L'addition est-elle "infiniment" associative ?

P. Dupont
H.E.C.•Liège

08/10/04

Il est bien connu que l'addition des réels jouit de la propriété d'associativité : pour tous a, b et $c \in \mathbf{R}$,

$$(a+b)+c = a+(b+c).$$

L'associativité générale s'en déduit aisément (par induction) : quel que soit le naturel n et quels que soient les réels a_1, a_2, ..., a_n, tous les parenthésages de la somme

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

auront la même valeur.

Mais qu'en est-il dans une somme d'une infinité de termes, lorsque la somme devient une série ? Les choses ne sont plus si simples, comme nous le verrons. Il est cependant nécessaire d'abord de préciser un certain nombre de notions et de notations.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ une suite dans $\mathbf{R}$. La *série associée* à cette suite, ou (de manière légèrement impropre) la *série de terme général* u_n, est la nouvelle suite $(s_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ définie par

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} u_k.$$

Pour la désigner, nous utiliserons l'une des notations

$$\sum_{n \in \mathbf{N}^*} u_n \qquad \text{ou} \qquad u_1 + u_2 + u_3 + \cdots, \tag{1}$$

"pour rappeler son mode de construction" ([1, p. 249]).

Si $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s \in \mathbf{R}$, nous dirons que la série *converge* et que s est sa *somme* ; nous noterons alors

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

Si $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \pm\infty$ ou si $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ n'existe pas, nous dirons que la série *diverge* ; le symbole $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ est dans ce cas dépourvu de sens.

Remarquons qu'il est aussi absurde de confondre une série et sa somme que de confondre une suite et sa limite. Voilà pourquoi nous distinguons soigneusement

$$\sum_{n\in\mathbf{N}^*} u_n \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

La question de l'associativité de l'"addition infinie" est donc la suivante : est-il permis d'introduire des groupements de termes dans une série ? Par exemple,

$$u_1 + (u_2 + u_3 + u_4) + (u_5 + u_6) + u_7 + \cdots \tag{2}$$

est-elle convergente si et seulement si (1) l'est, et dans ce cas leurs sommes coïncident-elles ? Il importe de se rendre compte que (2) désigne en fait une nouvelle série, $\sum_{n\in\mathbf{N}^*} v_n$, avec $v_1 = u_1$, $v_2 = u_2+u_3+u_4$, $v_3 = u_5+u_6$, etc... Précisons que nous ne considérerons ici que des groupements "de niveau 1", c'est-à-dire sans parenthèses emboitées. Mais une construction telle que

$$(u_1 + ((u_2 + u_3) + u_4)) + ((u_5 + u_6) + u_7 + u_8) + u_9 + \cdots$$

peut être étudiée par simple itération des résultats ci-dessous.

Une chose est d'ores et déjà claire ; la série $\sum_{n\in\mathbf{N}^*} v_n$ peut être convergente sans que $\sum_{n\in\mathbf{N}^*} u_n$ ne le soit : c'est le cas dans l'

Exemple 1 :

$$(1-1) + (1-1) + (1-1) + \cdots$$

est la série nulle, donc converge, et cependant elle est obtenue par groupements à partir de la série divergente

$$\sum_{n\in\mathbf{N}^*} (-1)^{n-1}.$$

(Cette série est divergente, parce que ses sommes partielles, qui valent alternativement 1 et 0, n'ont pas de limite.)

Le moment est venu de nous placer dans un cadre général. Soit $\sum_{n\in\mathbf{N}^*} u_n$ une série et $\sum_{n\in\mathbf{N}^*} v_n$ une série obtenue en y effectuant des groupements de termes. Pour chaque n, notons j_n le nombre (non nul) de termes dans le n^{e} groupe (autrement dit dans v_n) et k_n l'indice du premier terme de ce n^{e} groupe. (Remarquons au passage que les k_n se déduisent des j_n : $k_n = 1 + \sum_{l=1}^{n-1} j_l$; en particulier, $k_1 = 1$.) Ainsi,

$$v_n = \sum_{l=k_n}^{k_{n+1}-1} u_l. \tag{3}$$

En d'autres termes, $\sum_{n\in\mathbf{N}^*} v_n = v_1 + v_2 + v_3 + \cdots$ est la série

$$(\underbrace{u_1 + \cdots + u_{k_2-1}}_{j_1 \text{ termes}}) + (\underbrace{u_{k_2} + \cdots + u_{k_3-1}}_{j_2 \text{ termes}}) + (\underbrace{u_{k_3} + \cdots + u_{k_4-1}}_{j_3 \text{ termes}}) + \cdots \tag{4}$$

Convenons enfin de noter t_n les sommes partielles de $\sum_{n\in\mathbf{N}^*} v_n$:

$$t_n = \sum_{l=1}^{n} v_l.$$

L'observation-clé pour tout le reste du raisonnement est la suivante : *La suite $(t_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est une sous-suite de la suite $(s_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$.* (La suite $(b_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est une *sous-suite* de $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ s'il existe une injection croissante f de $\mathbf{N}^*$ dans $\mathbf{N}^*$ telle que, pour tout n, $b_n = a_{f(n)}$; cela revient à ce qu'il existe une partie P de $\mathbf{N}^*$ (en fait, $P = \operatorname{im} f$) telle que $(b_n)_{n\in\mathbf{N}^*} = (a_n)_{n\in P}$.) Ici, $t_n = s_{k_{n+1}-1}$.

Voici maintenant trois résultats positifs.

Proposition 1 *Si $\sum_{n\in\mathbf{N}^*} u_n$ est convergente, alors $\sum_{n\in\mathbf{N}^*} v_n$ est convergente et*

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

Proposition 2 *Si tous les termes de la série $\sum_{n\in\mathbf{N}^*} u_n$ sont positifs, alors $\sum_{n\in\mathbf{N}^*} u_n$ et $\sum_{n\in\mathbf{N}^*} v_n$ sont simultanément convergentes ou divergentes et, dans le premier cas,*

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

Proposition 3 *Si*
(a) $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$;
(b) *La suite $(j_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ des longueurs des groupes est majorée ;*

Alors $\sum_{n\in\mathbf{N}^*} u_n$ et $\sum_{n\in\mathbf{N}^*} v_n$ sont simultanément convergentes ou divergentes et, dans le premier cas,

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

La proposition 1 résulte tout simplement de ce que, lorsqu'une suite converge, toutes ses sous-suites convergent vers la même limite.

La proposition 2 se justifie, elle, en observant que pour une série à termes positifs, la suite des sommes partielles est croissante. Or, une suite croissante est convergente si et seulement si elle est majorée (auquel cas sa limite et son suprémum coïncident) et, si $(t_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est majorée, $(s_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ l'est également car, pour tout n, il existe n' tel que $s_n \leq t_{n'}$.

Voici enfin une démonstration de la proposition 3. Compte tenu de la proposition 1, il reste à montrer que, sous les hypothèses (a) et (b), si $\lim_{n\to\infty} t_n = t$, alors $\lim_{n\to\infty} s_n = t$, c'est-à-dire que

$$(\forall\, \varepsilon \in \mathbf{R}_+^*)\ (\exists\, n \in \mathbf{N}^*)\ (\forall\, m \geq n)\ |s_m - t| < \varepsilon.$$

Soit donc $\varepsilon > 0$.

- Comme $\lim_{n\to\infty} t_n = t$, il existe $n_1 \in \mathbf{N}^*$ tel que, pour tout $m \geq n_1$, $|t_m - t| < \varepsilon/2$.
- Par l'hypothèse (b), il existe j tel que $j \geq j_n$ pour tout n ; puisque les j_n ne sont pas nuls, j ne l'est pas non plus ; par l'hypothèse (a), il existe $n_2 \in \mathbf{N}^*$ tel que $|u_m| < \varepsilon/(2j)$ pour tout $m \geq n_2$.

Posons alors $n = \max\{k_{n_1+1}, n_2 + j\}$. Soit $m \geq n$. Ainsi, $k_{n_1+1} \leq n \leq m$. Soit m' le numéro du groupe auquel appartient u_m : autrement dit, m' est tel que $k_{m'} \neq m < k_{m'+1}$. Comme n_1+1 est le numéro du groupe contenant $u_{k_{n_1+1}}$, il suit que $n_1 + 1 \neq m'$. Alors,

$$\begin{aligned}|s_m - t| &= |u_1 + \cdots + u_m - t| \\ &= |u_1 + \cdots + u_{k_{m'}-1} + u_{k_{m'}} + \cdots + u_m - t| \\ &= |v_1 + \cdots + v_{m'-1} + u_{k_{m'}} + \cdots + u_m - t| \\ &= |t_{m'-1} - t + u_{k_{m'}} + \cdots + u_m| \\ &\leq |t_{m'-1} - t| + |u_{k_{m'}}| + \cdots + |u_m| \ ;\end{aligned}$$

puisque $m' - 1 \geq n_1$, le premier terme est strictement inférieur à $\varepsilon/2$; en outre, puisque $u_{k_{m'}}, \ldots, u_m$ appartiennent tous au même groupe, le nombre des termes $|u_{k_{m'}}|, \ldots, |u_m|$, égal à $m - k_{m'} + 1$, est inférieur à j. Donc, $k_{m'} \geq m - j + 1 > m - j \geq n - j \geq n_2$, et puisque $k_{m'}, \ldots, m \geq n_2$, chacun de ces derniers termes est strictement inférieur à $\varepsilon/(2j)$. Finalement,

$$|s_m - t| \leq |t_{m'-1} - t| + |u_{k_{m'}}| + \cdots + |u_m| < \frac{\varepsilon}{2} + j \times \frac{\varepsilon}{2j} = \varepsilon.$$

■

L'exemple 1 montre que l'hypothèse (a) ne peut être omise dans la proposition 3. L'hypothèse (b) ne peut pas l'être non plus, ainsi que le montre l'

Exemple 2. Soit la série

$$\sum_{n\in\mathbf{N}^*} u_n = 1 - 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{4} + \cdots \ ;$$

si nous y groupons les termes de la manière suivante :

$$\sum_{n\in\mathbf{N}^*} v_n = \\ = (1-1) + \left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\right) + \left(\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{4}\right) + \cdots,$$

nous obtenons la série nulle, convergente ; cependant, $\sum_{n\in\mathbf{N}^*} u_n$ elle-même est divergente, car les sommes partielles

$$\begin{aligned}&1-1, \\ &1 - 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}, \\ &1 - 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{4}, \\ &\ldots\end{aligned}$$

sont toutes nulles (ce sont précisément celles qui font partie de la sous-suite $(t_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$), tandis que les sommes partielles

$$\begin{aligned}
&1,\\
&1-1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2},\\
&1-1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{4},\\
&\ldots
\end{aligned}$$

valent toutes 1.

Une autre manière d'aborder le problème est de considérer, non plus *un* groupement de termes, mais *plusieurs* simultanément. Soit donc Λ un ensemble quelconque d'indices, fini ou infini.

Si, pour chaque $\lambda \in \Lambda$, $(j_n^\lambda)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est une suite dans $\mathbf{N}^*$, posons $k_n^\lambda = \sum_{l=1}^{n} j_l^\lambda$ et notons, comme en (3),

$$v_n^\lambda = \sum_{l=k_n^\lambda}^{k_{n+1}^\lambda - 1} u_l.$$

Considérons alors la famille des séries

$$\sum_{n\in\mathbf{N}^*} v_n^\lambda.$$

Soit encore $K = \left\{k_n^\lambda : \lambda \in \Lambda, n \in \mathbf{N}^*\right\}$.

Proposition 4 *Si $\mathbf{N}^* \setminus K$ est fini et si, pour tout $\lambda \in \Lambda$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n^\lambda = s$, alors $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = s$.*

En effet, si les sous-suites $(a_{f_\lambda(n)})_{n\in\mathbf{N}^*}$ (pour $\lambda \in \Lambda$) d'une même suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ convergent toutes vers une même limite a, et si $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{im}(f_\lambda)$ recouvre "presque tout" $\mathbf{N}^*$ (en ce sens que $\mathbf{N}^* \setminus \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{im}(f_\lambda)$ est fini), alors $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ existe et vaut a. ■

Exemple 3 : Si

$$(u_1 + u_2) + (u_3 + u_4) + (u_5 + u_6) + (u_7 + u_8) + \cdots$$

et

$$(u_1 + u_2 + u_3) + (u_4 + u_5) + (u_6 + u_7) + (u_8 + u_9) + \cdots$$

convergent et ont la même somme s, alors $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = s$. En effet, $K = \{1, 3, 5, 7 \ldots, 1, 4, 6, 8, \ldots\}$, et $\mathbf{N}^* \setminus K = \{2\}$ est bien fini.

Nous venons d'étudier ce qui se passe lorsque *différents* schémas de groupement des termes sont considérés dans *une* série $\sum_{n \in \mathbf{N}^*} u_n$. Étudions maintenant, au contraire, le résultat d'*un* schéma particulier de groupement des termes dans *différentes* séries. Nous obtenons alors une réciproque partielle de la proposition 3 :

Proposition 5 *Soit $(j_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ une suite de naturels non nuls. Si, quelle que soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ de limite nulle, la convergence de la série $\sum_{n \in \mathbf{N}^*} v_n$ qui s'en déduit par le processus* (3) *entraine celle de la série $\sum_{n \in \mathbf{N}^*} u_n$ elle-même, alors la suite $(j_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ est majorée.*

Pour prouver cette proposition, supposons la suite $(j_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ non bornée et construisons une suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ de limite nulle telle que $\sum_{n \in \mathbf{N}^*} v_n$ soit convergente et $\sum_{n \in \mathbf{N}^*} u_n$ divergente. L'idée de cette construction est, pour l'essentiel, celle qui se trouve dans l'exemple 2.

Puisque $(j_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ est non bornée, elle admet une sous-suite $(j_n)_{n \in P}$ qui croît vers $+\infty$. Les u_j qui se trouvent dans un groupe dont le numéro n'appartient pas à P sont choisis nuls. En ce qui concerne ceux qui se trouvent dans un groupe dont le numéro, n, appartient à P, nous prendrons les termes de la première moitié du groupe égaux à $1/j_n$ et ceux de la seconde moitié égaux à $-1/j_n$; si la longueur du groupe est impaire, le terme du milieu est laissé nul. Plus explicitement,

$$u_m = \begin{cases} 1/j_n & \text{si } k_n \leq m \leq k_n + \lfloor j_n/2 \rfloor - 1 \text{ et } n \in P \ ; \\ -1/j_n & \text{si } k_n + \lfloor (j_n+1)/2 \rfloor \leq m \leq k_n + j_n - 1 \text{ et } n \in P \ ; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors, dans la série $\sum_{n \in \mathbf{N}^*} u_n$, la suite des sommes partielles d'indices $k_n + \lfloor j_n/2 \rfloor - 1$ tend vers $\frac{1}{2}$, tandis que la suite des sommes partielles d'indices $k_n - 1$ est nulle. La série $\sum_{n \in \mathbf{N}^*} v_n$ est la série nulle. ■

Par exemple, si la suite des longueurs donnée pour les groupes est

$$(2, 1, 2, 2, 2, 3, 2, 4, 2, 5, \ldots),$$

nous pouvons prendre $P = 2\mathbf{N}^*$, ce qui donne

$$\sum_{n\in\mathbf{N}^*} u_n = 0+0+0+0+0+\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}+0+0+\tfrac{1}{3}+0-\tfrac{1}{3}+0+0+\cdots\ ;$$

alors,

$$\sum_{n\in\mathbf{N}^*} v_n =$$
$$= (0+0)+(0)+(0+0)+\left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\right)+(0+0)+\left(\tfrac{1}{3}+0-\tfrac{1}{3}\right)+(0+0)+\cdots$$

est bien la série nulle.

Bibliographie

[1] Jean Mawhin, *Analyse — Fondements, techniques, évolution*, De Boeck-Wesmael, Bruxelles, 1992.