Histoires d'e

Pascal Dupont
Faculté universitaire des Sciences agronomiques de Gembloux

25 aout 1996

Dans les cours d'analyse, le nombre e est parfois défini comme la limite de la suite $\left\langle 2, \left(\frac{3}{2}\right)^2, \left(\frac{4}{3}\right)^3, \left(\frac{5}{4}\right)^4, \dots \right\rangle$:

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

et parfois comme la somme illimitée

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots \ ;$$

l'équivalence de ces deux définitions, si elle n'est pas très compliquée à montrer, n'est pas non plus évidente. En outre, la plupart des textes d'analyse ne l'établissent pas directement : elle résulte par exemple, comme sous-produit, du développement de l'exponentielle en série de Maclaurin. Cette courte note a pour objet de montrer, d'abord, que les deux définitions ont un sens, c'est-à-dire que la limite existe et que la série converge, et ensuite que leurs valeurs coïncident. Elle est inspirée de [3], un petit livre peu connu, et cependant fort recommandable.

1. Posons, pour $n > 0$, $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ et, pour faire joli, $a_0 = 1$. Le premier de nos buts est de montrer que la suite $\langle a_n \rangle_{n\in\mathbf{N}}$ est convergente.

Considérons également la série $1 + 1 + \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{3!} + \dots$, c'est-à-dire (voir l'encadré "Les séries") la suite $\langle s_n \rangle_{n\in\mathbf{N}}$ des sommes partielles $s_n = = 1 + 1 + \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{3!} + \dots + \dfrac{1}{n!}$. Notre deuxième but est de montrer que cette suite $\langle s_n \rangle_{n\in\mathbf{N}}$ est elle aussi convergente ; notre troisième but est de montrer que les limites de ces deux suites sont les mêmes.

Les séries
L'algèbre nous apprend ce qu'est la somme de deux nombres. Il est ensuite possible de définir, de proche en proche, des sommes de trois termes, de quatre termes, ..., et ainsi nous sommes à même d'additionner n'importe quel nombre fini de termes. Mais la somme d'une série, c'est-à-dire d'une infinité de termes, c'est une autre histoire ! La solution repose sur le concept de limite : il ne s'agit donc plus d'algèbre, mais d'analyse. Ainsi, pour définir la somme de la série $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$, *on calcule d'abord les* sommes partielles $s_1 = a_1$, $s_2 = a_1 + a_2$, $s_3 = a_1 + a_2 + a_3$, *etc. ; ce qu'on appelle* somme de la série, *c'est alors la limite de ces sommes partielles :* $s = \lim_{n\to\infty} s_n$. *Mais ceci nécessite des précautions : une limite, cela n'existe pas toujours ; donc les séries n'auront pas toutes de somme. Celles qui en ont une sont dites* convergentes.

2. D'après le théorème du binome,

$$a_n = \binom{n}{0}\left(\frac{1}{n}\right)^0 + \binom{n}{1}\left(\frac{1}{n}\right)^1 + \cdots + \binom{n}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^n,$$

où $\binom{n}{k}$ est le coefficient binomial : $\binom{n}{k} =$

Le symbole de sommation
Que signifie une construction telle que $$\sum_{k=1}^{n} a_k \text{ ?}$$ *Tout simplement ceci : dans le* terme général a_k, *nous devons remplacer l'*indice de sommation k *successivement par toutes les valeurs entières comprises entre les deux bornes indiquées, ici* 1 *et* n *; ceci nous fournit successivement les termes* $a_1, a_2, \ldots, a_n$, *qu'il ne nous reste plus qu'à additionner. Ainsi, l'expression ci-dessus ne représente rien d'autre que* $$a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$ *Pour ceux qui ont la fibre informatique, on peut encore dire que* $\sum_{k=1}^{n} a_k$ *est la valeur de la variable* s *après exécution du petit programme suivant :* $s \leftarrow 0$; *pour* k *de* 1 *à* n, $s \leftarrow s + a_k$.

$= \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ si $k \leqslant n$ et $\binom{n}{k} = 0$ si $k > n$. Si n et k sont deux naturels, posons donc

$$b_{n,k} = \binom{n}{k} / n^k,$$

de sorte que

$$a_n = b_{n,0} + b_{n,1} + \cdots + b_{n,n} = \sum_{k=0}^{n} b_{n,k}.$$

Si $k = 0$, $b_{n,0} = 1$, tandis que si $k > 0$,

$$\begin{aligned} b_{n,k} &= \frac{n(n-1)\cdots(n-(k-1))}{k!\,n^k} \\ &= \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \ ; \end{aligned}$$

en particulier, $b_{n,k} = 0$ dès que $k > n$. [Suggestion au lecteur : Dressez une table à double entrée de ces nombres $b_{n,k}$, par exemple pour n et $k \leqslant 5$ ou 6 ; vous "sentirez" ainsi beaucoup mieux la suite de l'argumentation. (Cette table est vraiment admirable, mais la colonne est trop étroite pour que je puisse l'y consigner.)]

Ces coefficients jouissent encore des propriétés suivantes :

(1) Pour tous n et k, $b_{n,k} \leqslant b_{n+1,k}$;

(2) Pour tous n et k, $b_{n,k} \leqslant 1/k!$;

(3) Pour tout k, $\lim\limits_{n\to\infty} b_{n,k} = 1/k!$.

Les deux premières propriétés découlent directement, lorsque $k > 0$, de ce que

$$1 - \frac{j}{n} \leqslant 1 - \frac{j}{n+1} \leqslant 1$$

pour tous $n \in \mathbf{N}$ et $j \in \{1, 2, \ldots, k-1\}$, et la troisième de ce que $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \dfrac{j}{n}\right) = 1$ pour tout $j \in \{1, 2, \ldots, k-1\}$.

3. Comme chacun des termes de la série est positif, la suite $\langle s_n \rangle_{n\in\mathbf{N}}$ est croissante.

D'après la propriété (1) ci-dessus,

$$\begin{aligned} a_n = \sum_{k=0}^{n} b_{n,k} \leqslant \sum_{k=0}^{n} b_{n+1,k} \leqslant \\ \leqslant \sum_{k=0}^{n+1} b_{n+1,k} = a_{n+1}, \end{aligned}$$

donc la suite $\langle a_n \rangle_{n\in\mathbf{N}}$ est également croissante.

D'après la propriété (2) ci-dessus, et en tenant compte que $k! = 2 \times 3 \times \cdots \times k \geqslant 2^{k-1}$ pour tout $k > 0$: d'abord,

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} b_{n,k} \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = s_n \ ;$$

ensuite,

$$\begin{aligned} s_n \leqslant 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} \overset{(*)}{=} 1 + \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} \leqslant \\ \leqslant 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 3 \end{aligned}$$

(on a utilisé pour $(*)$ la règle de sommation d'une suite géométrique : $1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-1} = (1-r^n)/(1-r)$) ; donc les suites $\langle s_n \rangle_{n \in \mathbf{N}}$ et $\langle a_n \rangle_{n \in \mathbf{N}}$ sont majorées.

Or, un théorème d'analyse affirme que *Dans* **R***, toute suite croissante et majorée est convergente.* (On se souvient que cette propriété distingue de manière essentielle les réels des rationnels !) Des deux observations précédentes, il résulte donc que ces deux suites sont convergentes : nous noterons, provisoirement :

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

et

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

Comme, pour tout n, $a_n \leqslant s_n \leqslant 3$, ces deux limites satisfont : $a \leqslant s \leqslant 3$.

4. Introduisons encore

$$c_{n,m} = b_{n,0} + b_{n,1} + \cdots + b_{n,m}.$$

Ainsi, $a_n = c_{n,n}$; en fait, puisque $b_{n,k} = 0$ lorsque $k > n$, $a_n = c_{n,m}$ pour tout $m \geqslant n$; de là (puisque tous les $b_{n,k}$ sont positifs), pour tout $m \in \mathbf{N}$, $a_n \geqslant c_{n,m}$.

Dès lors, et en utilisant la propriété (3) plus haut,

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n \geqslant \lim_{n\to\infty} c_{n,m} = \sum_{k=0}^{m} \lim_{n\to\infty} b_{n,k} = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} = s_m,$$

quel que soit m ; il en résulte que $a \geqslant \lim_{m\to\infty} s_m = s$.

Ceci, avec l'inégalité en sens inverse, établie plus haut, montre que $a = s$; depuis Euler, au XVIII$^{\text{e}}$ siècle (à ce sujet, voir par exemple [1] ou, pour davantage de détails, [2]), la valeur commune de ces deux limites est traditionnellement notée e, initiale de *exponentielle* — ou, comme de petits futés le font malicieusement remarquer, de *Euler* !

Références

[1] Stella Baruk, *Dictionnaire de mathématiques élémentaires*, Seuil, Paris, 1992

[2] Carl B. Boyer, *A History of Mathematics*, Princeton University Press, Princeton, 1985

[3] Jacques Douchet, Bruno Zwahlen, *Calcul différentiel et intégral, 1 — Fonctions d'une variable réelle*, Presses polytechniques romandes, Lausanne, 1983