}}(s_{\alpha_{k_n}}) ... d\mu_{\alpha_m}(s_{\alpha_m})\right)_{n \geq N}$$

ne converge pas vers 0. Fixons $j \in \mathbb{N}$. Si l'on prend $m = k_j + 1$, il existe $n > j$ et $s^{(n)}_{\alpha_{k_{j+1}}}, ..., s^{(n)}_{\alpha_{k_n}}$ tels que

$$\chi_{E_n}(s^0_{\alpha_1}, ..., s^0_{\alpha_{k_j}}, s^{(n)}_{\alpha_{k_j+1}}, ..., s^{(n)}_{\alpha_{k_n}}) \neq 0.$$

Or, nous savons que $B_n \subset B_j$ et par conséquent,

$$E_n \subset E_j \times \prod_{\alpha \in A_n \setminus A_j} X_\alpha.$$

Nous en tirons que

$$(s^0_{\alpha_1}, ..., s^0_{\alpha_{k_j}}, s^{(n)}_{\alpha_{k_j+1}}, ..., s^{(n)}_{\alpha_{k_n}}) \in E_j \times \prod_{\alpha \in A_n \setminus A_j} X_\alpha$$

et donc

$$(s^0_{\alpha_1}, ..., s^0_{\alpha_{k_j}}) \in E_j.$$

Par conséquent,

$$(s^0_{\alpha_1}, ..., s^0_{\alpha_{k_j}}, t_j) \in B_j = E_j \times S_{A_j}$$

pour tout $t_j \in S_{A_j}$. Posons

$$A_\infty = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n.$$

Alors

$$(s^0_\alpha)_{\alpha \in A} \in B_j$$

pour tout j où, si $A_\infty \subsetneq A$, s^0_α est un élément quelconque de X_α pour tout $\alpha \in A \setminus A_\infty$. Nous obtenons donc une contradiction puisque $\bigcap_{j \in \mathbb{N}} B_j = \emptyset$.

L'unicité est immédiate car si μ et ν sont deux mesures qui satisfont l'énoncé, elles sont finies et égales sur l'ensemble des parties élémentaires de X. Comme ces parties forment un π-système qui engendre $\bigotimes_{\alpha \in A} \mathcal{A}_\alpha$, nous obtenons donc que $\mu = \nu$. □

Définition 3.2.11. L'espace mesuré du théorème précédent est appelé le produit des espaces mesurés $(X_\alpha, \mathcal{A}_\alpha, \mu_\alpha)$, $\alpha \in A$, et est noté

$$(X, \bigotimes_{\alpha \in A} \mathcal{A}_\alpha, \mu) = \prod_{\alpha \in A} (X_\alpha, \mathcal{A}_\alpha, \mu_\alpha).$$

La mesure μ est appelée la mesure produit.

Remarque 3.2.12. L'opération qui consiste à former des produits infinis de mesures est associative. En d'autres mots, si A est partitionné en une famille $(A_\beta)_{\beta \in B}$ d'ensembles, alors

$$\prod_{\alpha \in A} (X_\alpha, \mathcal{A}_\alpha, \mu_\alpha) = \prod_{\beta \in B} \prod_{\alpha \in A_\beta} (X_\alpha, \mathcal{A}_\alpha, \mu_\alpha).$$

3.3 Prévalence

Soit E un espace vectoriel topologique métrisable complet. Rappelons que l'on peut supposer que la base de voisinages d'un point e de l'espace E est de la forme

$$\{e + b(0, \varepsilon) : \varepsilon > 0\}.$$

Lorsque l'on parlera de mesure sur E, cela signifiera une mesure définie sur la classe $\mathcal{B}(E)$ des boréliens de E et non-identiquement nulle.

Définition 3.3.1. Une mesure μ est transversale pour un ensemble borélien B si
(i) il existe un compact K de E tel que $0 < \mu(K) < +\infty$,
(ii) $\mu(B + e) = 0$ pour tout $e \in E$.

Si E est de plus séparable, alors le point (i) est automatiquement vérifié pour toute mesure finie comme le montre la proposition suivante.

Proposition 3.3.2. *Soit E un espace métrique complet séparable et μ une mesure de probabilité sur E. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble compact K_ε de X tel que*

$$\mu(K_\varepsilon) > 1 - \varepsilon.$$

Démonstration. Soient $\varepsilon > 0$ et $D = \{e_m : m \in \mathbb{N}\}$ une partie dense de E. Alors, pour tout $n > 0$, nous avons

$$E = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \overline{b(e_m, \frac{1}{n})}.$$

Par continuité à gauche de la mesure, nous avons

$$\mu(E) = \lim_{k \to +\infty} \mu\left(\bigcup_{m=0}^{k} \overline{b(e_m, \frac{1}{n})}\right)$$

d'où pour tout $n > 0$, il existe $k_n \in \mathbb{N}$ tel que

$$\mu\left(\bigcup_{m=1}^{k_n} \overline{b(e_m, \frac{1}{n})}\right) > 1 - \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Posons $A_n = \bigcup_{m=1}^{k_n} \overline{b(e_m, \frac{1}{n})}$ pour tout $n > 0$ et

$$K_\varepsilon = \bigcap_{n>0} A_n.$$

Puisque A_n est fermé pour tout $n > 0$, nous en tirons que K_ε est également fermé. De plus,

$$\mu(E \backslash K_\varepsilon) \leq \sum_{n>0} \mu(E \backslash A_n) < \sum_{n>0} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon$$

d'où $\mu(K_\varepsilon) > 1 - \varepsilon$.

Il reste à montrer que K_ε est compact. Soit $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ une suite de K_ε. Puisque $K_\varepsilon \subset A_1$, il existe $j_1 \leq k_1$ tel que $K_1 := K_\varepsilon \cap \overline{b(e_{j_1}, 1)}$ contienne une sous-suite $\left(x_{j_m^{(1)}}\right)_{m\in\mathbb{N}}$ de $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$. Puisque $K_1 \subset A_2$, il existe $j_2 \leq k_2$ et une sous-suite $\left(x_{j_m^{(2)}}\right)_{m\in\mathbb{N}}$ de $\left(x_{j_m^{(1)}}\right)_{m\in\mathbb{N}}$ incluse dans $K_2 := K_1 \cap \overline{b(e_{j_2}, \frac{1}{2})}$. En procédant de proche en proche, nous obtenons pour tout $n > 0$ une sous-suite $\left(x_{j_m^{(n+1)}}\right)_{m\in\mathbb{N}}$ incluse dans K_{n+1} de la suite $\left(x_{j_m^{(n)}}\right)_{m\in\mathbb{N}}$, où K_{n+1} est un ensemble de diamètre inférieur à $\frac{2}{n+1}$.

Considérons la sous-suite $\left(x_{j_m^{(m)}}\right)_{m\in\mathbb{N}}$. Pour tout $n > 0$, $\left(x_{j_m^{(m)}}\right)_{m\geq n}$ est une sous-suite de $\left(x_{j_m^{(n)}}\right)_{m\in\mathbb{N}}$ et appartient donc à K_n. Puisque le diamètre de K_n est inférieur à $\frac{2}{n}$, la suite $\left(x_{j_m^{(m)}}\right)_{m\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy. L'espace E étant complet, elle converge vers un point $x \in E$. Enfin, puisque K_ε est fermé, $x \in K$ et K est compact. □

Définition 3.3.3. Un borélien $B \subset E$ est timide s'il existe une mesure transversale pour B. Plus généralement, un sous-ensemble de E est timide s'il est inclus dans un borélien timide.

Définition 3.3.4. Un sous-ensemble de E est prévalent si son complémentaire est timide.

Nous allons à présent montrer que la prévalence est une généralisation de la notion de "presque partout" qui vérifie les propriétés que nous voulions préserver. Au vu de la proposition suivante, les propriétés 2 et 4 sont trivialement vérifiées.

Proposition 3.3.5. *Si S est timide dans E, alors il en est de même pour tout sous-ensemble et tout translaté de B.*

Démonstration. C'est immédiat vu les définitions. □

Pour montrer que la notion de prévalence respecte la propriété 1, nous aurons besoin du lemme ci-dessous. Rappelons auparavant la définition du support d'une mesure.

Définition 3.3.6. Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et μ une mesure sur l'espace mesurable $(X, \mathcal{B}(X))$. Le support de μ est défini par

$$\mathrm{supp}(\mu) = \{x \in X : \forall V \in \mathcal{V}_x \cap \mathcal{T}, \mu(V) > 0\}$$

où $\mathcal{V}_x$ désigne le système de voisinages de x.

Remarquons que le support de μ est un fermé de X. Par conséquent, si μ est une mesure finie sur les boréliens d'un espace topologique séparé X et s'il existe un compact K tel que $\mu(K) = \mu(X)$, alors $\mu(X\backslash K) = 0$. Puisque l'espace est séparé, $X\backslash K$ est ouvert et nous en tirons que $\mathrm{supp}(\mu) \subset K$. Le support $\mathrm{supp}(\mu)$ étant fermé, nous obtenons que μ est à support compact.

Lemme 3.3.7. *Pour tout borélien timide B de E, il existe une mesure transversale pour B finie et à support compact. De plus, le support de cette mesure peut être choisi pour avoir un diamètre arbitrairement petit.*

Démonstration. Soit μ une mesure transversale pour B. Alors par définition, il existe un compact K de E tel que $0 < \mu(K) < +\infty$. La restriction de μ à K, définie par

$$\mu_K(A) = \mu(A \cap K)$$

pour tout ensemble borélien A, est une mesure à support compact et elle est également transversale pour B.

Pour la deuxième partie, soit $\varepsilon > 0$. Puisque K est compact, il peut être recouvert par un nombre fini de boules de rayon ε et comme $\mu(K) > 0$, au moins une de ces boules est de mesure positive. Notons-la b_ε. Par conséquent, $K \cap \bar{b}_\varepsilon$ est compact et la restriction de μ à ce compact est une mesure transversale pour B. $\square$

Proposition 3.3.8. *Tout sous-ensemble timide de E est d'intérieur vide.*

Démonstration. Soit S un sous-ensemble timide de E. Alors il existe $B \in \mathcal{B}(E)$ timide tel que

$$S \subset B.$$

Montrons que B est d'intérieur vide. Sinon, il existe $x_0 \in B$ et $\varepsilon > 0$ tel que

$$b(x_0, \varepsilon) \subset B.$$

Par le lemme 3.3.7, il existe une mesure transversale μ pour B dont le support K est compact et de diamètre inférieur à ε. Puisque

$$\mu(b(x_0, \varepsilon) + e) \leq \mu(B + e) = 0$$

pour tout $e \in E$, on en tire que la mesure est également transversale pour $b(x_0, \varepsilon)$. Or, il existe un $e \in E$ tel que

$$K \subset b(x_0, \varepsilon) + e$$

puisque le diamètre de K est inférieur à ε et il s'ensuit que $\mu(b(x_0, \varepsilon) + e) \geq \mu(K) > 0$, d'où une contradiction.

Ainsi B est d'intérieur vide et par conséquent, S l'est également. $\square$

Le corollaire suivant est alors immédiat.

Corollaire 3.3.9. *Tout ensemble prévalent de E est dense dans E.*

Démonstration. Soit A un sous-ensemble prévalent de E. Alors $E \backslash A$ est timide et par la proposition 3.3.8, $E \backslash A$ est d'intérieur vide. Comme $E \backslash \bar{A}$ est un ouvert inclus dans $E \backslash A$, cet ensemble est vide et on en tire que A est dense dans E. $\square$

Afin de montrer que la propriété de prévalence est stable par union dénombrable, il nous faut introduire la notion de convolution de mesures.

Définition 3.3.10. Soient μ et ν deux mesures σ-finies sur E. Pour tout borélien B de E, on pose

$$B^{\Sigma} = \{(x, y) \in E \times E : x + y \in B\}.$$

Puisque l'addition est une application continue de $E \times E$ dans E, B^{Σ} est un borélien de $E \times E$. La convolution $\mu * \nu$ des mesures μ et ν est définie par

$$(\mu * \nu)(B) = (\mu \times \nu)(B^{\Sigma})$$

pour tout $B \in \mathcal{B}(E)$.

Proposition 3.3.11. *Soient μ et ν deux mesures σ-finies sur E. La convolution de μ et ν est une mesure sur E.*

Démonstration. Il est clair que $(\mu*\nu)(\emptyset) = 0$. De plus, si $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de boréliens de E deux à deux disjoints, alors

$$\begin{aligned}
(\mu * \nu)\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) &= (\mu \times \nu)\left(\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right)^{\Sigma}\right) \\
&= (\mu \times \nu)\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n^{\Sigma}\right) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} (\mu \times \nu)(B_n^{\Sigma}) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} (\mu * \nu)(B_n)
\end{aligned}$$

puisque les $(B_n^{\Sigma})_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux à deux disjoints. □

Remarque 3.3.12. Par le théorème de Tonelli-Fubini, on a

$$(\mu * \nu)(B) = \int_E \mu(B - y)d\nu(y) = \int_E \nu(B - x)d\mu(x) = (\nu * \mu)(B).$$

Lemme 3.3.13. *Soient μ et ν deux mesures finies. S'il existe un compact K tel que $\nu(K) > 0$ et si μ est transversale pour $B \in \mathcal{B}(E)$, alors $\mu * \nu$ est également transversale pour B.*

Démonstration. Puisque μ est une mesure transversale, il existe un compact L tel que $\mu(L) > 0$. Alors $L + K$ est compact et

$$\begin{aligned}
(\mu * \nu)(L + K) &= (\mu \times \nu)((L + K)^{\Sigma}) \\
&\geq (\mu \times \nu)(L \times K) \\
&= \mu(L)\nu(K) \\
&> 0
\end{aligned}$$

puisque $L \times K \subset (L+K)^{\Sigma}$. De plus, $\mu * \nu$ est fini. En effet, les mesures μ et ν étant finies, on a

$$(\mu * \nu)(E) = (\mu \times \nu)(E^{\Sigma}) = (\mu \times \nu)(E \times E) = \mu(E)\nu(E) < \infty.$$

Enfin, pour tout $e \in E$, nous avons

$$(\mu * \nu)(B + e) = \int_E \underbrace{\mu(B + e - y)}_{=0} d\nu(y) = 0,$$

et $\mu * \nu$ est donc transversale pour B. □

Proposition 3.3.14. *Toute union finie d'ensembles timides est timide.*

Démonstration. Soient deux ensembles timides de E et A et B deux boréliens timides les contenant. Alors par le lemme 3.3.7, il existe deux mesures finies à support compact μ et ν transversales pour A et B respectivement. Le lemme 3.3.13 implique alors que la mesure $\mu * \nu$ est transversale pour A et B, et donc pour $A \cup B$ puisque

$$(\mu * \nu)((A \cup B) + e) \leq (\mu * \nu)(A + e) + (\mu * \nu)(B + e) = 0$$

pour tout $e \in E$. □

Nous allons à présent généraliser cette proposition au cas des unions dénombrables d'ensembles timides de E.

Proposition 3.3.15. *Toute union dénombrable d'ensembles timides est timide.*

Démonstration. Etant donnée une suite de sous-ensembles timides de E, soit $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de boréliens timides de E contenant ces ensembles. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons μ_n une mesure transversale pour B_n. Par le lemme 3.3.7, on peut supposer que μ_n est finie et supportée par un compact K_n de diamètre inférieur à 2^{-n}. En normalisant les mesures, on peut supposer que $\mu_n(E) = 1$ et quitte à les translater, que K_n contient l'origine.

Considérons le produit infini

$$K^{\Pi} = \prod_{n\in\mathbb{N}} K_n.$$

Par le théorème de Tychonoff, K^{Π} est un compact de $\prod_{n\in\mathbb{N}} E$. De plus, si μ^{Π} est la mesure produit des μ_n définie sur les boréliens de K^{Π},

$$\mu^{\Pi}(K^{\Pi}) = 1.$$

Notons d la distance sur E. L'espace E étant complet, et puisque $d(k_n, 0) < 2^{-n}$ pour tout $k_n \in K_n$, l'application

$$(k_n)_{n\in\mathbb{N}} \in K^{\Pi} \mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} k_n \in E$$

est bien définie et continue. L'image K de K^Π par cette application est donc compacte. La mesure produit μ^Π induit une mesure μ à support dans K, donnée par

$$\mu(B) = \mu^\Pi(B^\Sigma)$$

où

$$B^\Sigma = \left\{ (e_n)_{n\in\mathbb{N}} \in K^\Pi : \sum_{n\in\mathbb{N}} e_n \in B \right\}.$$

Montrons que μ est une mesure transversale pour chaque B_n. C'est clairement une mesure. De plus, comme le produit de mesures est commutatif et associatif,

$$\mu^\Pi = \mu_n \times \nu_n^\Pi,$$

où

$$\nu_n^\Pi = \prod_{j\neq n} \mu_j.$$

Soit ν_n la mesure sur E induite par ν_n^Π, c'est-à-dire

$$\nu_n(B) = \nu_n^\Pi(B^{\Sigma_n})$$

où pour tout borélien B de E,

$$B^{\Sigma_n} = \left\{ (e_j)_{j\neq n} \in \prod_{j\neq n} K_j : \sum_{j\neq n} e_j \in B \right\}.$$

Alors

$$\mu = \mu_n * \nu_n.$$

En effet, pour tout borélien B, nous avons

$$\begin{aligned}
\mu_n * \nu_n(B) &= \int_E \nu_n(B-x) d\mu_n(x) \\
&= \int_E \nu_n^\Pi \left((B-x)^{\Sigma_n} \right) d\mu_n(x) \\
&= \int_E \nu_n^\Pi(B_x^\Sigma) d\mu_n(x) \\
&= \mu_n \times \nu_n^\Pi(B^\Sigma) \\
&= \mu^\Pi(B^\Sigma) \\
&= \mu(B)
\end{aligned}$$

où

$$B_x^\Sigma = \left\{ (e_j)_{j\neq n} \in \prod_{j\neq n} K_j : (y_j)_{j\in\mathbb{N}} \in B^\Sigma \text{ où } y_j = e_j \ \forall j \neq n, y_n = x \right\}.$$

Par le lemme 3.3.13, μ est une mesure transversale pour B_n. Alors pour tout $e \in E$

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n + e\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(B_n + e) = 0,$$

d'où la conclusion. □

Proposition 3.3.16. *Un ensemble $S \subset \mathbb{R}^n$ est timide si et seulement si il est inclus dans un borélien qui a une mesure de Lebesgue nulle.*

Démonstration. Supposons que S est inclus dans un borélien de mesure de Lebesgue nulle. Notons B ce borélien. Alors la mesure de Lebesgue $\mathcal{L}$ est transversale pour B et S est timide.

Réciproquement, si B est un borélien timide contenant S, par le lemme 3.3.7 il existe une mesure μ non-nulle et finie transversale pour B. Comme $\mathcal{L}$ est σ-fini, le théorème de Tonelli-Fubini donne

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathbb{R}^n} \mu(B-y)d\mathcal{L}(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{L}(B-x)d\mu(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{L}(B)d\mu \\ &= \mu(\mathbb{R}^n)\mathcal{L}(B) \end{aligned}$$

puisque $\mathcal{L}$ est invariant par translation. On en tire que $\mathcal{L}(B) = 0$.

□

Remarque 3.3.17. Par conséquent, dans $\mathbb{R}^n$, la mesure de Lebesgue est le meilleur candidat pour être transversale pour un borélien.

Au vu des résultats obtenus, la notion d'ensemble timide généralise bien la notion d'ensemble de mesure de Lebesgue nulle au cas des espaces de dimension infinie.

Définition 3.3.18. Soit P un espace vectoriel topologique réel séparé de dimension finie n. Une mesure de Lebesgue portée par P est une mesure image $\mathcal{L}_f$ de la mesure de Lebesgue $\mathcal{L}$ sur $\mathbb{R}^n$ par un isomorphisme topologique $f : \mathbb{R}^n \to P$, c'est-à-dire

$$\mathcal{L}_f(B) = \mathcal{L}(f^{-1}(B))$$

pour tout borélien B de P.

Vu le théorème de changement de variables dans $\mathbb{R}^n$, cette mesure est unique à une constante près.

Lemme 3.3.19. *Soient X et Y deux ensembles, $f : X \to Y$ une application et $\mathcal{C}$ une collection de sous-ensembles de Y. Alors*

$$\left\{f^{-1}(A) : A \in \sigma(\mathcal{C})\right\} = \sigma\left(\left\{f^{-1}(A) : A \in \mathcal{C}\right\}\right).$$

Démonstration. Procédons par double inclusion. Il est facile de vérifier que $\{f^{-1}(A) : A \in \sigma(\mathcal{C})\}$ est une σ-algèbre sur X. De plus, $\mathcal{C} \subset \sigma(\mathcal{C})$ et par conséquent

$$\left\{f^{-1}(A) : A \in \mathcal{C}\right\} \subset \left\{f^{-1}(A) : A \in \sigma(\mathcal{C})\right\},$$

d'où

$$\sigma\left(\left\{f^{-1}(A) : A \in \mathcal{C}\right\}\right) \subset \left\{f^{-1}(A) : A \in \sigma(\mathcal{C})\right\}.$$

D'autre part, soit

$$\mathcal{S} = \left\{B \subset Y : f^{-1}(B) \in \sigma\left(\left\{f^{-1}(A) : A \in \mathcal{C}\right\}\right)\right\}.$$

Il est clair que $\mathcal{S}$ est une σ-algèbre sur Y. De plus, si $C \in \mathcal{C}$, alors

$$f^{-1}(C) \in \sigma\left(\left\{f^{-1}(A) : A \in \mathcal{C}\right\}\right)$$

et on en tire que $\mathcal{C} \subset \mathcal{S}$, d'où $\sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{S}$. Par conséquent,

$$\left\{f^{-1}(A) : A \in \sigma(\mathcal{C})\right\} \subset \left\{f^{-1}(A) : A \in \mathcal{S}\right\}.$$

Or, par définition de $\mathcal{S}$,

$$\left\{f^{-1}(A) : A \in \mathcal{S}\right\} \subset \sigma\left(\left\{f^{-1}(A) : A \in \mathcal{C}\right\}\right),$$

d'où la conclusion. □

Proposition 3.3.20. *Soient $(E, \mathcal{T})$ un espace topologique et $P \subset E$. La σ-algèbre de Borel $\mathcal{B}(P)$ de P pour la topologie induite est donnée par*

$$\mathcal{B}(P) = \{B \cap P : B \in \mathcal{B}(E)\}.$$

Démonstration. Considérons l'inclusion $i : P \to E$. Par le lemme précédent,

$$\{B \cap P : B \in \mathcal{B}(E)\} = \sigma\left(\{B \cap P : B \in \mathcal{T}\}\right).$$

Or, par définition de la topologie induite sur P,

$$\sigma\left(\{B \cap P : B \in \mathcal{T}\}\right) = \mathcal{B}(P),$$

et la proposition est démontrée. □

Ce résultat nous permet de définir une mesure de Lebesgue sur un espace vectoriel topologique réel séparé de dimension infinie E portée par un sous-espace de dimension finie P.

Définition 3.3.21. Si $f : \mathbb{R}^n \to P$ est un isomorphisme topologique, la mesure $\mathcal{L}_P$ définie par

$$\mathcal{L}_P(B) = \mathcal{L}_f(B \cap P)$$

pour tout borélien B de E, est appelée une mesure de Lebesgue sur E portée par P.

Définition 3.3.22. Un sous-espace de dimension finie $P \subset E$ est une sonde pour un sous-ensemble T de E si une mesure de Lebesgue portée par P est transversale pour un borélien contenant le complémentaire T^c de T dans E.

Ainsi, une condition suffisante pour que T soit prévalent est d'avoir une sonde.

3.4 Applications

Nous allons à présent présenter quelques applications de la notion de prévalence. On dira qu'une propriété est vérifiée *presque partout* si l'ensemble des points qui satisfont cette propriété est prévalent.

Pour la première application, nous considérons l'espace de Banach $\left(L^1([0,1]), \|.\|_{L^1([0,1])}\right)$, où

$$\|f\|_{L^1([0,1])} = \int_0^1 |f(x)|dx$$

pour tout $f \in L^1([0,1])$.

Proposition 3.4.1. *Presque toute fonction f de $L^1([0,1])$ satisfait $\int_0^1 f(x)dx \neq 0$.*

Démonstration. Soit T l'ensemble des fonctions f de $L^1([0,1])$ telles que $\int_0^1 f(x)dx \neq 0$. Cet ensemble est un borélien de $L^1([0,1])$ puisque l'application

$$f \in L^1([0,1]) \mapsto \int_0^1 f(x)dx$$

est continue. Considérons le sous-espace de dimension 1 de $L^1([0,1])$ formé des fonctions constantes. Montrons qu'il s'agit d'une sonde pour T. Si $f \in L^1([0,1])$, nous avons

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left(\{\alpha \in \mathbb{R} : \alpha + f \in T^c\}\right) &= \mathcal{L}\left(\left\{\alpha \in \mathbb{R} : \int_0^1 (\alpha + f(x))dx = 0\right\}\right) \\
&= \mathcal{L}\left(\left\{\alpha \in \mathbb{R} : \alpha = -\int_0^1 f(x)dx\right\}\right) \\
&= \mathcal{L}\left(\left\{-\int_0^1 f(x)dx\right\}\right) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

d'où la conclusion. □

Proposition 3.4.2. *Si $1 < p \leq +\infty$, presque toute suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ de $l^p(\mathbb{N}_0)$ n'appartient pas à $l^1(\mathbb{N}_0)$.*

Démonstration. Soit T l'ensemble des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ de $l^p(\mathbb{N}_0)$ telles que $\sum_{n\in\mathbb{N}_0} |a_n|$ diverge. Cet ensemble est un borélien de $l^p(\mathbb{N}_0)$. En effet, pour tout $k \in \mathbb{N}$, posons

$$E_k = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \in l^p(\mathbb{N}_0) : \sum_{n\in\mathbb{N}_0} |a_n| \leq k\}.$$

L'ensemble E_k est l'intersection sur les naturels M des suites de $l^p(\mathbb{N}_0)$ dont la somme des modules des M premiers termes est majorée par k. Chacun de ces ensembles est fermé pour la convergence ponctuelle, donc également dans l'espace $l^p(\mathbb{N}_0)$. Nous en tirons que l'ensemble E_k est fermé dans $l^p(\mathbb{N}_0)$. Par conséquent, l'ensemble

$$T = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} (E_k)^c$$

est un borélien de $l^p(\mathbb{N}_0)$.

Considérons le sous-espace de dimension 1 de $l^p(\mathbb{N}_0)$ engendré par la suite $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}_0}$. Montrons qu'il s'agit d'une sonde pour T. Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \in l^p(\mathbb{N}_0)$, nous avons

$$\mathcal{L}\left(\left\{\alpha \in \mathbb{R} : \left(\frac{\alpha}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}_0} + (a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \in T^c\right\}\right) = \mathcal{L}\left(\left\{\alpha \in \mathbb{R} : \sum_{n\in\mathbb{N}_0} \left|\frac{\alpha}{n} + a_n\right| \text{ converge}\right\}\right).$$

Supposons qu'il existe $\alpha \neq \beta$ tels que

$$\sum_{n\in\mathbb{N}_0} \left|\frac{\alpha}{n} + a_n\right| \text{ et } \sum_{n\in\mathbb{N}_0} \left|\frac{\beta}{n} + a_n\right|$$

convergent. Alors la série

$$|\alpha - \beta| \sum_{n\in\mathbb{N}_0} \frac{1}{n}$$

converge puisque

$$\frac{|\alpha - \beta|}{n} \leq \left|\frac{\alpha}{n} + a_n\right| + \left|\frac{\beta}{n} + a_n\right|$$

pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, d'où une contradiction. Nous obtenons donc que

$$\mathcal{L}\left(\left\{\alpha \in \mathbb{R} : \left(\frac{\alpha}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}_0} + (a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \in T^c\right\}\right) = 0.$$

□

Pour l'application suivante, nous considérons l'ensemble des fonctions continues sur $[0, 1]$ muni de la norme uniforme

$$\|f\|_{[0,1]} = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|.$$

Nous allons montrer que presque toute fonction de l'espace de Banach $C([0, 1])$ est différentiable nulle part, c'est-à-dire en aucun point. L'ensemble des fonctions nulle part différentiables n'est pas un borélien de $C([0, 1])$ ([31, 32]). Cependant, cet ensemble contient l'ensemble des fonctions nulle part Lipschitz. Nous montrerons que cet ensemble est un borélien de $C([0, 1])$ et qu'il est prévalent car il possède une sonde de dimension 2. On obtiendra donc la prévalence dans $C([0, 1])$ de l'ensemble des fonctions nulle part différentiables. Rappelons qu'une fonction $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ est M-Lipschitz en $x \in [0, 1]$ si pour tout $y \in [0, 1]$, $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$. On dit que f est Lipschitz en $x \in [0, 1]$ s'il existe $M > 0$ tel que f est M- Lipschitz en x.

Nous utiliserons une sonde de dimension 2. Les fonctions g et h qui engendrent cette sonde sont basées sur la célèbre fonction de Weierstrass, continue et nulle part différentiable, donnée par

$$\sum_{k=0}^{\infty} a^k \cos(b^k \pi x).$$

où $1 \leq ab < b$ ([18]). Les fonctions g et h sont définies sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \cos(2^k \pi x) \ , \ h(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \sin(2^k \pi x).$$

Il est connu que ces fonctions sont continues et nulle part Lispschitz ([18]).

Lemme 3.4.3. *Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et tout intervalle fermé I de $[0, 1]$ de longueur $\varepsilon \leq \frac{1}{2}$,*

$$\max_I(\alpha g + \beta h) - \min_I(\alpha g + \beta h) \geq \frac{C\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{(\log \varepsilon)^2}.$$

Démonstration. La preuve de ce lemme repose uniquement sur des calculs. Le lecteur peut la trouver dans l'article [19]. □

Proposition 3.4.4. *Presque toute fonction de $C([0, 1])$ est différentiable nulle part.*

Démonstration. Montrons tout d'abord que l'ensemble des fonctions nulle part Lipschitz est un borélien de $C([0, 1])$. Pour tout $M \in \mathbb{N}_0$, posons

$$F_M = \{f \in C([0, 1]) : f \text{ est } M\text{-Lipschitz en un } x \in [0, 1]\}.$$

et montrons que cet ensemble est fermé dans $C([0, 1])$. On en déduira que l'ensemble

$$F = \{f \in C([0, 1]) : f \text{ est Lipschitz en un } x \in [0, 1]\}$$

est un borélien de $C([0,1])$.

Soit donc $M \in \mathbb{N}_0$ et considérons une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de F_M qui converge vers f dans $C([0,1])$. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, il existe $x_m \in [0,1]$ tel que f_m est M-Lipschitz en x_m. Comme $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est une suite de $[0,1]$, quitte à en extraire une sous-suite, on peut supposer que $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ converge dans $[0,1]$ vers x. Montrons que f est M-Lipschitz en x. Soit $y \in [0,1]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons

$$\begin{aligned} |f(x)-f(y)| &\leq |f(x)-f_n(x)|+|f_n(x)-f_n(x_n)|+|f_n(x_n)-f_n(y)|+|f_n(y)-f(y)| \\ &\leq |f(x)-f_n(x)|+M|x-x_n|+M|x_n-y|+|f_n(y)-f(y)|. \end{aligned}$$

En prenant la limite pour n qui tend vers l'infini, nous obtenons

$$|f(x)-f(y)| \leq M|x-y|$$

et $f \in F_M$.

Considérons à présent les fonctions g et h définies comme précédemment et soit f une fonction de $C([0,1])$. Montrons que l'ensemble

$$S_M = \left\{(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 \,:\, f+\alpha g+\beta h \in F_M\right\}$$

a une mesure de Lebesgue nulle pour tout $M \in \mathbb{N}_0$. On en déduira que l'ensemble

$$S = \left\{(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 \,:\, f+\alpha g+\beta h \in F\right\}$$

a également une mesure de Lebesgue nulle puisqu'il s'agit de l'union des ensembles S_M sur tous les entiers positifs M.

Fisons $M \in \mathbb{N}_0$ et soit $N \geq 2$. Recouvrons $[0,1]$ avec N intervalles fermés de longueur $\varepsilon = \frac{1}{N}$. Soit I un de ces intervalles et posons

$$J = \left\{(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 \,:\, f+\alpha g+\beta h \text{ est } M\text{-Lipschitz en un } x \in I\right\}.$$

Montrons que J est inclus dans une boule de rayon $C\varepsilon(\log\varepsilon)^2$ où C est une constante indépendante de I et ε. Alors, S_M pourra être recouvert de $N = \frac{1}{\varepsilon}$ boules dont la mesure de Lebesgue totale est $N\pi C^2\varepsilon^2(\log\varepsilon)^4 = \pi C^2\varepsilon(\log\varepsilon)^4$. En prenant $\varepsilon \to 0$, cette mesure tend vers 0, d'où $\mathcal{L}(S_M) = 0$.

Considérons deux points (α_1,β_1) et (α_2,β_2) dans J. Pour $i = 1,2$, soit $f_i = f+\alpha_i g+\beta_i h$ et soit x_i un point de I en lequel f_i est M-Lipschitz. Alors pour tout $x \in I$,

$$|f_i(x)-f_i(x_i)| \leq M|x-x_i| \leq M\varepsilon.$$

Il s'ensuit que

$$|f_1(x)-f_2(x)-(f_1(x_1)-f_2(x_2))| \leq 2M\varepsilon$$

pour tout $x \in I$. On obtient donc

$$\begin{aligned}
\max_I(f_1 - f_2) &\leq \max_I(f_1 - f_2 - (f_1(x_1) - f_2(x_2)) + (f_1(x_1) - f_2(x_2)) \\
&\leq 2M\varepsilon + (f_1(x_1) - f_2(x_2)) \\
&\leq 2M\varepsilon + (f_1(x_1) - f_1(x)) + (f_1(x) - f_2(x)) + (f_2(x) - f_2(x_2)) \\
&\leq 4M\varepsilon + (f_1(x) - f_2(x))
\end{aligned}$$

pour tout $x \in I$, d'où

$$\max_I(f_1 - f_2) - \min_I(f_1 - f_2) \leq 4M\varepsilon.$$

Or, nous savons que

$$f_1 - f_2 = (\alpha_1 - \alpha_2)g - (\beta_1 - \beta_2)h$$

et par le lemme 3.4.3,

$$\sqrt{(\alpha_1 - \alpha_2)^2 + (\beta_1 - \beta_2)^2} \leq \frac{4M}{C}\varepsilon(\log\varepsilon)^2.$$

Par conséquent, J est inclus dans une boule de rayon $\frac{4M}{C}\varepsilon(\log\varepsilon)^2$ comme annoncé. □

Remarque 3.4.5. Dans la preuve ci-dessus, nous avons utilisé une sonde de dimension 2. Remarquons qu'une sonde de dimension 1 ne conviendrait pas. En effet, considérons l'espace engendré par une fonction $g \in C([0,1])$. Soit $f(x) = -xg(x)$ et remarquons que $f + \lambda g$ est différentiable en $x = \lambda$ pour tout $\lambda \in [0,1]$. Ainsi,

$$\mathcal{L}\left(\{\lambda \in \mathbb{R} \,:\, f + \lambda g \text{ est différentiable en un } x \in [0,1]\}\right) \geq \mathcal{L}([0,1]) > 0.$$

Pour la dernière application, rappelons qu'une fonction continue est *de type monotone* sur un intervalle $[a,b]$ s'il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que la fonction $f - \gamma x$ soit monotone sur un sous-intervalle de $[a,b]$.

Proposition 3.4.6. *Presque toute fonction de $C([0,1])$ est de type monotone nulle part.*

Démonstration. Soit I un sous-intervalle de $[0,1]$. Posons

$$G(I) = \{f \in C([0,1]) : f \text{ est de type monotone sur } I\}$$

et pour tout $n \in \mathbb{N}_0$,

$$G_n(I) = \{f \in C([0,1]) : \exists \gamma \in [-n,n] \text{ tel que } f - \gamma x \text{ est monotone sur } I\ \}.$$

Bien sûr, nous avons

$$G(I) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} G_n(I).$$

Soit $n \in \mathbb{N}_0$. L'ensemble G_n est fermé dans $C([0,1])$. En effet, soit $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ une suite de $G_n(I)$ qui converge uniformément vers f sur $[0,1]$. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, il existe $\gamma_m \in [-n,n]$

tel que $f_m - \gamma_m x$ est monotone sur I. Quitte à considérer une sous-suite, puisque $\gamma_m \in [-n, n]$ pour tout $m \in \mathbb{N}$, on peut supposer que la suite $(\gamma_m)_{m\in\mathbb{N}}$ converge vers $\gamma \in [-n, n]$. Il est alors clair que la suite $(f_m - \gamma_m x)_{m\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $f - \gamma x$ sur $[0, 1]$. Puisque les $f_m - \gamma_m x$ sont monotones sur I, quitte à reconsidérer une sous-suite, on peut supposer qu'ils sont tous croissants ou décroissants sur I. On en tire alors que $f - \gamma x$ l'est également. Par conséquent, $G_n(I)$ est fermé. C'est en particulier un borélien et il en est de même pour $G(I)$. Montrons à présent que $G(I)$ est timide.

Soit $g \in C([0, 1])$ une application nulle part différentiable sur I. Pour tout $f \in C([0, 1])$, posons

$$G_f(I) = \{\alpha \in \mathbb{R} \, : f + \alpha g \in G(I)\}\,.$$

Alors $G_f(I)$ contient au plus un élément. En effet, si $\alpha \neq \beta$ sont tels que $f + \alpha g \in G(I)$ et $f + \beta g \in G(I)$, il existe des réels γ_1 et γ_2 tels que

$$f + \alpha g - \gamma_1 x \text{ et } f - \beta g - \gamma_2 x$$

sont monotones sur I. Elles sont alors dérivables presque partout sur I ([39]) et il en est de même pour

$$(f + \alpha g - \gamma_1 x) - (f - \beta g - \gamma_2 x) = (\alpha - \beta)g + (\gamma_1 - \gamma_2)x,$$

d'où une contradiction. On en tire que le sous-espace de $C([0, 1])$ engendré par g est une sonde pour $(G(I))^c$. Ainsi, $G(I)$ est timide. En considérant l'union dénombrable des $G(I)$ sur tous les intervalles I rationnels et en utilisant la proposition 3.3.15, nous obtenons la conclusion. □

3.5 Construction d'une mesure sur S^ν

Le but de cette section est de montrer que l'ensemble

$$\{\vec{c} \in S^\nu \, : \nu_{\vec{c}}(\alpha) = \nu(\alpha) \ \forall \alpha \in \mathbb{R}\}$$

est prévalent dans l'espace métrisable complet S^ν. Pour cela, nous allons construire une mesure sur S^ν. Commençons par la construction d'une mesure sur $(\Omega, \mathcal{F})$, où $\mathcal{F}$ est la σ-algèbre produit $\mathcal{F} = \bigotimes_{j\in\mathbb{N}, k\in\{0,\ldots,2^j-1\}} \mathcal{B}(\mathbb{C})$. Nous montrerons ensuite que cette mesure est à support dans S^ν et est une mesure borélienne par rapport à la topologie de S^ν.

La première étape consiste en la construction d'une mesure de probabilité convenable définie sur l'ensemble de toutes les suites Ω. Pour tout $j \in \mathbb{N} \setminus \{3\}$, on pose

$$F_j(\alpha) := \begin{cases} 2^{-j} \sup\left\{j^2, 2^{j\nu(\alpha)}\right\} & \text{si } \alpha \geq \alpha_{min} \\ 0 & \text{si } \alpha < \alpha_{min}. \end{cases}$$

et

$$F_3(\alpha) := \begin{cases} 2^{-3} 2^{3\nu(\alpha)} & \text{si } \alpha \geq \alpha_{min} \\ 0 & \text{si } \alpha < \alpha_{min}. \end{cases}$$

Alors, F_j est une application bornée par 1, croissante et continue à droite puisque ν satisfait également ces propriétés. De plus, $\lim_{x\to-\infty} F_j(x) = 0$. Ainsi, il existe une unique mesure finie ρ_j sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ telle que

$$F_j(x) = \rho_j(]-\infty, x])$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$. Posons $\rho_j(+\infty) = 1 - \lim_{\alpha\to+\infty} F_j(\alpha)$. Alors ρ_j est une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ puisque

$$\rho_j(\mathbb{R}\cup\{+\infty\}) = 1.$$

Soit $U_{[0,2\pi]}$ la mesure uniforme sur $[0, 2\pi]$. Considérons la fonction

$$g_j : \ \mathbb{R}\cup\{+\infty\} \times [0, 2\pi] \to \mathbb{C} : (\alpha, u) \mapsto \begin{cases} 2^{-j\alpha}e^{iu} & \text{si } \alpha \in \mathbb{R} \\ 0 & \text{si } \alpha = +\infty. \end{cases}$$

Cette application est continue et donc mesurable par rapport à $\mathcal{B}(\mathbb{R}\cup\{+\infty\}) \times \mathcal{B}([0, 2\pi])$ et $\mathcal{B}(\mathbb{C})$. Nous pouvons donc définir pour chaque couple (j, k) avec $j \in \mathbb{N}$, $k \in \{0, ..., 2^j - 1\}$ la mesure image

$$\mathbb{P}_{j,k}(B) := (\rho_j \times U_{[0,2\pi]})(g_j^{-1}(B)).$$

pour tout borélien B de $\mathbb{C}$. Il s'agit d'une probabilité sur $\mathbb{C}$ puisque

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{j,k}(\mathbb{C}) &= (\rho_j \times U_{[0,2\pi]})(g_j^{-1}(\mathbb{C})) \\ &= (\rho_j \times U_{[0,2\pi]})(\mathbb{R}\cup\{+\infty\} \times [0, 2\pi]) \\ &= \rho_j(\mathbb{R}\cup\{+\infty\})U_{[0,2\pi]}([0, 2\pi]) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Elle est telle que

$$\mathbb{P}_{j,k}(\{c \in \mathbb{C} \ : |c| \geq 2^{-\alpha j}\}) = \rho_j(]-\infty, \alpha]) = F_j(\alpha).$$

En effet,

$$\mathbb{P}_{j,k}(\{c \in \mathbb{C} \ : |c| \geq 2^{-\alpha j}\}) = (\rho_j \times U_{[0,2\pi]})(g_j^{-1}(\{c \in \mathbb{C} \ : |c| \geq 2^{-\alpha j}\}))$$

et

$$\begin{aligned} g_j^{-1}(\{c \in \mathbb{C} \ : |c| \geq 2^{-\alpha j}\}) &= \{(\alpha', u) \in \mathbb{R} \times [0, 2\pi] : |2^{-j\alpha'}e^{iu}| \geq 2^{-\alpha j}\} \\ &= \{(\alpha', u) \in \mathbb{R} \times [0, 2\pi] : \alpha' \leq \alpha\} \\ &= \ ]-\infty, \alpha] \times [0, 2\pi]. \end{aligned}$$

Considérons la mesure de probabilité produit

$$\mathbb{P} = \bigotimes_{j\in\mathbb{N}, k\in\{0,...,2^j-1\}} \mathbb{P}_{j,k}$$

sur l'espace mesurable $(\Omega, \mathcal{F})$.

Proposition 3.5.1. *Les ensembles*

$$\{\vec{c} \in \Omega : \nu_{\vec{c}}(\alpha) \leq \nu(\alpha) \ , \forall \alpha \in \mathbb{R}\},$$
$$\{\vec{c} \in \Omega : \nu_{\vec{c}}(\alpha) \geq \nu(\alpha) \ , \forall \alpha \in \mathbb{R}\},$$
$$\{\vec{c} \in \Omega : \nu_{\vec{c}}(\alpha) = \nu(\alpha) \ , \forall \alpha \in \mathbb{R}\}$$

appartiennent à $\mathcal{F}$. En particulier, $S^\nu \in \mathcal{F}$ puisque

$$S^\nu = \{\vec{c} \in \Omega : \nu_{\vec{c}}(\alpha) \leq \nu(\alpha) \ , \forall \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

De plus, $\mathbb{P}(S^\nu) = 1$.

Démonstration. La démonstration de cette proposition se trouve dans l'article [7]. □

Par conséquent, le support de $\mathbb{P}$ est inclus dans S^ν et comme $S^\nu \in \mathcal{F}$, on peut restreindre $\mathbb{P}$ à S^ν.

Proposition 3.5.2. *Si $\vec{d} \in S^\nu$, alors*

$$\mathbb{P}(\{\vec{c} \in S^\nu : \nu_{\vec{c}-\vec{d}}(\alpha) = \nu(\alpha) \ , \forall \alpha \in \mathbb{R}\} = 1.$$

Démonstration. La démonstration de ce résultat se trouve dans [5]. □

Corollaire 3.5.3. *Si A est l'ensemble des suites $\vec{c}$ de S^ν pour lesquelles $\nu_{\vec{c}}$ ne coïncide pas avec ν, alors*

$$\mathbb{P}(\vec{d} + A) = 0$$

pour tout $\vec{d} \in S^\nu$.

Démonstration. En effet, pour tout $\vec{d} \in S^\nu$, nous avons

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\vec{d} + A) &= \mathbb{P}\left(\left\{\vec{c} \in S^\nu : \vec{c} - \vec{d} \in A\right\}\right) \\ &= 1 - \mathbb{P}\left(\left\{\vec{c} \in S^\nu : \nu_{\vec{c}-\vec{d}}(\alpha) = \nu(\alpha) \ , \forall \alpha \in \mathbb{R}\right\}\right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

A ce niveau, puisque S^ν n'est pas un espace métrique complet sous la topologie de la convergence ponctuelle, nous ne pouvons pas conclure immédiatement. Cependant, nous allons voir que $\mathbb{P}$ définit une mesure de probabilité borélienne sur l'espace métrique S^ν. Dans ce cas, les résultats précédents prouvent que l'ensemble de toutes les suites $\vec{c}$ de S^ν telles que $\nu_{\vec{c}} = \nu$ est prévalent.

Proposition 3.5.4. *Tous les ouverts de l'espace métrique S^ν appartiennent à $\mathcal{F}$.*

Démonstration. La preuve de cette proposition peut être trouvée dans l'article [5].

□

Puisque $\mathbb{P}(S^\nu) = 1$, cela implique que $\mathbb{P}$ est une mesure borélienne de probabilité sur l'espace métrique S^ν.

Corollaire 3.5.5. *L'ensemble de toutes les suites $\vec{c}$ de S^ν telles que $\nu_{\vec{c}} = \nu$ est prévalent.*

3.6 Les espaces S^ν et l'analyse multifractale

L'analyse multifractale s'intéresse à l'étude des signaux irréguliers. Pour de telles fonctions, cela n'a pas beaucoup d'intérêt de caractériser la régularité ponctuelle puisque celle-ci peut changer brutalement d'un point à l'autre. Il est plus intéressant de déterminer le spectre des singularités du signal, qui donne la "taille" de l'ensemble des points qui partagent une même régularité ponctuelle. Nous allons commencer par préciser ce que nous entendons par "régularité ponctuelle" et "taille d'un ensemble".

Définition 3.6.1. Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et $\alpha \geq 0$. Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ localement bornée appartient à l'espace $C^\alpha(x_0)$ s'il existe $R > 0$, $C > 0$ et P un polynôme de degré strictement inférieur à α tel que

$$|f(x) - P(x)| \leq C|x - x_0|^\alpha$$

si $|x - x_0| \leq R$. L'exposant de Hölder de f en x_0 est alors défini par

$$h_f(x_0) = \sup\{\alpha : f \in C^\alpha(x_0)\}.$$

L'analyse multifractale fournit une description de l'ensemble des exposants de Hölder d'une fonction localement bornée f au travers de son spectre des singularités. Celui-ci associe à toute valeur h la "taille" de l'ensemble des points pour lesquels l'exposant de Hölder de f est h. Dans ce contexte, la "taille" d'un ensemble est déterminée par sa dimension de Hausdorff, introduite ci-dessous.

Définition 3.6.2. Soient $B \subset \mathbb{R}$ et $\Lambda_\varepsilon(B)$ la collection de tous les recouvements dénombrables de B par des ensembles de diamètre inférieur à ε. Pour $\delta > 0$ et $\varepsilon > 0$, nous posons

$$\mathcal{H}^\delta_\varepsilon(B) = \left(\inf_{(B_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \Lambda_\varepsilon(B)} \sum_{j\in\mathbb{N}} \operatorname{diam}(B_j)^\delta \right).$$

La δ-diamétrale mesure de Hausdorff de B est définie par

$$\mathcal{H}^\delta(B) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \mathcal{H}^\delta_\varepsilon(B).$$

Remarque 3.6.3. Puisque $\mathcal{H}^\delta_\varepsilon$ est une fonction décroissante de ε, on a en fait

$$\mathcal{H}^\delta(B) = \sup_{\varepsilon>0} \mathcal{H}^\delta_\varepsilon(B)$$

pour toute partie B de $\mathbb{R}$.

Proposition 3.6.4. *Pour tout $\delta > 0$, la fonction $\mathcal{H}^\delta$ est une mesure extérieure sur $\mathbb{R}$ et définit une mesure sur $\mathbb{B}$.*

Démonstration. Il est clair que $\mathcal{H}^\delta_\varepsilon(\emptyset) = 0$ et que si $A \subset B$, alors $\mathcal{H}^\delta(A) \leq \mathcal{H}^\delta(B)$. Soient $\varepsilon > 0$, $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de sous-ensembles de $\mathbb{R}$ et $B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$. Soit $\eta > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, considérons un recouvrement dénombrable $(B_{n,j})_{j\in\mathbb{N}}$ de B_n tel que $B_{n,j}$ est de diamètre inférieur à ε pour tout $j \in \mathbb{N}$ et tel que

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} \operatorname{diam}(B_{n,j})^\delta < \mathcal{H}^\delta_\varepsilon(B_n) + \frac{\eta}{2^{n+1}}.$$

Alors $B \subset \bigcup_{j,n\in\mathbb{N}} B_{n,j}$ et donc

$$\mathcal{H}^\delta_\varepsilon(B) \leq \sum_{j,n\in\mathbb{N}} \operatorname{diam}(B_{n,j})^\delta \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{H}^\delta_\varepsilon(B_n) + \eta,$$

d'où la sous-additivité dénombrable de $\mathcal{H}^\delta_\varepsilon$ puisque $\eta > 0$ est arbitraire. Au vu de la remarque, nous avons donc

$$\mathcal{H}^\delta_\varepsilon(B) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{H}^\delta(B_n).$$

En passant à la limite pour $\varepsilon \to 0^+$, nous obtenons

$$\mathcal{H}^\delta(B) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{H}^\delta(B_n).$$

Par conséquent, $\mathcal{H}^\delta$ est une mesure extérieure sur $\mathbb{R}$.

Montrons à présent que la restriction de cette mesure extérieure à $\mathbb{B}$ est une mesure. Pour cela, il suffit de montrer qu'il s'agit d'une mesure extérieure métrique. Soient donc A et B deux parties de $\mathbb{R}$ telles que $d(A, B) > 0$. On a bien sûr

$$\mathcal{H}^\delta(A \cup B) \leq \mathcal{H}^\delta(A) + \mathcal{H}^\delta(B).$$

Il reste donc à montrer l'inégalité inverse. Soient $\varepsilon < \frac{d(A,B)}{2}$, $\eta > 0$ et $(C_k)_{k\in\mathbb{N}}$ un recouvrement de $A \cup B$ par des ensembles de diamètre inférieur à ε et tel que

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \operatorname{diam}(C_k)^\delta \leq \mathcal{H}^\delta_\varepsilon(A \cup B) + \eta.$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, C_k ne peut intercepter A et B. On peut donc extraire de la suite $(C_k)_{k\in\mathbb{N}}$ deux recouvrements disjoints de A et B en considérant d'une part, les éléments qui interceptent A, et d'autre part les autres. On en déduit que

$$\mathcal{H}^\delta_\varepsilon(A) + \mathcal{H}^\delta_\varepsilon(B) \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} \operatorname{diam}(C_k)^\delta \leq \mathcal{H}^\delta_\varepsilon(A \cup B) + \eta,$$

d'où

$$\mathcal{H}^\delta_\varepsilon(A) + \mathcal{H}^\delta_\varepsilon(B) \leq \mathcal{H}^\delta_\varepsilon(A \cup B)$$

puisque $\eta > 0$ est arbitraire. En passant à la limite pour $\varepsilon \to 0^+$, nous obtenons la conclusion. $\square$

Remarquons que pour toute partie B de $\mathbb{R}$, tout $\varepsilon > 0$ et tous $0 < \delta < \gamma$, nous avons

$$\mathcal{H}^\delta_\varepsilon(B) \geq \frac{\mathcal{H}^\gamma_\varepsilon(B)}{\varepsilon^{\gamma-\delta}}.$$

Par conséquent, $\mathcal{H}^\delta(B) < +\infty$ entraîne $\mathcal{H}^\gamma(B) = 0$ et $\mathcal{H}^\gamma(B) > 0$ entraîne $\mathcal{H}^\delta(B) = +\infty$. Il est donc naturel d'introduire la définition suivante.

Définition 3.6.5. La dimension de Hausdorff $\dim_\mathcal{H}(B)$ d'une partie B de $\mathbb{R}$ est définie par

$$\dim_\mathcal{H}(B) = \inf\{\delta > 0 : \mathcal{H}^\delta(B) = 0\}.$$

Remarque 3.6.6. Pour les ensembles non vides, la définition 3.6.5 de la dimension de Hausdorff est équivalente à

$$\dim_\mathcal{H}(B) = \sup\{\delta > 0 : \mathcal{H}^\delta(B) = +\infty\}.$$

Nous pouvons à présent introduire le spectre des singularités d'une fonction.

Définition 3.6.7. Le spectre des singularités d'une fonction localement bornée $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est défini par

$$d_f(h) = \dim_\mathcal{H}\{x \in \mathbb{R} : h_f(x) = h\}$$

pour tout $h > 0$.

Un formalisme multifractal est une formule qui permet de calculer numériquement le spectre des singularités d'une fonction f. La formule la plus répandue est le *formalisme multifractal thermodynamique*, qui permet d'obtenir une borne supérieure pour d_f.

Rappelons que si $\vec{c}$ est la suite des coefficients d'ondelettes de f, alors

$$\eta_{\vec{c}}(p) = \inf_{\alpha \geq \alpha_0} (\alpha p - \nu_{\vec{c}}(\alpha) + 1) = \sup\{s \in \mathbb{R} : \vec{c} \in b^{\frac{s}{p}}_{p,\infty}\}$$

pour tout $p > 0$. Il est montré dans [23] qu'il existe une unique valeur $p_{\vec{c}} > 0$ telle que $\eta_{\vec{c}}(p_{\vec{c}}) = 1$. Posons

$$d_1(h) = \min\left(\inf_{p \geq p_{\vec{c}}} (hp - \eta_{\vec{c}}(p) + 1), 1\right)$$

pour tout $h > 0$.

Ainsi, étant donné une fonction concave η, la connaissance de $\eta_{\vec{c}}(p) \geq \eta(p)$ pour tout $p \geq p_{\vec{c}}$ amène à

$$\vec{c} \in b^\eta := \bigcap_{p \geq p_{\vec{c}}} b^{\frac{\eta(p)}{p}}_{p,\infty},$$

vu la proposition 1.2.19, c'est-à-dire

$$f \in B^\eta := \bigcap_{p \geq p_{\vec{c}}} B^{\frac{\eta(p)}{p}}_{p,\infty}.$$

Il est connu ([22]) que si f est une fonction de Hölder uniforme, c'est-à-dire si $\vec{c} \in C^\alpha$ pour tout $\alpha > 0$, alors $d_f \leq d_1$.

Proposition 3.6.8. *Il existe un ensemble prévalent de B^η tel que pour tout f appartenant à cet ensemble*

$$d_f(h) = \begin{cases} \inf_{p\geq p_c}(hp - \eta(p) + 1) & \text{si cette borne est inférieure ou égale à } 1 \\ -\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Démonstration. Cette proposition est contenue dans l'article [15]. □

Ce résultat justifie la validité du formalisme thermodynamique, qui consiste à estimer le spectre des singularités d'une fonction f par d_1. Cependant, nous pouvons constater les limites de ce formalisme : au vu de sa définition, d_1 doit être concave et croissant. Or un spectre de singularités n'a pas de raison d'être concave ou croissant. Néanmoins, cette deuxième caractéristique peut être levée en utilisant un formalisme basé sur des "coefficients dominants" à la place des coefficients d'ondelettes ([29, 37]).

Nous allons à présent présenter un nouveau formalisme basé sur les espaces S^ν et permettant de détecter des spectres non-concaves. Nous justifierons ensuite sa validité au sens de la prévalence. Dans ce qui suit, l'espace S^ν sera considéré comme l'espace fonctionnel introduit initialement et non comme l'espace de suites de Ω associé. Nous supposerons également que $\alpha_{min} > 0$.

Proposition 3.6.9. *Soit $h_{max} := \inf_{h\geq\alpha_{min}} \frac{h}{\nu(h)}$. Pour tous $f \in S^\nu$ et $h \in \mathbb{R}$, nous avons*

$$d_f(h) \leq \begin{cases} h \sup_{h'\in]0,h]} \dfrac{\nu(h')}{h'} & \text{si } h \leq h_{max} \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Démonstration. Ce résultat est prouvé dans l'article [8]. □

Comme il est possible de calculer ν_f à partir des coefficients d'ondelettes de f et vu la définition de S^ν, nous proposons le nouveau formalisme multifractal suivant :

$$d_2(h) := \begin{cases} h \sup_{h'\in]0,h]} \dfrac{\nu_f(h')}{h'} & \text{si } h \leq h_{max} \\ 1 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $h_{max} := \inf_{h\geq\alpha_{min}} \frac{h}{\nu_f(h)}$. Au vu de la proposition, ce formalisme mène bien à une borne supérieure pour d_f. Comme dans le cas du formalisme multifractal thermodynamique, nous pouvons nous demander quand l'égalité a lieu. La proposition suivante montre que cela arrive pour un sous-ensemble prévalent de S^ν et justifie le formalisme présenté ici. La preuve de cette proposition se trouve dans [5].

Proposition 3.6.10. *Le sous-ensemble de* S^ν *formé des fonctions f telles que*

$$d_f(h) = \begin{cases} h \sup_{h'\in]0,h]} \dfrac{\nu(h')}{h'} & \text{si } h \leq h_{max} \\ -\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

où $h_{max} := \inf_{h\geq\alpha_{min}} \frac{h}{\nu(h)}$ est prévalent dans S^ν.

Bibliographie

[1] A. Arneodo, B. Audit, E.B. Brodie of Brodie, S. Nicolay, M. Touchon, Y. D'Aubenton-Carafa, et C. Thermes, *Encyclopedia of complexity and systems science*, ch. Fractals and wavelets : What can we learn on transcription and replication from wavelet-based multifractal analysis of DNA sequences ?, p. 3893–3924, R. A. Meyer, 2009.

[2] J.-M. Aubry et F. Bastin, *Advanced topology on the multiscale sequence spaces S^ν*, J. Math. Anal. Appl. **350** (2009), 439–454.

[3] ———, *A walk from multifractal analysis to functional analysis with S^ν spaces, and back*, Proceedings of the congress (Monastir, September 2007) "Fractals and Related Fields", 2009.

[4] ———, *Diametral dimension of some pseudoconvex multiscale spaces*, Studia Mathematica **197** (2010), 27–42.

[5] J.-M. Aubry, F. Bastin, et S. Dispa, *Prevalence of multifractal functions in S^ν spaces*, J. Fourier Anal. Appl. **13** (2007), 175–185.

[6] J.-M. Aubry, F. Bastin, S. Dispa, et S. Jaffard, *Topological properties of the sequence spaces S^ν*, J. Math. Appl. **321** (2006), 364–387.

[7] ———, *The spaces S^ν : New spaces defined with wavelet coefficients and related to multifractal analysis*, Int. J. Appl. Math. Stat. **7** (2007), 82–95.

[8] J.-M. Aubry et S. Jaffard, *Random Wavelet Series*, Commun. Math. Phys. **227** (2002), 483–514.

[9] A. Ayache et S. Jaffard, *Hölder exponents of arbitrary functions*, Rev. Math. Iberoamericana **1** (2010), 77–89.

[10] K.D. Bierstedt et J. Bonet, *Some aspects of the modern theory of Fréchet spaces*, Rev. R. Acad. Cien. Serie A. Mat. **97** (2003), n° 2, 159–188.

[11] N. Bourbaki, *Espaces vectoriels topologiques : chapitres 1 à 5*, 2e éd., Springer, Paris, 2007.

[12] M. Clausel et S. Nicolay, *A weak local irregularity property in S^ν spaces*, preprint.

[13] I. Daubechies, *Ten Lectures on Wavelets*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 1992.

[14] N. Dunford et J.T. Schwartz, *Linear Operators Part I : General Theory*, Interscience, New York, 1958.

[15] A. Fraysse et S. Jaffard, *How smooth is almost every function in a Sobolev space ?*, Rev. Mat. Iberoamericana **22** (2006), n^o 2, 663–683.

[16] L. Frerick et J. Wengenroth, *The strong dual of non locally convex Fréchet Schwartz spaces*, communication personnelle.

[17] U. Frish, *Turbulence*, Cambridge University Press, 1995.

[18] G. H. Hardy, *Weierstrass's non-differentiable function*, Trans. Amer. Math. Soc. **17** (1916), 301–325.

[19] B. R. Hunt, *The prevalence of continuous nowhere differentiable functions*, Proceedings of the American Mathematical Society **122** (1994), n^o 3, 711–717.

[20] B. R. Hunt, T. Sauer, et J. A. Yorke, *Prevalence : a translation-invariant "almost every" on infinite-dimensional spaces*, Bulletin of the American Mathematical Society **27** (1992), n^o 2, 217–238.

[21] S. Jaffard, *Functions with prescribed Hölder exponent*, Appl. Comput. Harmon. Anal **4** (1995), 400–401.

[22] ———, *Multifractal formalism for functions Part I : Results valid for all functions*, SIAM J. Math. Anal. **28** (1997), n^o 4, 944–970.

[23] ———, *On the Firsh-Parisi conjecture*, J. Math. Pures Appl. **79** (2000), n^o 6, 525–552.

[24] ———, *Beyond Besov Spaces, part I : Distribution of wavelets coefficients*, J. Fourier Anal. Appl. **10** (2004), n^o 3, 221–246.

[25] S. Jaffard et S. Nicolay, *Pointwise smoothness of space-filling functions*, Appl. Comput. Harmon. Anal. **26** (2009), 181–199.

[26] H. Jarchow, *Locally Convex Spaces*, Teubner, Stuttgart, 1981.

[27] G. Köthe, *Topological Vector Spaces I*, Springer-Verlag, New York, 1969, traduction de Topologische lineare Raume 1, Springer, Berlin, 1966.

[28] R. Lambert, *Bases inconditionnelles d'ondelettes dans $l^p(\mathbb{R})$*, Thèse de Maîtrise, Université de Liège, 2002.

[29] B. Lashermes, *Analyse multifractale pratique : coefficients dominants et ordres critiques*, Thèse de Doctorat, Ecole Nationale Supérieure de Lyon, 2005.

[30] S. Mallat, *A wavelet Tour of Signal Processing*, Academic Press, 1998.

[31] R. D. Mauldin, *The set of continuous nowhere differentiable functions*, Pacific J. Math. **83** (1979), 199–205.

[32] ———, *The set of continuous nowhere differentiable functions : A correction*, Pacific J. Math. **121** (1986), 119–120.

[33] R. Meise et D. Vogt, *Introduction to Functional Analysis*, Oxford graduate texts in mathematics ; 2, Oxford : Clarendon Press, 1997, traduction de Einfuhrung in die Funktionalanalysis, 1992, par M. S. Ramanujan.

[34] Y. Meyer, *Ondelettes et opérateurs*, vol. 1, Hermann, Paris, 1990.

[35] B. S. Mityagin, *Approximate dimension and bases in nuclear spaces*, Russian Math. Surveys **16** (1961), 59–127, traduction de Uspekhi Mat. Nauk 16 (1961), n°4, 63-132.

[36] S. Nicolay, *Théorie de la mesure*, notes de cours, Université de Liège.

[37] ______, *Analyse de séquences ADN par la transformée en ondelettes : extraction d'informations structurelles, dynamiques et fonctionnelles*, Thèse de Doctorat, Université de Liège, 2006.

[38] K. R. Parthasarathy, *Probability Measure on Metric Spaces*, Academic Press, 1967.

[39] W. Rudin, *Analyse réelle et complexe*, Masson, Paris, 1975.

[40] H. H. Schaefer, *Topological Vector Spaces*, Macmillan, New York, 1966.

[41] J. Schmets, *Analyse Fonctionnelle*, notes de cours, Université de Liège, 2004-2005.

[42] J.-P. Schneiders, *Analyse Fonctionnelle I*, prise de notes, Université de Liège, 2009-2010.

[43] H. Wendt, P. Abry, S. Jaffard, H. Ji, et Z. Shen, *Wavelet Leader Multifractal Analysis for Texture Classification*, IEEE Int. Conf. on Image Processing (Cairo, Egypt), 2009.

[44] Y. Yamasaki, *Measures on infinite dimensional spaces*, Series in Pure Mathematics, vol. 5, World Scientific, Singapore, 1985.

[45] K. Yosida, *Functional Analysis*, 2e éd., Springer-Verlag, Berlin, 1968.