Surjections

Pascal Dupont

Mots clés : surjection, ensemble, coefficients binomiaux, récurrence.

Notre but apparent, dans cette petite note, est de montrer que le nombre de surjections d'un ensemble A à a éléments dans un ensemble B à b éléments est donné par :

$$\mathrm{Surj}(a,b) = \sum_{0 \leqslant k \leqslant b} (-1)^k \binom{b}{k} (b-k)^a. \tag{1}$$

Cette formule, par exemple, nous permettrait de résoudre le problème suivant ([1]) : *Le gérant d'un restaurant ouvert tous les jours décide, chaque samedi soir, du programme des plats du jour pour la semaine qui suit ; les plats du jour possibles sont : truite meunière, choucroute garnie, onglet à l'échalote et poulet au riesling, chacun de ces plats devant apparaitre au moins une fois dans la semaine. De combien de manières le programme hebdomadaire peut-il être constitué ?*

Nous ne nous contenterons pas, cependant, d'aller droit sur l'objectif : le paysage est suffisamment joli pour justifier quelque flânerie. L'autoroute, ce sera pour une autre fois.

C'est en fait à trois petites excursions que nous vous invitons, par trois itinéraires de même but, qui nous aideront à mieux connaitre la contrée. Au cours de chacune de ces balades, comme de juste, nous ne nous priverons pas de nous laisser tenter par de petites curiosités qui « méritent un détour ».

En termes moins imagés : l'intérêt de ce texte n'est certes pas à chercher dans cette relation (1), qui n'est guère qu'un prétexte —si elle n'est pas archi-connue, elle n'est cependant pas originale, tant s'en faut ([2]) —, mais plutôt dans les méthodes mises en œuvre pour la prouver ; si la première est on ne peut plus routinière, mentionner les deux autres, moins classiques, est peut-être intéressant.

Rappelons, à toutes fins utiles, qu'une *surjection* (ou application *surjective*) de A dans B est une application $f : A \to B$ telle que $\operatorname{im} f = B$; autrement dit, tout élément du codomaine B est « atteint » par f ; ou encore : pour tout $b \in B$, l'équation $f(a) = b$, d'inconnue $a \in A$, admet (au moins) une solution.

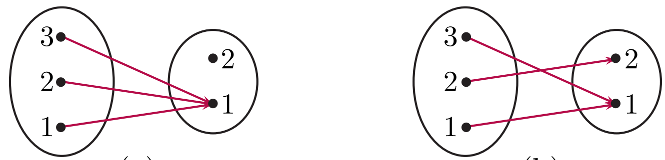
Si le calcul du nombre d'applications d'un ensemble dans un autre résout le problème des arrangements avec répétitions (*Combien de « mots » de six lettres peut-on écrire avec les cinq voyelles A, E, I, O et U ?* — Réponse $5^6 = 15\,625$), celui du nombre de surjections fournit la solution d'un problème plus difficile : *Combien de « mots » de six lettres peut-on écrire avec les cinq voyelles A, E, I, O et U, si chaque voyelle doit apparaitre au moins une fois ?* — Réponse 1800).

Pour a et b petits, les valeurs de $\mathrm{Surj}(a,b)$ se déterminent par énumération, et quelques minutes suffisent pour construire le fragment de table ci-dessous : il est clair en effet que $\mathrm{Surj}(a,b) = 0$ si

([1]) Ce problème a été choisi pour vous mettre l'eau à la bouche.
([2]) Et qui plus est, elle n'est guère pratique. Une formule *fermée*, c'est-à-dire sans somme d'un nombre variable de termes, serait de loin préférable ; mais à notre connaissance, aucune n'est disponible.

$a < b$ ou si $a > b = 0$; que $\mathrm{Surj}(a, 1) = 1$ pour tout $a > 0$; et que $\mathrm{Surj}(a, a) = a!$ pour tout a. Seuls restent donc à dénombrer $\mathrm{Surj}(3, 2)$, $\mathrm{Surj}(4, 2)$ et $\mathrm{Surj}(4, 3)$.

À titre d'exemple : Il y a $2^3 = 8$ applications de $\{1, 2, 3\}$ dans $\{1, 2\}$. Parmi celles-ci, les deux applications constantes ne sont pas surjectives. Les autres (soit 6 d'entre elles) le sont.



(a) (b)

Tout ceci nous donne finalement l'embryon de table :

$\mathrm{Surj}(a,b)$	$b = 0$	1	2	3	4
$a = 0$	1	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0
2	0	1	2	0	0
3	0	1	6	6	0
4	0	1	14	36	24

Les méditations qui nous ont mené à ces valeurs nous auront aussi fait prendre conscience de ceci : si B possède deux éléments, une surjection de A dans B est déterminée par la partie de A qui sera l'image réciproque du premier d'entre eux, partie qui ne peut ni être vide, ni être A tout entier. Donc,

$$\mathrm{Surj}(a, 2) = 2^a - 2$$

si $a > 0$ (et $\mathrm{Surj}(0, 2) = 2^0 - 1\,!$).

Approche par récurrence

Supposons A et B non vides et choisissons dans le premier un élément $*$; notons $A' \coloneqq A \setminus \{*\}$. Les surjections de A dans B se partagent en deux catégories disjointes : celles dont la restriction à A' est déjà surjective et celles dont la restriction à A' ne l'est pas.

– Pour construire une surjection de la première catégorie, nous procédons de la manière suivante : nous choisissons une surjection de A' dans B ($\mathrm{Surj}(a-1, b)$ choix possibles) et un élément de B sur lequel appliquer $*$ (b choix possibles) ; il y a donc $b \cdot \mathrm{Surj}(a-1, b)$ surjections dans la première catégorie.
– Pour construire une surjection de la deuxième catégorie, nous devons d'abord fixer un élément de B, qui ne sera pas atteint par la restriction de notre surjection à A' (b choix possibles), puis une surjection de A' dans B privé de cet élément ($\mathrm{Surj}(a-1, b-1)$ choix possibles) ; il y a donc $b \cdot \mathrm{Surj}(a-1, b-1)$ surjections dans la seconde catégorie.

Le nombre de surjections de A dans B s'obtient alors en additionnant les effectifs des deux catégories :

$$\mathrm{Surj}(a, b) = b\left(\mathrm{Surj}(a-1, b-1) + \mathrm{Surj}(a-1, b)\right). \tag{2}$$

Par exemple, dans la table ci-dessus, nous vérifions que

$$\mathrm{Surj}(4, 3) = 36 = 3 \times (6 + 6) = 3(\mathrm{Surj}(3, 2) + \mathrm{Surj}(3, 3)).$$

Pour prouver l'égalité (1), il suffit donc de montrer d'une part que les expressions $\mathrm{S}(a,b) \coloneqq \sum_{0\leqslant k\leqslant b}(-1)^k\binom{b}{k}(b-k)^a$ figurant dans son membre de droite coïncident avec les $\mathrm{Surj}(a,b)$ lorsque l'un des arguments au moins est nul et d'autre part qu'elles satisfont la même relation de récurrence.

1. $\mathrm{S}(0,0) = \sum_{0\leqslant k\leqslant 0}(-1)^k\binom{0}{k}(0-k)^0 = (-1)^0\binom{0}{0}0^0 = 1 = \mathrm{Surj}(0,0)$.
2. Si $a > 0$,
$\mathrm{S}(a,0) = \sum_{0\leqslant k\leqslant 0}(-1)^k\binom{0}{k}(0-k)^a = (-1)^0\binom{0}{0}0^a = 0 = \mathrm{Surj}(a,0)$.
3. Si $b > 0$,
$\mathrm{S}(0,b) = \sum_{0\leqslant k\leqslant b}(-1)^k\binom{b}{k}(b-k)^0 = \sum_{0\leqslant k\leqslant b}(-1)^k\binom{b}{k} = (1-1)^b = 0 = \mathrm{Surj}(0,b)$, en utilisant la formule du binôme.
4. Si $a > 0$ et $b > 0$,

$$
\begin{aligned}
&b\left(\mathrm{S}(a-1,b-1)+\mathrm{S}(a-1,b)\right) = \\
&\quad = b\left(\sum_{0\leqslant k\leqslant b-1}(-1)^k\binom{b-1}{k}(b-k-1)^{a-1} + \sum_{0\leqslant k\leqslant b}(-1)^k\binom{b}{k}(b-k)^{a-1}\right) \\
&\quad = b\left(\sum_{0\leqslant k\leqslant b-1}(-1)^k\binom{b-1}{k}(b-k-1)^{a-1} + b^{a-1} + \sum_{1\leqslant k\leqslant b}(-1)^k\binom{b}{k}(b-k)^{a-1}\right) \\
&\quad = b^a + b\left(\sum_{1\leqslant k\leqslant b}(-1)^{k-1}\binom{b-1}{k-1}(b-k)^{a-1} + \sum_{1\leqslant k\leqslant b}(-1)^k\binom{b}{k}(b-k)^{a-1}\right) \\
&\quad = b^a + b\sum_{1\leqslant k\leqslant b}(-1)^k\left[\binom{b}{k} - \binom{b-1}{k-1}\right](b-k)^{a-1} \\
&\quad = b^a + \sum_{1\leqslant k\leqslant b}(-1)^k b\binom{b-1}{k}(b-k)^{a-1} \\
&\quad = b^a + \sum_{1\leqslant k\leqslant b}(-1)^k\binom{b}{k}(b-k)^a \\
&\quad = \sum_{0\leqslant k\leqslant b}(-1)^k\binom{b}{k}(b-k)^a \\
&\quad = \mathrm{S}(a,b).
\end{aligned}
$$

Utilisation d'une formule d'inversion

Nous allons maintenant énoncer et justifier une formule d'inversion qui présente, outre de grandes qualités esthétiques, un intérêt certain pour le calcul de nombreuses sommes faisant intervenir des coefficients binomiaux.

Définissons une transformation de l'ensemble des suites réelles :

$$\sigma : \mathbf{R}^{\mathbf{N}} \to \mathbf{R}^{\mathbf{N}} : a = (a_n)_{n\in\mathbf{N}} \mapsto \sigma(a) \coloneqq \left(\sum_{0\leqslant k\leqslant n}(-1)^k\binom{n}{k}a_k\right)_{n\in\mathbf{N}}.$$

Autrement dit, l'image de la suite a est la suite $b = (b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par :

$$b_n = \sum_{0\leqslant k\leqslant n}(-1)^k\binom{n}{k}a_k$$

pour tout n.

Exemples :

1. Si a est la suite constante $(1,1,1,1,\ldots)$, le terme d'indice n de $\sigma(a)$ est

$$b_n = \sum_{0\leqslant k\leqslant n} (-1)^k \binom{n}{k} = (1-1)^n = 0^n = \begin{cases} 1 \text{ si } n=0, \\ 0 \text{ si } n>0, \end{cases}$$

et $\sigma(a) = (1,0,0,0,\ldots)$.

2. Si a est la suite alternée $(1,-1,1,-1,\ldots)$, le terme d'indice n de $\sigma(a)$ est

$$b_n = \sum_{0\leqslant k\leqslant n} (-1)^k \binom{n}{k} (-1)^k = \sum_{0\leqslant k\leqslant n} \binom{n}{k} = (1+1)^n = 2^n.$$

et $\sigma(a) = (1,2,4,8,\ldots)$.

3. Plus généralement, si a est une suite géométrique : $a = (r^n)_{n\in\mathbf{N}}$, alors $\sigma(a) = ((1-r)^n)_{n\in\mathbf{N}}$.

Cette transformation jouit d'une propriété tout à fait inattendue : elle est involutive, ce qui signifie que pour toute suite a, $\sigma(\sigma(a)) = a$; ou encore que, si a et b sont deux suites, $b = \sigma(a)$ si et seulement si $a = \sigma(b)$. Explicitement :

$$(\forall\, n\in\mathbf{N}) \quad b_n = \sum_{0\leqslant k\leqslant n} (-1)^k \binom{n}{k} a_k \quad \Leftrightarrow \quad (\forall\, n\in\mathbf{N}) \quad a_n = \sum_{0\leqslant k\leqslant n} (-1)^k \binom{n}{k} b_k. \tag{3}$$

Cette équivalence admet encore la forme suivante, beaucoup moins élégante en raison de son manque de symétrie :

$$(\forall\, n\in\mathbf{N}) \quad b_n = \sum_{0\leqslant k\leqslant n} \binom{n}{k} a_k \quad \Leftrightarrow \quad (\forall\, n\in\mathbf{N}) \quad a_n = \sum_{0\leqslant k\leqslant n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} b_k \ : \tag{4}$$

on passe de (3) à (4) en remplaçant $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ par $((-1)^n a_n)_{n\in\mathbf{N}}$, et vice-versa.

Exemples :
(On utilise les mêmes notations que dans les exemples 1–3 plus haut.)

4. Si b est la suite stationnaire $(1,0,0,0,\ldots)$, le terme d'indice n de $\sigma(b)$ est

$$\sum_{0\leqslant k\leqslant n} (-1)^k \binom{n}{k} \delta_{0k} = (-1)^0 \binom{n}{0} = 1 = a_n$$

(où δ_{ij} est le symbole de Kronecker), et $\sigma(b) = (1,1,1,1,\ldots) = a$.

5. Si b est la suite $(2^n)_{n\in\mathbf{N}}$, le terme d'indice n de $\sigma(b)$ est

$$\sum_{0\leqslant k\leqslant n} (-1)^k \binom{n}{k} 2^k = \sum_{0\leqslant k\leqslant n} \binom{n}{k} (-2)^k = (1-2)^n = (-1)^n = a_n$$

et $\sigma(b) = (1,-1,1,-1,\ldots) = a$.

6. Si $b = ((1-r)^n)_{n\in\mathbf{N}}$, alors $\sigma(b) = ([1-(1-r)]^n)_{n\in\mathbf{N}} = (r^n)_{n\in\mathbf{N}} = a$.

Justifions à présent l'équivalence (3). La situation étant symétrique, il suffit naturellement de prouver l'implication de gauche à droite. Nous supposons donc que, pour tout n,

$$b_n = \sum_{0\leqslant k\leqslant n} (-1)^k \binom{n}{k} a_k$$

et nous calculons $\sum_{0\leqslant k\leqslant n}(-1)^k\binom{n}{k}b_k$:

$$\begin{aligned}\sum_{0\leqslant k\leqslant n} (-1)^k \binom{n}{k} b_k &= \sum_{0\leqslant k\leqslant n} (-1)^k \binom{n}{k} \sum_{0\leqslant j\leqslant k} (-1)^j \binom{k}{j} a_j \\ &= \sum_{0\leqslant j\leqslant k\leqslant n} (-1)^{j+k} \binom{n}{k}\binom{k}{j} a_j \\ &= \sum_{0\leqslant j\leqslant n} (-1)^j a_j \sum_{j\leqslant k\leqslant n} (-1)^k \binom{n}{k}\binom{k}{j}.\end{aligned}$$

Il nous suffit donc de prouver que

$$(\forall\, j, n \in \mathbf{N} : j \leqslant n) \ \sum_{j\leqslant k\leqslant n} (-1)^k \binom{n}{k}\binom{k}{j} = \begin{cases} (-1)^n & \text{si } j = n, \\ 0 & \text{si } j < n. \end{cases} \tag{5}$$

Le cas où $j = n$ est clair, mais nous n'avons en fait pas besoin de le traiter séparément : comme

$$\binom{n}{k}\binom{k}{j} = \frac{n!}{(n-k)!(k-j)!j!} = \binom{n}{j}\binom{n-j}{k-j},$$

il vient

$$\begin{aligned}\sum_{j\leqslant k\leqslant n} (-1)^k \binom{n}{k}\binom{k}{j} &= \binom{n}{j} \sum_{j\leqslant k\leqslant n} (-1)^k \binom{n-j}{k-j} \\ &= (-1)^j \binom{n}{j} \sum_{0\leqslant l\leqslant n-j} (-1)^l \binom{n-j}{l} \\ &= (-1)^j \binom{n}{j} 0^{n-j} \\ &= (-1)^n \delta_{nj}.\end{aligned}$$

Remarquons que (5) s'écrit encore

$$(\forall\, j, n \in \mathbf{N} : j \leqslant n) \ \sum_{0\leqslant k\leqslant n} (-1)^k \binom{n}{k}\binom{k}{j} = (-1)^n \delta_{nj} \tag{6}$$

puisque $\binom{k}{j}$ est nul si $k < j$, ou même, en changeant le nom de l'indice n :

$$(\forall\, i, j \in \mathbf{N}) \ \sum_{k\in\mathbf{N}} (-1)^{i+k} \binom{i}{k}\binom{k}{j} = \delta_{ij}$$

(le cas où $i > j$ est trivial : les deux membres sont nuls) ; elle exprime donc que le produit des « matrices »

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & \cdots \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ -1 & 3 & -3 & 1 & 0 & \cdots \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

est la « matrice unité », autrement dit, que ces deux « matrices » sont inverses l'une de l'autre. (Comme chaque ligne de chacune des matrices est presque nulle, il n'y a pas de problème pour calculer les produits PP' et $P'P$.)

Nous avons déjà observé que (3) découlait de (6) ; en fait, les deux sont équivalents, car, si nous admettons (3), alors (6) équivaut à

$$(\forall\, j, n \in \mathbf{N} : j \leqslant n) \quad \sum_{j \leqslant k \leqslant n} (-1)^k \binom{n}{k} \cdot (-1)^k \delta_{kj} = \binom{n}{j},$$

qui est manifestement vraie.

Il est temps, à présent, de revenir à notre problème de dénombrement des surjections.

L'observation-clé est que toute application est une surjection sur son image. Donc, pour construire une application de A dans B, nous choisissons une partie P de B, puis une surjection de A sur P. Raffinons un peu en partitionnant l'ensemble B^A des applications de A dans B en $\big((B^A)_0, (B^A)_1, \ldots, (B^A)_n\big)$, où $(B^A)_k$ désigne l'ensemble des applications de A dans B dont l'image est de cardinal k. Pour construire un élément de $(B^A)_k$, nous choisissons une partie P à k éléments de B (il y en a $\binom{b}{k}$), puis une surjection de A sur P (il y en a $\mathrm{Surj}(a,k)$) ; il y a donc $\binom{b}{k} \cdot \mathrm{Surj}(a,k)$ éléments dans $(B^A)_k$, et par suite,

$$b^a = \sum_{0 \leqslant k \leqslant b} \binom{b}{k} \cdot \mathrm{Surj}(a,k).$$

Pour a fixé, la formule d'inversion (sous la forme (4)) donne alors :

$$\mathrm{Surj}(a,b) = \sum_{0 \leqslant k \leqslant b} (-1)^{b-k} \binom{b}{k} k^a = \sum_{0 \leqslant k \leqslant b} (-1)^k \binom{b}{k} (b-k)^a.$$

Méthode d'inclusion-exclusion

Le nombre d'éléments de la réunion de deux ensembles est la somme de cardinaux des deux ensembles lorsqu'ils sont disjoints, et ceci s'étend de manière immédiate (par induction) à toute réunion finie ; en l'absence de l'hypothèse que les ensembles sont disjoints, on a plutôt

$$\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B), \tag{7}$$

car on a les réunions *disjointes*

$$\begin{aligned} A &= (A \setminus B) \cup (A \cap B), \\ B &= (B \setminus A) \cup (A \cap B), \\ A \cup B &= (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B). \end{aligned}$$

De manière générale,

$$\begin{aligned}
&\#(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_n) = \\
&\quad = \#A_1 + \#A_2 + \#A_3 + \cdots + \#A_n - \\
&\qquad - \#(A_1 \cap A_2) - \#(A_1 \cap A_3) - \cdots - \#(A_{n-1} \cap A_n) + \\
&\qquad + \#(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + \cdots + \#(A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n) - \\
&\qquad\quad \vdots \\
&\qquad + (-1)^n \#(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cdots \cap A_n),
\end{aligned} \tag{8}$$

ou encore

$$\#\Big(\bigcup_{1 \leqslant k \leqslant n} A_k\Big) = \sum_{\substack{I \subseteq \{1,\ldots,n\} \\ I \neq \varnothing}} (-1)^{\#I-1} \#\Big(\bigcap_{i \in I} A_i\Big) \tag{9}$$

$$= \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} (-1)^{k-1} \sum_{\substack{I \subseteq \{1,\ldots,n\} \\ \#I = k}} \#\Big(\bigcap_{i \in I} A_i\Big) \tag{10}$$

(la seconde forme correspond au groupement des termes d'une même ligne dans (8)).

Justifions (8). L'égalité est manifestement vraie pour $n = 0$ ou $n = 1$; pour $n = 2$, elle se réduit à (7). Soit maintenant $n > 2$; alors,

$$\begin{aligned}
&\#\Big(\bigcup_{1 \leqslant k \leqslant n} A_k\Big) \\
&= \#\Big(\Big(\textstyle\bigcup_{1 \leqslant k < n} A_k\Big) \cup A_n\Big) \\
&\overset{(7)}{=} \#\Big(\bigcup_{1 \leqslant k < n} A_k\Big) + \#A_n - \#\Big(\Big(\bigcup_{1 \leqslant k < n} A_k\Big) \cap A_n\Big) \\
&= \#\Big(\bigcup_{1 \leqslant k < n} A_k\Big) + \#A_n - \#\Big(\bigcup_{1 \leqslant k < n} (A_k \cap A_n)\Big) \\
&\overset{\text{[H.R.]}}{=} \sum_{\substack{I \subseteq \{1,\ldots,n-1\} \\ I \neq \varnothing}} (-1)^{\#I-1} \#\Big(\bigcap_{i \in I} A_i\Big) + \#A_n - \sum_{\substack{I \subseteq \{1,\ldots,n-1\} \\ I \neq \varnothing}} (-1)^{\#I-1} \#\Big(\bigcap_{i \in I} (A_i \cap A_n)\Big) \\
&= \sum_{\substack{I \subseteq \{1,\ldots,n-1\} \\ I \neq \varnothing}} (-1)^{\#I-1} \#\Big(\bigcap_{i \in I} A_i\Big) + \#A_n - \sum_{\substack{I \subseteq \{1,\ldots,n-1\} \\ I \neq \varnothing}} (-1)^{\#I-1} \#\Big(\Big(\bigcap_{i \in I} A_i\Big) \cap A_n\Big) \\
&\overset{J = I \cup \{n\}}{=} \sum_{\substack{I \subseteq \{1,\ldots,n-1\} \\ I \neq \varnothing}} (-1)^{\#I-1} \#\Big(\bigcap_{i \in I} A_i\Big) + \sum_{I = \{n\}} (-1)^{\#I-1} \#\Big(\bigcap_{i \in I} A_i\Big) \\
&\qquad + \sum_{\substack{J \subseteq \{1,\ldots,n\} \\ J \neq \{n\} \\ n \in J}} (-1)^{\#J-1} \#\Big(\bigcap_{i \in J} A_i\Big) \\
&= \sum_{\substack{I \subseteq \{1,\ldots,n\} \\ I \neq \varnothing}} (-1)^{\#I-1} \#\Big(\bigcap_{i \in I} A_i\Big),
\end{aligned}$$

puisque

$$\Big\{ \{I \in \mathscr{P}(\{1,\ldots,n-1\}) : I \neq \varnothing\}, \{n\}, \{J \in \mathscr{P}(\{1,\ldots,n\}) : J \neq \{n\} \text{ et } n \in J\} \Big\}$$

est une partition de $\{I \in \mathscr{P}(\{1,\dots,n\}) : I \neq \emptyset\}$.

Si les A_k sont tous des parties d'un ensemble de référence E, les équations (9) et (10) se récrivent encore

$$\#\Big(\complement \bigcup_{1\leqslant k\leqslant n} A_k\Big) = \sum_{I\subseteq\{1,\dots,n\}} (-1)^{\#I} \#\Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big), \tag{11}$$

$$= \sum_{0\leqslant k\leqslant n} (-1)^k \sum_{\substack{I\subseteq\{1,\dots,n\}\\ \#I=k}} \#\Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big), \tag{12}$$

$\#\left(\complement \bigcup_{1\leqslant k\leqslant n} A_k\right) = \#\left(E \setminus \bigcup_{1\leqslant k\leqslant n} A_k\right) = \#E - \#\left(\bigcup_{1\leqslant k\leqslant n} A_k\right)$ et que l'intersection vide $\bigcap_{i\in\emptyset} A_i$ est, conventionnellement, l'ensemble de référence E.

Appliquons ceci à notre problème de comptage des surjections, de la manière suivante : soit E l'ensemble des applications de A dans $B = \{1, 2, \dots, b\}$ et soit A_i l'ensemble des applications de A dans B qui ne prennent pas la valeur i, ou, pour le dire autrement, des applications de A dans $\{1, 2, \dots, \hat{i}, \dots, b\}$. Alors, $\bigcap_{i\in I} A_i$ est l'ensemble des applications de A dans $B \setminus I$, et si $\#I = k$, $\#\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = (b-k)^a$. De plus, $\complement \bigcup_{1\leqslant k\leqslant n} A_k$ est l'ensemble des surjections de A dans B, de sorte que

$$\begin{aligned}\operatorname{Surj}(a,b) &= \sum_{0\leqslant k\leqslant b} (-1)^k \sum_{\substack{I\subseteq B\\ \#I=k}} \#\Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big)\\ &= \sum_{0\leqslant k\leqslant b} (-1)^k \sum_{\substack{I\subseteq B\\ \#I=k}} (b-k)^a\\ &= \sum_{0\leqslant k\leqslant b} (-1)^k \binom{b}{k} (b-k)^a,\end{aligned}$$

puisque B compte $\binom{b}{k}$ parties à k éléments.

Conclusion

Nous espérons que ces petites excursions vous ont plu. (N'oubliez pas le guide.) Vous pouvez maintenant résoudre le problème des plats du jour...

Vous retrouverez le tableau de la p. 30 sur le site *On-Line Encyclopedia of Integer Sequences* (*OEIS*) (`http://www.research.att.com/~njas/sequences/Seis.html`), dû à l'initiative de Neil Sloane, qui est, de toute manière, une référence à connaitre et un outil à utiliser.

Voir

la page `http://www.research.att.com/~njas/sequences/A019538`, plus précisément,.

Pascal Dupont enseigne à HEC-École de Gestion de l'ULG, ✉ : pascal.dupont@ulg.ac.be.