

Délits-Mythes

Pascal DUPONT

[26/1/2007]

La notion de limite est, c'est enfoncer une porte béante que de le rappeler, des plus délicates. Alors qu'elle est déjà présente, implicitement, dans la mathématique grecque, essentiellement sous la forme de la méthode d'*exhaustion* d'Eudoxe, on considère généralement qu'il a fallu attendre la première moitié du XIX^e siècle et les écrits de Cauchy pour qu'en apparaisse une définition dont la rigueur satisfasse nos standards.

Or, nous avons à enseigner à des adolescents de seize ou dix-sept ans (parfois davantage, n'y insistons pas) ce concept que les plus grands génies du monde mathématique ont mis plus de vingt siècles à forger, puis à polir !

Est-ce donc que ce processus historique de maturation, de décanation, a fini par aboutir à une définition dont la simplicité et la transparence nous laissent pantois d'admiration ? Certes non, hélas...

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0) (\forall x \in \text{dom } f)$$

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Le voici, ce monstre... Lecteur, tu y es sans doute habitué ; le temps a fait son œuvre et tu peux sans malhonnêteté affirmer que tu maîtrises cette horrible formule. Mais essaie de te remettre dans la peau (ou dans la tête) de celui que tu étais il y a cinq, vingt ou cinquante ans, lorsque la bête t'est apparue pour la première fois. Ou

encore, pense à la perplexité dans laquelle t'a laissé, plus récemment, la lecture d'une phrase, en symboles ou en mots, au début de laquelle s'entassent comme ici trois quantificateurs. Tout mathématicien professionnel que tu sois, quel que soit le nombre d'années de cave durant lesquelles a bonifié ton expérience mathématique, tu dois bien t'avouer à toi-même (une autocritique publique ne te sera toutefois pas demandée ici) que face à un tel ennemi, il est nécessaire de ruser, tel le frère Horace survivant qui feint de fuir pour séparer ses ennemis Curiaces et n'en affronter qu'un à la fois.

Si une contrexpertise est nécessaire : pourrais-tu, du tac au tac, dire ce qu'exprime (pour $a \in \text{dom } f$ et $b \in \mathbf{R}$ fixés)

$$(\forall x \in \text{dom } f) (\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0) |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon,$$

qui ressemble pourtant de si près à la propriété encadrée quelques lignes plus haut ?

Bref, en un mot comme en mille vingt-quatre, la notion de limite est intrinsèquement difficile et si sa définition a gagné en précision, au fil de l'Histoire, elle n'a pas pour autant perdu en arduité.

Face à cette difficulté, une réponse possible est de faire, complètement ou presque, l'impasse sur les considérations théoriques pour se concentrer sur les techniques de calcul. (Je l'entends d'ici : "Notez la définition au cahier, c'est au programme, mais je ne vous le demanderai jamais, c'est promis !" !) Si je puis imaginer que, dans certaines classes, ce choix soit le seul possible, je pense qu'il est fortement regrettable. Dans le secondaire général, au moins, le caractère utilitaire des mathématiques n'en est qu'un des aspects, le caractère formatif de leur démarche étant tout aussi important. Or ici, peut-on prétendre que quiconque, dans la vie de tous les jours, aura à calculer des limites ? En tout cas pas en tant que telles. Ce ne peut donc être que la compréhension de l'originalité du concept qui en justifie l'enseignement. Reste donc à faire pénétrer au mieux ledit concept dans les têtes blondes (peut-on encore employer cette métaphore de nos jours ?) qui constituent nos classes.

Mon propos, ci-dessous, est de plaider pour une approche que j'ai partiellement expérimentée en classe. Sans prétendre à beaucoup

d'originalité, je pense utile de l'exposer en quelques pages, car ce qui me revient de l'enseignement secondaire, via des conversations ou la lecture de manuels, me laisse penser que, si elle n'est pas ignorée, elle reste cependant assez marginale — et est parfois, hélas, quelque peu malmenée.

Cette approche tient en deux idées :

- a) Il vaut mieux définir les limites de suites avant les limites de fonctions. Les suites devront de toute façon être introduites, par exemple pour établir les propriétés des suites arithmétiques ou géométriques. En outre, leur caractère discret les rend certainement plus abordables, plus tangibles que les fonctions. Ce caractère discret se prête également assez bien à des expérimentations numériques qui rendront concrètes les notions introduites.
- b) L'introduction de la notion de suite satisfaisant *presque* une propriété, c'est-à-dire la satisfaisant à partir d'un certain rang, permet de faire l'économie de deux quantificateurs dans la définition de limite. La ramener de trois quantificateurs à un seul, voilà un gain appréciable ! Et il ne s'agit pas, on le constate à l'usage, d'une simple escroquerie qui masque la difficulté. On a scindé celle-ci en deux parties qui sont réellement plus abordables. Cette seconde idée est sans doute un peu plus originale que la première.

Ci-dessous, je présente cette approche dans les grandes lignes, en insistant sur les idées et sur les considérations pédagogiques, mais sans guère d'éléments techniques, ni surtout de démonstrations.

Les détails se trouvent dans un autre texte, en chantier mais toutefois déjà relativement présentable. Il est écrit comme pour un enseignant, qui connaît déjà le sujet ; il ne s'agit pas d'un chapitre de manuel. Il donne tous les détails des démonstrations, de nombreux exemples, quelques exercices. En revanche, il ne contient pas de considérations méthodologiques ni, pour ainsi dire, de justification des idées développées. Autrement dit, il ne serait guère judicieux de le donner en pâture aux élèves. Nous considérons que chaque professeur qui voudrait s'en inspirer sera mieux à même que nous d'en donner

une présentation à ses élèves, en fonction de sa sensibilité propre et des connaissances et habitudes de sa classe. (Si je me laissais aller à jargonner, je parlerais ici du “dispositif pédagogique” ; mais nous sommes entre gens sérieux.) En ce qui concerne le contenu, j’ai inclus des résultats qui dépassent clairement le niveau des humanités, comme par exemple le théorème de Bolzano-Weierstrass : toute suite bornée possède une sous-suite convergente.

Ce texte, qui est donc toujours en évolution, je peux en envoyer une copie par courrier électronique, au format DVI (environ 125 ko) ou PDF (environ 2,6 Mo !), à qui m’en fera la demande. Mon adresse se trouve au bas de cet article.

1 Suites

On pourrait être tenté de ne donner de la notion de suite (réelle) qu’une idée intuitive, non formalisée : une “liste infinie” de réels. Je pense au contraire qu’il est important de définir une suite réelle comme une application de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{R}$, d’une part parce que cela peut contribuer à faire comprendre ce qu’est une fonction, et d’autre part (c’est le plus important, pour ce qui nous concerne ici) parce que cela “autorise” à en donner une représentation graphique¹.

Il importe sans doute de fournir aux élèves, d’emblée, une grosse liste d’exemples, qui serviront à illustrer le discours ultérieur. On variera la présentation : suites données par l’explicitation de leurs quelques premiers termes, suites données par l’expression du terme général en fonction de son indice. Passer de l’une à l’autre de ces descriptions est l’occasion —et nous ne manquerons pas d’y insister lourdement— de faire remarquer que, au petit jeu “Compléter la suite logique²” si courant dans les magazines, il est toujours possible de justifier n’importe quelle réponse. Exemple : Quel est le terme général de la suite $(1, 2, 4, 8, \dots)$? Indication : Il s’agit de la suite donnant

¹C’est d’ailleurs un bon moment pour faire remarquer que lorsque des données discrètes sont représentées graphiquement, relier les points du graphe par une ligne brisée est dépourvu de sens mathématique et ne se justifie que par une meilleure lisibilité du schéma.

²Pourquoi *logique*, après tout ?

le nombre maximal de régions en lequel n plans partagent l'espace euclidien. Réponse : La suite s'écrit $(\frac{1}{6}(n^3 + 5n + 6))_{n \in \mathbf{N}}$.

Nous montrerons aussi des descriptions inductives de suites. Ici encore, trouver l'expression du terme général sera un bon exercice — parfois difficile : penser à la suite de Fibonacci.

Cette liste d'exemples servira à illustrer différentes propriétés que l'on définira : suite croissante, suite constante, suite périodique, suite positive, suite bornée, suite dans E (où E est une partie de $\mathbf{R}$), ...

Le pas essentiel vient maintenant : définir ce que signifie "la suite s possède *presque* la propriété P ". C'est tout simplement que l'une des suites "tronquées" (ou "décalées") obtenues à partir de s , soit une suite du type $(s_{n+N})_{n \in \mathbf{N}}$, pour un certain naturel N , possède la propriété en question.

Ainsi, la suite $(|n - \frac{17}{2}|)_{n \in \mathbf{N}}$ est presque strictement croissante ; la suite $((2^n - 100)/2^n)_{n \in \mathbf{N}}$ est presque positive ; la suite des décimales de $7549/99\,000$ est presque périodique ; une suite presque majorée est tout simplement une suite majorée ; si une suite a presque la propriété P et qu'elle a presque la propriété P' , alors elle a presque la propriété $(P \text{ et } P')$. Posons $a_n = 1$ lorsque l'indice n est un nombre premier, et $a_n = 0$ dans le cas contraire : la suite $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est-elle presque constante ?

Les élèves ne manqueront pas d'être interloqués par le fait qu'une suite presque strictement négative peut avoir mille milliards de mille termes positifs. Mais que pèsent-ils face à l'infinité de termes qui les suivent ? Il faut cependant, c'est le point crucial, qu'à partir d'un certain rang, la propriété soit acquise, de manière définitive.

Avec ce langage, la définition de limite d'une suite est extrêmement aisée à formuler : le réel l est *limite* de la suite s (ou s *converge* vers l) si, pour tout intervalle ouvert I contenant l , s est presque dans I . Un seul quantificateur. Est-ce de l'arnaque ? Pas si la notion de propriété presque vraie a, préalablement, été apprivoisée par la manipulation d'exemples assez nombreux et variés.

Cette définition est-elle opérante ? Oui : on peut l'utiliser telle quelle pour démontrer très facilement, par exemple, l'unicité de la limite, les propriétés "arithmétiques" (entendez, limite d'une somme,

etc.), la conservation des inégalités, le théorème de l'étau... Ce n'est déjà pas rien ; c'est même probablement déjà trop, car en pratique, faute de temps ou de motivation, ces démonstrations sont presque toutes admises ; mais... celle du théorème de l'étau, par exemple, est si simple dans cette formulation-ci qu'il devient presque tentant de la donner.

L'unicité de la limite nous autorise à introduire un symbole pour la désigner. Si s converge vers l , nous écrirons $l = \lim s$; dans certains cas, comme pour parler de la limite de la suite $((n + (-1)^n)/n)_{n \in \mathbf{N}}$, si nous n'avons pas de raison par ailleurs de lui attribuer un nom, nous écrirons

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + (-1)^n}{n},$$

en faisant usage d'une variable muette, ce qui est un pis-aller : il vaut toujours mieux l'éviter³. Remarquons encore un petit danger : il est clair qu'avant de pouvoir utiliser l'assemblage " $\lim s$ ", il faut s'assurer, ou prendre comme hypothèse, que cette limite existe. N'écrivons pas " $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n$ n'existe pas"⁴, mais bien "la suite $((-1)^n)_{n \in \mathbf{N}}$ n'a pas de limite", ou "la suite $((-1)^n)_{n \in \mathbf{N}}$ diverge".

À un moment donné, il faudra bien montrer l'équivalence de notre définition avec celle en ε - n que l'on trouve le plus communément, ne serait-ce que pour ne pas nous couper du reste du monde. Ceci est également très aisé.

Les limites infinies sont introduites de manière tout à fait analogue. On peut alors définir la droite numérique achevée $\overline{\mathbf{R}}$ et y prolonger, partiellement, les quatre opérations de $\mathbf{R}$.

2 Continuité

Faut-il introduire la continuité en s'appuyant sur la notion de limite ou l'inverse ? Encore un vieux débat ! Mon avis : ni l'un ni l'autre.

³Nous le faisons cependant couramment en écrivant $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$.

⁴*Horresco referens*, on voit pire encore : les mots "n'existe pas" sont parfois remplacés par un symbole dévoyé, un quantificateur barré. Même pour le dénoncer, je n'oserais pas reproduire ici cet assemblage contre nature. Ne confondons pas mathématique et sténographie.

Introduisons ces deux concepts indépendamment l'un de l'autre, pour donner aux élèves deux chances de comprendre au lieu d'une seule. Ensuite seulement, nous établirons les liens. Mais, le temps étant linéaire, il faut bien, pour l'exposé, en choisir un premier. Je commence par la continuité, car ce paragraphe est plus bref, et la coupure avant de revenir aux limites de fonctions est donc moins marquée.

Si a est un point du domaine A d'une fonction f , nous dirons que f est *continue* au point a si elle transforme toute suite dans A convergeant vers a en une suite convergeant vers $f(a)$. C'est simple et naturel : une propriété de préservation, qu'on pourra rappeler, pour comparaison, lorsqu'on définira une fonction (strictement) croissante comme une fonction préservant les inégalités (strictes).

Les propriétés de continuité d'une somme, d'un produit, d'une composée de fonctions (etc.) sont des conséquences parfaitement banales des règles de calcul de limites de suites.

Pour en terminer avec la continuité : une fonction $f : A \rightarrow \mathbf{R}$ sera dite *continue* (tout court) si elle est continue en chaque point de A ; ceci revient à dire que pour chaque suite convergente s dans A , $f(s)$ est convergente et que $\lim f(s) = f(\lim s)$.

3 Limite d'une fonction en un point

La manière de définir la notion de limite d'une fonction en un point est maintenant presque évidente : soit $f : A \rightarrow \mathbf{R}$, où $A \subseteq \mathbf{R}$, soit a et b deux éléments de la droite numérique achevée, avec a adhérent à A ; b est *limite* de f en a si f transforme en une suite de limite b toute suite dans A de limite a .

Après avoir prouvé l'unicité de la limite (rien de plus facile !), on peut introduire la notation $\lim_a f$ pour la limite, si elle existe ; au besoin, on notera $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ (mais pas, de grâce, $\lim_a f(x)$; voir [2]).

Remarquons que dans le cas où a appartient au domaine A de f , si la limite existe, elle ne peut valoir que $f(a)$, puisque parmi les suites dans A convergeant vers a il y a la suite constante $(a)_{n \in \mathbf{N}}$, dont la transformée par f est la suite constante $(f(a))_{n \in \mathbf{N}}$, qui converge

évidemment vers $f(a)$. Donc f est continue en a si et seulement si $a \in A$ et que $\lim_a f$ existe.

Le lecteur attentif (le lecteur, veux-je dire ; il est impensable qu'un lecteur qui m'a suivi jusqu'ici soit distrait) aura remarqué que la notion de limite évoquée ici est la notion de limite que j'appellerai *inclusive*, car elle prend en compte la valeur de f en a ; par opposition, la limite *exclusive* (elle est parfois aussi appelée limite *pointée*, me semble-t-il) ignore complètement la valeur, et même l'existence, de $f(a)$.

Voici quelques arguments en faveur de ce choix.

- La définition de limite inclusive est plus simple et plus naturelle. Exclure le point a apparaît comme arbitraire dans la formulation.
- C'est la notion de limite inclusive que l'on utilise en topologie générale.
- La notion de limite inclusive jouit d'un meilleur résultat que la limite exclusive en ce qui concerne la limite d'une composée. (Voir plus bas.)
- Il est plus facile de définir la notion de limite exclusive à partir de la notion de limite inclusive que l'inverse : la limite exclusive de f en a n'est autre que la limite (inclusive) en a de la restriction $f|_{A \setminus \{a\}}$.
- Lorsqu'on utilise la notion de limite exclusive, la condition préalable n'est pas que a soit adhérent à A , mais qu'il en soit un point d'accumulation ; cette notion est plus compliquée à introduire aux élèves.
- De toute manière, en pratique, on calcule des limites en des points où la fonction n'est pas définie, donc les deux notions se rejoignent ; la discussion n'a qu'une importance théorique.

Mais foin de ces querelles d'école (!).

On montre sans grande difficulté que, lorsque a et b sont réels,

$$\lim_a f = b \Leftrightarrow \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0) (\forall x \in \text{dom } f) |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon :$$

c'est la fameuse définition en ε - δ rappelée en introduction. Le lecteur

partisan de la limite exclusive aura sursauté. Des caractérisations analogues sont disponibles pour les cas où a ou b sont infinis.

Les justifications de tous les résultats sur la limite d'une somme, d'une différence, etc., sont réduites à deux fois rien, car le gros du travail (et encore n'est-ce qu'un petit gros) a été fait lorsque nous avons prouvé les résultats correspondants sur les suites.

Un autre exemple.

Proposition. Soit f et g deux fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ ainsi que $a \in \text{adh}(f^{-1}[\text{dom } g])$ et $b, c \in \mathbf{R}$. Si $\lim_a f = b$ et si $\lim_b g = c$, alors $\lim_a (g \circ f) = c$.

Autrement dit :

$$\lim_a (g \circ f) = \lim_{(\lim_a f)} g.$$

DÉMONSTRATION. Le domaine de $g \circ f$ est $f^{-1}[\text{dom } g]$, donc, par hypothèse, a lui est bien adhérent. De plus si s est une suite dans ce domaine, telle que $\lim s = a$, alors $f(s)$ est une suite dans $\text{dom } g$, tendant vers b ; dès lors, $\lim (g \circ f)(s) = \lim g(f(s)) = c$. ■

REMARQUE : Avec la notion de limite exclusive, cette proposition n'est plus vraie. Voici des exemples montrant les deux problèmes qui peuvent se produire. Notons $\lim_a^* f$ la limite exclusive de f en a .

a) Soit

$$f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} : x \mapsto \lfloor x \rfloor$$

la fonction “partie entière”, qui applique x sur le plus grand entier qui lui est inférieur et

$$g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} : \begin{cases} x \mapsto 0 \text{ si } x \neq 0, \\ 0 \mapsto 1 ; \end{cases}$$

alors, $\lim_{1/2}^* f = 0$; $\lim_0^* g = 0$; cependant, $\lim_{1/2}^* (g \circ f) = 1 \neq \lim_0^* g$. Noter que $\lim_{1/2}^* (g \circ f) = g(0)$.

b) Soit

$$f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} : \begin{cases} x \mapsto x \text{ si } x \in \mathbf{Q}, \\ x \mapsto 0 \text{ si } x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} \end{cases}$$

et

$$g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} : \begin{cases} x \mapsto 0 \text{ si } x \neq 0, \\ 0 \mapsto 1 ; \end{cases}$$

alors, $\lim_0^* f = 0$; $\lim_0^* g = 0$; cependant, $g \circ f$ n'a pas de limite exclusive en 0.

Ces deux exemples sont tirés de [3] ; ils n'ont malheureusement pas été repris dans [4].

D'autres propriétés classiques que nous sommes tentés de mentionner ici (théorème de l'étau, conservation des inégalités, ...) ne sont que des généralisations de propriétés déjà rencontrées pour les suites, et leur démonstration est immédiate, compte tenu du cas particulier déjà connu.

Voici. Nos élèves sont maintenant armés pour entamer le processus d'intériorisation qui les mènera, s'ils continuent à réfléchir à ces questions, à s'approprier la notion de limite, à en faire un être familier, qu'ils auront l'impression de maîtriser... jusqu'au moment peut-être où ils étudieront les fonctions de plusieurs variables.

Pour l'heure, place à la pratique. Nous avons établi des règles de calcul, utilisons-les pour calculer des “vraies valeurs”. Nos élèves — les naïfs ! — trouvent tellement plus rassurant de calculer que de raisonner...

Bibliographie

- [1] Jaime CAMPOS FERREIRA, *Introdução à Análise Matemática*, 7^a edição, Fundação Calouste Gulbenkian, Lisbonne, 1999. — Une introduction à l'étude des fonctions réelles d'une variable réelle, rédigée avec grand soin, et qui privilégie une approche fort voisine de la nôtre.
- [2] Pascal DUPONT, *Motus!*, Bull. APMEP **390** (1993), 453–460.
- [3] Jean MAWHIN, *Introduction à l'analyse*, Cabay, Louvain-la-Neuve, 1980.
- [4] Jean MAWHIN, *Analyse — Fondements, techniques, évolution*, De Boeck-Wesmael, Bruxelles, 1992.