

UNIVERSITAS LEODIENSIS



FACULTÉ DES SCIENCES APPLIQUÉES

THÈSE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR de l'Université de Liège

Spécialité : **Sciences de l'Ingénieur**
Électricité et électronique

Titre:

Déconvolution aveugle d'images mono- et multicanales par méthodes variationnelles - Application à l'imagerie aérienne

par

Alexandre HAMMER

Juillet 2011

Promoteur: **Prof. Jacques VERLY**

Thèse présentée devant le Jury composé de

Pr. Pierre MAGAIN	Université de LIÈGE
Pr. Marc VAN DROOGENBROECK	Université de LIÈGE
Pr. Jacques VERLY	Université de LIÈGE
Dr. Laure BLANC-FERAUD	INRIA - SOPHIA-ANTIPOLIS
Dr. François MALGOUYRES	Université de PARIS XIII

Table des matières

Table des matières	iii
Notations et glossaire	vii
Introduction générale	1
1 Généralités et problématique	5
1 Éléments de modélisation des images	5
1.1 Images en tant que distributions	6
1.2 Images L^p	6
1.3 Images de Sobolev H^n	7
1.4 Images à variations bornées	8
1.5 Modélisation des images floues	9
1.5.1 Images à niveaux de gris	9
1.5.2 Images multicanales et couleurs	10
1.5.3 Modélisation du bruit présent	11
1.6 Modélisation des flous	12
1.6.1 Flou de défocalisation	12
1.6.2 Flou de mouvement rectiligne	12
2 Déconvolution : théorie et principes	13
2.1 Filtrage inverse et son instabilité	13
2.2 Régularisation des problèmes mal-POSÉS	14
2.2.1 Régularisation par contrôle de dimension	15
2.2.2 Régularisation par minimisation d'un critère composite . .	15
3 De la difficulté de l'évaluation qualitative des résultats en déconvolution aveugle	16
4 Du conditionnement des opérateurs de flous	18
2 État de l'art en déconvolution aveugle	21
1 Introduction	21
2 Méthodes avec identification du flou a priori	22
2.1 Estimation préalable du flou	22
2.1.1 Méthodes basées sur la modélisation ARMA	23
2.1.2 Méthodes basées sur les caractéristiques spectrales de l'image	25
2.1.3 Méthodes basées sur l'autocorrélation	27
2.1.4 Méthodes basées sur l'utilisation de la transformée de Radon	28
2.1.5 Autres méthodes	30
2.2 Restauration de l'image avec flou connu	33
2.2.1 Méthodes variationnelles	33
2.2.2 Méthodes utilisant l'analyse multirésolution et les ondelettes	39
2.2.3 Méthodes basées sur les équations aux dérivées partielles.	43
2.2.4 Autres méthodes	44

2.2.5	Méthodes spécifiques aux images couleur	45
2.3	Synthèse sur les méthodes avec identification du flou a priori	46
3	Méthodes d'identification jointe	47
3.1	Méthode directe de séparation de la plage des zéros	47
3.2	Méthode d'Ayers-Dainty	48
3.3	Méthode des moindres carrés non-régularisés	49
3.4	Méthodes à double régularisation	49
3.4.1	Approches non-paramétriques	50
3.4.2	Approches paramétriques	52
3.5	Méthodes de filtrage adaptatif	53
3.6	Méthodes basées sur l'analyse en composantes indépendantes	54
3.7	Méthodes diverses	55
3.8	Méthodes pour les images couleurs	55
3.8.1	Méthodes basées sur l'utilisation des ondelettes	56
3.8.2	Méthode basée sur la double régularisation symétrique	57
3.8.3	Méthode utilisant la régularisation de Beltrami	58
3.9	Synthèse sur les méthodes d'identification jointe	59
4	Synthèse globale	60
3	Déconvolution aveugle à double régularisation à variation totale	61
1	Introduction	61
2	Définition et principe de la régularisation TV	62
3	Déconvolution par double régularisation TV	63
4	Discrétisation de l'opérateur de régularisation TV	65
5	Algorithme de minimisation	67
5.1	Algorithme de linéarisation de gradient par itération de point fixe	67
5.2	Lien entre l'itération de linéarisation de gradient et les approches semi-quadratiques	71
5.3	Réglage des paramètres de régularisation	71
5.4	Contraintes imposées dans la reconstruction et cas particulier des images à fond noir	73
5.4.1	Contraintes sur l'image	73
5.4.2	Contraintes sur le noyau	75
5.4.3	Cas particulier des images à fond noir : exemple	76
5.5	Influence du nombre d'itérations de point fixe	82
5.6	Influence du nombre d'itérations de l'algorithme de gradient conjugué	87
6	Expérimentations non-comparatives	88
6.1	Descriptif des images et scenarii de test	88
6.2	Tests sur images affectées par un flou de défocalisation	93
6.2.1	Synthèse sur les tests avec défocalisation	110
6.3	Tests sur images affectées par un flou de mouvement	110
6.3.1	Synthèse sur les tests avec flou de mouvement	125
6.4	Tests avec des flous de mouvement plus généraux	128
7	Expérimentations comparatives	131
8	Synthèse	139
4	Déconvolution aveugle avec régularisation de type Mumford-Shah	143
1	Fonctionnelles de Mumford-Shah, Mumford-Shah/TV, et leur approximation	144
2	Modèles de déconvolution à flou connu avec régularisation de type Mumford-Shah	145
2.1	Modèle à flou connu avec régularisation MS	146

2.2	Modèle à flou connu avec régularisation MSTV	147
3	Discrétisation des équations	148
3.1	Cas Mumford-Shah	148
3.2	Cas Mumford-Shah/TV	151
4	Influence du bruit blanc gaussien en fonction du type de régularisation	153
4.1	Test sur une image affectée par un flou de défocalisation	154
4.2	Test sur une image affectée par un flou de mouvement	155
4.3	Comparaison visuelle	157
5	Modèle de déconvolution aveugle avec régularisation MSTV	158
5.1	Algorithme de minimisation	160
6	Expérimentations en aveugle	161
6.1	Test sur une image affectée par un flou de défocalisation	161
6.2	Test sur une image affectée par un flou de mouvement	162
6.3	Comparaisons avec le modèle de déconvolution aveugle double TV	162
7	Autres résultats	167
8	Synthèse	170
5	Déconvolution aveugle couleur à régularisation par variation totale	179
1	Introduction	179
2	De l'importance du couplage des canaux	180
3	Modèle de déconvolution aveugle double TV couleur	182
4	Algorithme de minimisation	182
5	Expérimentations	185
5.1	Cas synthétique : défocalisation	185
5.2	Cas synthétique : mouvement	189
5.3	Images acquises en conditions réelles	192
5.4	Comparaison des performances	197
6	Synthèse	205
6	Déconvolution aveugle paramétrique pour les images monochromes et couleurs	207
1	Introduction	207
2	Sur les difficultés de la double régularisation paramétrique	208
2.1	Modèles variationnels de déconvolution paramétriques	208
2.2	Essai de minimisation et problèmes de convergence	210
3	Pré-estimation des flous par filtrage de choc	215
3.1	Différents types de filtres de choc et leurs spécificités	215
3.2	Estimation du flou à partir d'une image choquée	217
3.2.1	Cas monochrome	217
3.2.2	Cas couleur	219
4	Identification précise du flou par extrémisation du kurtosis	219
5	Gestion des incertitudes via fidélité aux données en norme L^1	221
6	Expérimentations	222
6.1	Tests sur des images affectées par un flou de défocalisation	222
6.2	Tests sur des images affectées par un flou de mouvement	227
6.2.1	Cas monochrome	227
6.2.2	Cas couleur	233
7	Initialisation non-paramétrique par filtre de choc	239
8	Synthèse	241
	Conclusion générale	243

A Estimation des paramètres de régularisation optimaux pour les problèmes TV non-aveugles	247
1 Estimation du paramètre optimal sur les images	247
1.1 Cas de l'image <i>Nid de cailloux</i> défocalisée	248
1.2 Cas de l'image <i>Reprise de béton</i> avec mouvement rectiligne	251
2 Estimation du paramètre optimal sur les noyaux de flou	252
2.1 Cas du noyau de défocalisation	254
2.2 Cas du noyau de mouvement	256
B Éléments d'optimisation	261
1 Algorithme de gradient conjugué	261
2 Algorithmes de Newton et quasi-Newton	261
3 Multiplicateurs de Lagrange	262
4 Calcul de l'équation d'Euler appliquée aux fonctionnelles de déconvolution	263
4.1 Formule de Green	263
4.2 Lemme fondamental du calcul des variations	263
4.3 Calcul des conditions d'optimalité des modèles de déconvolution	263
Bibliographie	267

Notations et glossaire

De manière générale, et excepté quand d'autres significations sont précisées, les notations et abréviations suivantes s'appliquent.

Notations

f	Image. En discret : matrice dont les valeurs sont les niveaux de gris de l'image En continu : fonction bidimensionnelle
\mathbf{f}	Vecteur obtenu par ordonnancement lexicographique de f
\tilde{f}	Estimée de f
F	Matrice par blocs issue de f
\mathcal{F}	Fonctionnelle
\mathbb{R}	Espace des nombres réels
\mathbb{Z}	Espace des nombres entiers relatifs

Opérateurs mathématiques

$x * y$	Produit de convolution de x et y
$x \star y$	Convolution spatialement variante (intégrale de superposition) de x et y
\check{f}	Transformée en Z de f
\hat{f}	Transformée de Fourier de f
f^\circledast	Adjoint de f
A^T	Matrice A transposée
A^\dagger	Inverse généralisée de la matrice A
Δx	Opérateur de différences finies
$\mathbb{E}\{\cdot\}$	Opérateur d'espérance mathématique
$\mathbb{V}\{\cdot\}$	Opérateur de variance
$k(X)$	Kurtosis d'une distribution statistique X

Glossaire

g.	gauche
d.	droite
pix.	pixels
ARMA	Auto Regressive Moving Average
BTTB	Block Toeplitz with Toeplitz Blocks
BV	Bounded Variations
EDP	Équation aux Dérivées Partielles
EM	Expectation-Maximization
FFT	Fast Fourier Transform
GCV	Generalized Cross Validation
MAE	Mean Absolute Error
MAX	Maximum Absolute Error
MS	Mumford-Shah
MSTV	Mumford-Shah / Total Variation
NCG	Nombre d'itérations de Gradient Conjugué
NSHP	Non-Symmetric Half Plane
PSF	Point Spread Function
PSNR	Peak Signal to Noise Ratio
RGB	Red Green Blue
RMSE	Root Mean Square Error
SISO	Single Input Single Output
SIMO	Single Input Multiple Output
SNR	Signal to Noise Ratio
SSIM	Structural SIMilarity index
TV	Total Variation

Introduction générale

Cette thèse vise à étudier, avec une orientation pratique, le problème de restauration aveugle d'images floues, et ce à partir de méthodes présentées ces dernières années dans la littérature scientifique. De manière générale, le sujet de la restauration vise à récupérer une image originale de bonne qualité, à partir d'une image dégradée. Dans le contexte ci-présent, les images considérées souffrent d'être affectées par un flou, qui peut rendre leur exploitation délicate, voire impossible. Dans l'extrême majorité des cas, cette opération de floutage sera modélisée par une convolution entre une image nette et un opérateur de flou. Le but étant alors de pouvoir effectuer l'opération inverse, ce qui résulte en la dénomination couramment utilisée, et plus précise, de déconvolution. Le qualificatif d'aveugle proviendra alors du cas particulier dans lequel l'opérateur de flou n'est pas explicitement connu, et doit également être estimé, rendant le problème autrement plus délicat.

Un des buts de notre étude repose également sur le fait qu'un grand nombre des approches proposées dans la littérature, utilisant des outils mathématiques très avancés, n'ont - à notre connaissance - jamais été sérieusement ni étudiées dans un cadre applicatif, ni appliquées à des problèmes concrets. Il s'agit d'approches davantage proposées par une communauté de mathématiciens, utilisant des outils particuliers tels que l'analyse fonctionnelle avancée, et dont on ne connaît au final que relativement peu l'utilité réelle par rapport à d'autres, plus basiques. Il nous est donc apparu comme particulièrement intéressant de confronter ces méthodes à des problèmes très concrets, à des images illustratives de situations réelles.

Organisation du mémoire

Les deux premiers chapitres constitueront l'introduction à notre thématique de recherche. Les suivants traiteront de notre contribution proprement dite.

Le **Chapitre 1** commencera par présenter un certain nombre d'éléments permettant de comprendre et définir la problématique de la restauration d'images de manière générale, et plus particulièrement celle de la régularisation, qui y est fortement associée. L'application visée, de même que les difficultés spécifiques s'y rapportant, seront aussi abordées. Nous introduirons également quelques outils d'analyse fonctionnelle nécessaires à une bonne compréhension des techniques étudiées et développées plus loin au cours de cette thèse.

Le **Chapitre 2** traitera lui de l'état de l'art actuel en déconvolution aveugle d'images. Il se voudra le plus complet possible, sans pouvoir toutefois être exhaustif. Nous présenterons les deux catégories de méthodes existantes traditionnellement, autant dans le cas monoque multicanal : les approches dites à identification du flou a priori, procédant en deux étapes découpées d'estimation de la dégradation, puis de restauration, et les approches à

identification jointe, procédant de manière itérative et simultanée sur la reconstruction de l'opérateur de flou et de l'image restaurée.

Dans le **Chapitre 3**, nous passerons à la première étape de notre contribution à proprement parler. Ce chapitre se concentrera sur l'analyse d'un schéma de déconvolution aveugle d'images monocanales relativement connu, et basé sur le principe de double régularisation à variation totale, c'est-à-dire par une technique variationnelle, soit de fonctionnelle à minimiser. Nous montrerons comment et pourquoi l'algorithme originel proposé dans la littérature ne réussit pas, et ne peut réussir, à fournir des résultats satisfaisants dans le cadre de notre problème appliqué. Dans une deuxième étape, nous proposerons des solutions aux limitations de cette approche, et montrerons son efficacité à la fois sur des images représentant des défauts typiques de génie civil, et des images plus « académiques ». Enfin, nous présenterons plusieurs comparaisons effectuées contre des approches de l'état de l'art, et mettrons en évidence que notre méthode mène à des résultats très souvent supérieurs, que cela soit visuellement, ou qualitativement par utilisation d'indicateurs standardisés.

Pour le **Chapitre 4**, nous considérerons fondamentalement la même approche de restauration, mais en nous basant sur un autre schéma de régularisation pour l'image. Celui-ci fera en effet appel à une fonctionnelle non-convexe, dont l'utilisation mène à des caractéristiques particulières de l'image restaurée. Parmi celles-ci, l'avantage possible est de pouvoir bénéficier d'arêtes plus nettes, et donc d'images plus agréables à l'œil. Parmi les difficultés, la minimisation de la fonctionnelle associée à ce modèle s'avère délicate à manipuler. L'utilisation de ce type d'opérateur dans un schéma de déconvolution aveugle est à notre connaissance une nouveauté, et fournit donc notre principale contribution. D'autre part, deux variantes de régularisation ont été utilisées, et des tests comparatifs menés, permettant de discriminer les caractéristiques de reconstruction dans des cas pratiques, et de mettre en évidence les avantages et inconvénients par rapport à la technique du Chapitre 3.

Le **Chapitre 5** traitera, à contrario des deux précédents, de la restauration aveugle d'images en couleurs, et non plus seulement en niveaux de gris, comme cela se fait quasi systématiquement habituellement. Nous envisageons une adaptation de l'approche présentée au Chapitre 3, basée de la même façon sur une approche variationnelle, avec une double régularisation à variation totale adaptée aux images couleurs. Cette dernière adaptation utilisera une technique de couplage entre les différents canaux couleur, souvent utilisée en déconvolution à noyau de flou connu, et non pas une simple restauration qui procéderait canal par canal, indépendamment les uns des autres.

Dans le **Chapitre 6**, nous traiterons d'une restriction du problème de déconvolution aveugle au cas des noyaux paramétriques, autant pour des images mono- que multicanal. Nous ne nous intéresserons dès lors plus à la reconstruction d'un opérateur de flou bimensionnel général, puisque nous considérerons bénéficier de davantage d'informations, et plus précisément de la classe paramétrique du noyau. Nous exhiberons tout d'abord certains problèmes ayant lieu lors de l'adaptation de la technique de double régularisation à ces noyaux paramétrés. Dans un cadre partiellement variationnel, nous proposerons une méthode en trois étapes. Tout d'abord une estimation grossière de la valeur du ou des paramètres caractérisant l'opérateur de flou, par une technique originale utilisant les filtres de choc. Ensuite, raffinement de l'estimation par une méthode mettant en œuvre une statistique d'ordre supérieur de l'image restaurée, permettant de mesurer sa pointicité, c'est-à-dire le caractère net de ses bords. Finalement, restauration de l'image en utilisant le noyau estimé, avec une méthode utilisant une régularisation à variation totale et des

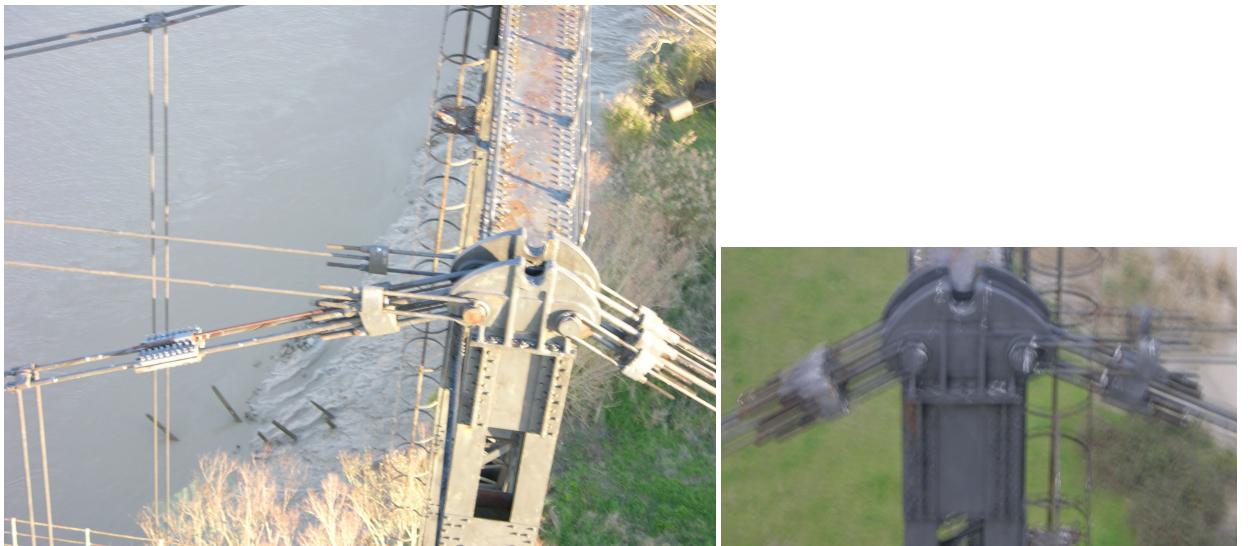


FIGURE 1 – Exemple d’images acquises par un appareil photo embarqué sur un drone d’hélicoptère.

termes de fidélité aux données quadratiques et non-quadratiques.

Enfin, on terminera en présentant les conclusions à tirer de cette étude, en matière de résultats obtenus par rapport aux considérations pratiques envisagées, et à ce qui existe d’autre à l’heure actuelle dans le domaine. On donnera un certain nombre d’améliorations potentielles, ou d’autres pistes à creuser en perspectives de développement, perspectives pouvant mener à des performances accrues vis-à-vis de tel ou tel point particulier (ex. : temps de calcul, informations connues a priori, forme du flou, etc.).

Contexte applicatif

L’application que nous avons fondamentalement visée, et à laquelle nous nous sommes plus particulièrement intéressés concerne l’imagerie aérienne, appliquée à la surveillance de grandes structures de génie civil. Dans nos expérimentations, nous nous sommes placés dans le contexte d’un appareil photographique embarqué sur un drone d’hélicoptère. Il va de soi que ces images doivent être d’une bonne qualité afin d’être exploitables. Or un tel appareillage monté sur aéronef est soumis à beaucoup d’aléas : climatiques, vibrations du moteur, problèmes de bougé durant l’acquisition photo, etc. Des dégradations se traduisant par des flous sont donc parfois observées sur les images obtenues, réduisant leur qualité, et rendant plus délicate l’extraction d’informations pertinentes (Fig. 1). Des méthodes de restauration sont donc à employer afin de pallier ces défauts, dans le but que l’observation traduise alors au mieux possible la scène originale de la réalité terrain à analyser. C’est là l’objectif applicatif de notre travail.

Contributions

Les principales contributions de ce travail sont, de manière synthétique, les suivantes :

Chapitre 3 : Mise en évidence et analyse des défauts intrinsèques du modèle de déconvolution aveugle monocanal à double régularisation par variation totale de Chan et Wong [40]. Développement d'un schéma modifié et amélioré, incluant une contrainte simple à utiliser de seuillage du noyau. Mise en œuvre et étude des résultats.

Chapitre 4 : Développement et étude pratique d'un modèle de déconvolution aveugle monocanal original, basé sur l'approche monochrome améliorée du Chapitre 3, avec une régularisation non-convexe de type Mumford-Shah. Comparatif avec d'autres régularisations.

Chapitre 5 : Développement d'un modèle original de déconvolution aveugle à couplage de canal, basé sur l'approche monocanale améliorée du Chapitre 3, pour des images en couleurs. Comparatif avec une méthode d'état de l'art à régularisation de type Beltrami [98].

Chapitre 6 : Mise en évidence d'incongruités et difficultés dans les approches de déconvolution (semi-)aveugles à double régularisation pour des flous paramétriques. Développement d'une technique propre de pré-estimation des paramètres d'un noyau par filtrage de choc. Généralisation de l'approche d'extrémisation du kurtosis [116, 216] à des noyaux discontinus et multiparamétriques. Application à des images multicanales.

Chapitre 1

Généralités et problématique

Dans ce chapitre, nous présentons dans une première section les outils de base associés à la problématique de la restauration d'images. Nous commençons par donner des éléments de modélisation du processus de formation des images floues, processus résultant en une équation de convolution. C'est cette convolution qu'il faut alors inverser afin de retrouver l'image nette recherchée. Bien entendu, cette étape de modélisation est fondamentale si l'on souhaite une restauration efficace. Outre la modélisation de la formation en elle-même, et étant donné que nous travaillons dans un contexte aveugle, c'est-à-dire sans la connaissance de la dégradation, il est également important de préciser les modèles de flous et d'images recherchés, ceux-ci étant directement dépendants de l'application à traiter. Cette étape permettra alors de mieux « guider » le processus aveugle dans sa recherche d'une solution possible.

Dans une deuxième section, des éléments mathématiques fondamentaux concernant l'instabilité du problème inverse de déconvolution seront donnés. Après avoir rappelé les définitions et explications essentielles, nous expliquerons les raisons profondes de la difficulté du problème aveugle, et donnerons des indications quant aux pistes générales permettant de contourner, ou, à minima, de réduire ces difficultés.

1 Éléments de modélisation des images

Par modélisation d'une image, on entend une façon de décrire mathématiquement, et de trouver des voies pour analyser de telles images. Il s'agit donc d'une étape très importante en traitement des images, et tout particulièrement en déconvolution aveugle, où l'image et le flou que l'on vise à reconstruire doivent nécessairement être recherchés dans une classe de fonctions particulière, afin de borner l'espace de recherche, et surtout d'imposer à l'image fonction et au flou à estimer des caractéristiques particulières. Malheureusement, comme sa dénomination le laisse sémantiquement penser, aucune modélisation n'est ultime, la « meilleure », et surtout pas parfaite, dans la mesure où, tout d'abord, une « bonne » représentation varie fortement d'une application particulière à une autre, et même d'une image représentative d'une scène bien spécifique à une autre. Surtout, il ne s'agit toujours dans tous les cas que d'une approximation, qui se révèlera être plus ou moins éloignée de la réalité absolue, mais en aucun cas totalement concordante avec celle-ci.

La définition d'une méthode de restauration d'images passe de manière évidente par une modélisation la plus fiable possible du problème rencontré. Nous donnons donc ici des éléments communément admis de formation et de modélisation des images floues, que nous utiliserons par la suite.

Parmi l'ensemble des modèles, il en est un type qui sera utilisé tout au long de cette thèse, et qui est celui des représentations dites déterministes basées sur des espaces de fonctions. Celles-ci sont parmi les plus couramment utilisées dans la littérature scientifique. Précisons cependant qu'il en existe d'autres, telles que les représentations multi-échelles (par exemple par ondelettes), par ensemble de niveau, ou encore par champs aléatoires (Gibbs, Markov, etc.). Pour davantage d'informations concernant les différents modèles d'images pouvant être considérés, on pourra consulter avec profit [39], dont nous nous inspirons pour ce qui suit.

1.1 Images en tant que distributions

De manière générale, concevoir une image (continue) comme une distribution [170] est l'approche la plus répandue en modélisation déterministe. Commençons par fournir quelques éléments concernant les définitions des distributions, autrement appelées *fonctions généralisées*. Pour cela, notons Ω un domaine 2D ouvert et borné. L'ensemble D des fonctions dites *tests* est défini, sur un espace Ω , par

$$D(\Omega) = \{\phi \in C^\infty(\Omega) \mid \text{supp } \phi \subseteq \Omega\} . \quad (1.1)$$

Chaque fonction test ϕ peut être vue comme un système de capture linéaire de signaux d'image. Une image f sur Ω est alors une fonctionnelle linéaire sur $D(\Omega)$:

$$f : \phi \rightarrow \langle f, \phi \rangle . \quad (1.2)$$

L'espace image est alors l'espace des distributions, noté traditionnellement $D'(\Omega)$, qui est le dual topologique de $D(\Omega)$.

Bien qu'une telle image puisse ne pas sembler très familière, elle exhibe en fait bien une réponse $\langle f, \phi \rangle$ pour toute fonction senseur $\phi \in D(\Omega)$, qui vise à percevoir l'existence et les caractéristiques de f . D'autre part, la perception est linéaire, et la notion de distribution est si souple que l'on peut alors considérer des dérivées de n'importe quel ordre.

Parmi les avantages de cette modélisation par fonctions généralisées figurent entre autre le fait que celles-ci permettent de représenter des images très diversifiées de nombreuses disciplines, et que leur définition semble bien en accord avec l'interprétation physique d'une image. En effet, une image n'existe pas en soi; elle est plutôt acquise ou observée à travers sa réponse à un senseur, que ce soit le système de vision humain ou tout autre capteur technologique (caméra CCD par exemple).

En revanche, de telles images basées sur des distributions présentent aussi le défaut d'être si nombreuses, variées, que l'on peut alors difficilement en extraire quelque caractéristique bien particulière que ce soit. Des conditions de régularité bien spécifiques doivent alors être incorporées, afin de les modéliser de manière à ce qu'elles soient plus facilement utilisables en pratique.

1.2 Images L^p

Les images L^p , pour tout $p \in [0, \infty]$, portent une structure et contiennent une information bien plus fortes que des images basées sur des distributions de manière générale. La définition des images L^p se rapporte naturellement à celle des espaces éponymes, qui est la suivante :

$$L^p(\Omega) = \{f : \int_{\Omega} |f|^p < \infty\}. \quad (1.3)$$

À cet espace, on associe la norme

$$\|f\|_{L^p} = \left[\int_{\Omega} |f|^p \right]^{\frac{1}{p}}. \quad (1.4)$$

Les images L^p sont naturellement également des images de type distributions. On peut montrer que $\forall q \geq p \geq 1$, on a

$$L^q(\Omega) \subseteq L^p(\Omega). \quad (1.5)$$

On a donc, par exemple, $L^2 \subseteq L^1$. On constate alors, qu'en ce sens, les images L^1 forment la classe la plus générale parmi les images L^p . Comme sous-ensemble, la classe des images L^2 a formé un groupe couramment utilisé dans les tous premiers travaux en restauration d'images [70]. Néanmoins, il est vite apparu que l'utilisation de la norme associée

$$\|f\|_{L^2} = \sqrt{\int_{\Omega} |f|^2} \quad (1.6)$$

amenait en restauration à des images pas suffisamment régulières, pas suffisamment *régularisées*, c'est-à-dire simplement pas suffisamment lissées, contenant en général trop de bruit.

1.3 Images de Sobolev H^n

Pour pallier le défaut de régularité des images L^2 , furent introduites les images basées sur les espaces dits de Sobolev [1]. Commençons ici par donner quelques définitions concernant ces espaces. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $1 \leq p < \infty$, on définit l'espace de Sobolev $W^{n,p}(\Omega)$ par

$$W^{n,p}(\Omega) = \{f \in L^p(\Omega) \mid \forall \alpha, |\alpha| \leq n, \exists v_{\alpha} \in L^p(\Omega), v_{\alpha} = \partial^{\alpha} f \text{ au sens faible}\}, \quad (1.7)$$

où ∂^{α} représente la dérivation d'ordre α .

On se limite le plus souvent dans la définition présente au cas où $p = 2$. On a alors la définition suivante des espaces $H^n = W^{n,2}$:

$$H^n(\Omega) = \{f \in L^2(\Omega) \mid \forall \alpha, |\alpha| \leq n, \exists v_{\alpha} \in L^2(\Omega), v_{\alpha} = \partial^{\alpha} f \text{ au sens faible}\}. \quad (1.8)$$

Ces espaces présentent l'intérêt d'être en fait des espaces de Hilbert (d'où la notation H), c'est-à-dire des espaces spécifiques dont la norme découle d'un produit scalaire. On introduit alors sur H^n le produit scalaire

$$\langle f, v \rangle_n = \sum_{|\alpha| \leq n} \int_{\Omega} \partial^{\alpha} f \partial^{\alpha} v \quad (1.9)$$

et la norme associée $\|f\|_n = \sqrt{\langle f, f \rangle_n}$ (où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire usuel sur $L^2(\Omega)$).

Parmi ces espaces H^n , l'espace H^1 a rapidement supplanté L^2 pour la modélisation d'images en restauration. Une image est dite être de Sobolev H^1 si ses dérivées au premier

ordre (au sens des distributions) appartiennent également à L^2 , de même, ou de manière équivalente, si son gradient ∇f appartient à $L^2 \times L^2$. Sa norme associée est alors

$$\|f\|_1 = \|f\|_{H^1} = \sqrt{\langle f, f \rangle_1} = \sqrt{\int_{\Omega} |f|^2 + \int_{\Omega} |\nabla f|^2}. \quad (1.10)$$

On peut également écrire que

$$\|f\|_{H^1}^2 = \|f\|_{L^2}^2 + \|\nabla f\|_{L^2}^2. \quad (1.11)$$

La norme H^1 n'est cependant pas communément utilisée sous ces deux dernières formes, et seul le terme

$$\|\nabla f\|_{L^2} = \sqrt{\int_{\Omega} |\nabla f|^2} \quad (1.12)$$

est en général employé pour mesurer l'information (au sens de la régularité) contenue dans une image H^1 . Ceci cependant, par abus de langage, souvent sous le nom de *norme H^1* , alors qu'il s'agit en toute rigueur de la *semi-norme*¹ sur H^1 . Le terme (1.12) apparaîtra plusieurs fois au long de cette étude, en raison des propriétés de régularité beaucoup plus fortes dans l'espace H^1 . Les images en faisant partie sont en effet beaucoup plus lisses que les images L^2 .

1.4 Images à variations bornées

Des distributions globales aux images L^p , puis aux images de Sobolev H^n , nous avons à chaque fois plus de régularité ajoutée. Cette suite d'espaces devient donc plus spécifique, et ainsi plus facilement appréhendable et utilisable en pratique. Il y cependant un compromis à trouver entre les propriétés de régularité et la fidélité de la modélisation des images. Une solution adéquate est de disposer d'un espace qui fournit un équilibre entre ces deux aspects, c'est-à-dire qui soit mathématiquement « malléable », et pratiquement fidèle dans la représentation des caractéristiques essentielles des images générales.

Ceci est assez bien vérifié par l'espace à variations bornées BV (angl. *bounded variations*), dont le rôle en traitement d'images a pris une importance notable ces dernières années [4].

Du point de vue des distributions, une image $f \in L^1$ appartient à $BV(\Omega)$ si et seulement si son gradient au sens des distributions ∇f (parfois écrit Df) vérifie

$$\sup_{\phi \in D(\Omega); \|\phi\|_{\infty} \leq 1} \langle \nabla f, \phi \rangle < \infty, \quad (1.13)$$

où $\phi = (\phi_1, \phi_2) \in D(\Omega) \times D(\Omega)$, et $\|\phi\|_{\infty} = \sup_{\Omega} (\phi_1^2 + \phi_2^2)^{\frac{1}{2}}$. Si c'est le cas, alors ce supremum est appelé « variation totale » (TV : *total variation*) de f , et que l'on notera parfois plus loin $TV(f)$.

Dans le cas où f est une fonction différentiable, $TV(f)$ peut être définie via une intégrale basée sur la fonction donnée, au lieu du supremum de (1.13) :

$$TV(f) = \int_{\Omega} |\nabla f|. \quad (1.14)$$

1. C'est-à-dire une application disposant de presque toutes les propriétés lui conférant le statut de norme, sauf celle de séparation, qui assure que la norme d'un vecteur est nulle seulement si ce vecteur est nul.

Parmi les propriétés remarquables de l'espace BV figure le fait que toutes les images $W^{1,1}$ sont aussi des images BV , mais que seulement ces dernières permettent des discontinuités, c'est-à-dire des sauts d'intensité. Ce besoin de représentation des discontinuités d'une image, de ses bords, est devenu crucial dans les recherches actuelles, et même incontournable dans certaines thématiques. D'autre part, bien que les images L^p autorisent aussi la présence de discontinuités, elles ne conservent pas les irrégularités oscillatoires locales, à la différences des modèles BV .

En bref, les images issues d'un modèle BV offrent ce compromis raisonnable entre la pénalisation des irrégularités (telles celles dues au bruit) et la préservation de caractéristiques intrinsèques à la majorité des images telles que les bords. Nous reviendrons plus en détails à ce type de modélisation dans le Chapitre 3, dans lequel l'opérateur TV sera mis en œuvre.

1.5 Modélisation des images floues

Après nous être attachés à donner des modèles d'images claires, nettes, intéressons nous à la modélisation du processus d'obtention d'images dégradées par un noyau de flou. Nous commencerons par donner le modèle de formation des images monochromes, modèle le plus couramment utilisé dans la littérature scientifique, bien qu'il ne corresponde pas forcément à la réalité des applications actuelles, dont beaucoup font appel à des données multicanales en général, et couleurs en particulier. Nous aborderons ensuite la modélisation de ces images en couleurs, et plus particulièrement de leur expression dans le système de couleur RGB.

1.5.1 Images à niveaux de gris

De manière la plus générale, une image continue g obtenue à travers un système, par exemple optique, possédant une fonction de dispersion² h variante suivant les coordonnées spatiales x et y , et dépendant de l'image source f , peut être donnée par

$$g(x,y) = [h(x,y; s,t,f) \star f(x,y)] \diamond b(x,y) \quad (1.15)$$

$$= \left[\int h(x-s,y-t; s,t,f) f(x-s,y-t) ds dt \right] \diamond b(x,y) \quad (1.16)$$

où \star est utilisé ici pour définir une convolution spatialement variante, \diamond un opérateur générique soit d'addition soit de multiplication, b un bruit éventuellement présent dans l'image observée, et s et t les coordonnées spatiales. Ici, le flou h est donc dépendant de l'image originale f .

Cependant, cette dépendance du flou h avec l'objet f observé n'est en général pas fondamentale et peut être négligée. On arrive alors à l'intégrale de superposition [149]

$$g(x,y) = [h(x,y; s,t) \star f(x,y)] \diamond b(x,y) \quad (1.17)$$

$$= \left[\int h(x-s,y-t; s,t) f(x-s,y-t) ds dt \right] \diamond b(x,y). \quad (1.18)$$

De même, une hypothèse de variance spatiale du flou est seulement induite par la présence de phénomènes particuliers, tels que mouvement rotatif, et autres. Nous avons pour cette raison choisi de l'éliminer, dans la mesure où ce type de dégradation ne nous semble pas pouvoir être fréquent dans le cadre de l'application visée. Mais également

2. Dénomination communément anglicisée en « PSF » (*Point Spread Function*).

pour des questions de simplicité, étant donné le caractère très délicat que présente un problème aveugle (intrinsèquement déjà difficile), avec de tels noyaux. Le modèle de formation d'images résultant est alors beaucoup plus simple à traiter et se réduit à

$$g(x,y) = [h(x,y) * f(x,y)] \diamond b(x,y) \quad (1.19)$$

$$= \left[\int h(s,t) f(x-s, y-t) \, ds \, dt \right] \diamond b(x,y) \quad (1.20)$$

$$= \left[\int h(x-s, y-t) f(s,t) \, ds \, dt \right] \diamond b(x,y) , \quad (1.21)$$

où $*$ est l'opérateur usuel de convolution.

Pour une image f numérisée, qui est le cas qui nous intéresse (f , g et h étant alors des matrices), nous obtenons alors des relations précédentes le modèle convolutif discret suivant :

$$g(x,y) = [h(x,y) * f(x,y)] \diamond b(x,y) \quad (1.22)$$

$$= \left[\sum_k \sum_l h(x-k, y-l) \cdot f(k,l) \right] \diamond b(x,y) \quad (1.23)$$

$$= \left[\sum_k \sum_l h(k,l) \cdot f(x-k, y-l) \right] \diamond b(x,y) . \quad (1.24)$$

On peut réordonner lexicographiquement les éléments de f dans un vecteur \mathbf{f} , et la relation (1.24) peut alors se présenter sous la forme d'un produit matrice vecteur, souvent plus simple à manipuler, dans lequel h prend la forme d'une matrice de Toeplitz par blocs avec blocs de Toeplitz (abrégé BTTB par la suite) H :

$$\mathbf{g} = H \cdot \mathbf{f} \diamond \mathbf{b} . \quad (1.25)$$

1.5.2 Images multicanales et couleurs

On a souvent besoin d'avoir accès à l'information couleur (beaucoup plus riche au demeurant que l'échelle de gris) afin de pouvoir mieux exploiter les données fournies. Dans ce cas, le modèle (1.21) ne convient plus, puisqu'il ne prend pas en compte les différentes composantes de l'image considérée. En effet, une image couleur pourra être définie comme comportant plusieurs canaux, correspondants chacun à une couleur fondamentale. Il existe plusieurs systèmes de couleur, et l'un des plus courants est le système rouge, vert, bleu (dénoté RVB ou RGB par la suite), résultant en un modèle à trois canaux. Chaque couleur est alors composée d'un « mélange » pondéré de ces trois couleurs fondamentales. Il existe bien sûr d'autres images multicanales que les images couleurs, par exemple en imagerie satellitaire.

Une des grandes différences de la restauration d'images multicanales avec le cas des images monochromes est alors de savoir s'il faut considérer les flous propres aux canaux (ou intracanaux), et des flous provenant de la dépendance entre les canaux, dits intercanaux. Ce point ne nous a pas semblé néanmoins primordial, et nous n'avons pas considéré qu'il nécessitait des investigations approfondies, dans la mesure où rarissimes sont les études prenant en compte cette subtilité, *a fortiori* dans le cadre particulier de la déconvolution aveugle, déjà suffisamment délicat à traiter dans ses formulations les plus simples.

Dans le cas des images en couleurs, les modèles de dégradation demeurent fondamentalement identiques à ceux définis dans le cas monochrome, à la différence que les flous et bruits peuvent être considérés, ou pas, comme étant semblables dans chaque canal; ceci étant en général à préciser en fonction des caractéristiques du système optique d'acquisition considéré.

Si l'on considère un flou identique dans chaque canal, mais un bruit, lui, différent, nous avons pour une image discrète le modèle de dégradation général

$$g_i(x,y) = [h(x,y) * f_i(x,y)] \diamond b_i(x,y) \quad \text{avec } i = R,V,B , \quad (1.26)$$

où i représente l'indice du canal. Si le flou est considéré différent dans chaque canal, alors on a

$$g_i(x,y) = [h_i(x,y) * f_i(x,y)] \diamond b_i(x,y) \quad \text{avec } i = R,V,B . \quad (1.27)$$

Cependant, nous faisons l'hypothèse que le flou est identique dans chacun de canaux, aucune raison physique ne semblant s'opposer à cela.

À titre indicatif, et bien qu'elle soit peu utilisée (sa pertinence n'étant pas triviale), la prise en compte des flous intercanaux résulterait en la formulation

$$g_j(x,y) = \sum_{i=R,V,B} [h_{ij}(x,y) * f_j(x,y)] \diamond b_j(x,y) \quad \text{avec } j = R,V,B . \quad (1.28)$$

Néanmoins, nous ne retiendrons pas ce modèle, et nous limiterons au cas (1.26), suffisamment riche pour appréhender de manière fiable la problématique traitée.

1.5.3 Modélisation du bruit présent

En ce qui concerne les caractéristiques du bruit d'observation, nous ferons dans ce travail une hypothèse de bruit additif, car c'est le type le plus communément rencontré dans les systèmes optiques de type appareil photographique ou caméra vidéo. L'équation de modélisation retenue pour notre modèle sera donc, dans le cas monocanal :

$$g(x,y) = h(x,y) * f(x,y) + b(x,y) \quad (1.29)$$

$$= \sum_k \sum_l h(x-k,y-l) f(k,l) + b(x,y) \quad (1.30)$$

ou, sous forme d'un produit matrice vecteur

$$\mathbf{g} = H\mathbf{f} + \mathbf{b} . \quad (1.31)$$

La distribution du bruit pourra, elle, être considérée comme gaussienne³. Une étude approfondie du système imageur utilisé pourrait permettre d'en estimer les paramètres de manière plus approfondie, mais ceci n'est pas fondamental ici.

Si nous traitons d'images couleurs, nous considérons alors plusieurs canaux quel que soit le système de couleur utilisé. Nous avons choisi plus haut de considérer que le flou est identique dans chaque canal de l'image RGB. En revanche, il ne peut en être de même pour le bruit. Bien que son type soit logiquement identique dans chaque canal, son niveau ne peut pas être identique. En effet, que l'image soit acquise par un appareil photographique ou une caméra vidéo, nous sommes dans les deux cas en présence d'un

3. Voir [183] pour plus de détails.

capteur CCD avec matrice de Bayer. Dans le système RGB, les canaux bleu et vert sont alors respectivement les plus, et les moins, intensément bruités [25].

Soit g l'image observée, f l'image originale, h le flou et b le bruit présent (inhérent au système optique), on peut alors poser comme modèle de dégradation :

$$g_i = h * f_i + b_i , \quad (1.32)$$

avec $i = 1,2,3$ l'indice représentant les différents canaux de l'image f . Il s'agit d'une simple convolution en deux dimensions, par canal, modélisant dans la plupart des cas de façon satisfaisante le floutage et bruitage d'une image.

1.6 Modélisation des flous

Portons maintenant attention au flou h . Deux types principaux peuvent être rencontrés dans les situations de prises d'images de l'application qui nous intéresse : flou de mouvement, dû au bougé pendant la phase d'acquisition, et flou de défocalisation, dû à un mauvais réglage de la focale de l'appareil utilisé. Une difficulté qui peut de même être rencontrée est que ces deux types de flou peuvent par moment affecter simultanément les images acquises. Ceci est un obstacle important, résultant en des noyaux très généraux, et qui est traité de manière rarissime dans la littérature scientifique. En posant que $h = h_1 * h_2$, notre modèle (1.32) s'écrirait alors de manière plus précise

$$g_i = h_1 * h_2 * f_i + b_i . \quad (1.33)$$

Le flou de mouvement sans autre contrainte n'est pas caractérisable autrement que par une courbe paramétrique. En revanche, si l'on se ramène à un modèle uniforme linéaire (parfois valable en première approximation), $h_2 = h_2(l,\theta)$ dépend alors de deux paramètres : orientation θ , et longueur du support l . Le noyau de défocalisation (parfaite) $h_1 = h_1(\rho)$ est lui toujours paramétrable et dépend d'un paramètre unique ρ .

1.6.1 Flou de défocalisation

Le flou de défocalisation est un opérateur transformant l'image d'un point en un disque de rayon ρ . Il est déterminé par un unique paramètre ρ , son rayon, et est donné par

$$h_1(x,y)(\rho) = \begin{cases} \frac{1}{\pi\rho^2} & \text{si } \sqrt{x^2 + y^2} \leq \rho \\ 0 & \text{ailleurs .} \end{cases} \quad (1.34)$$

Un exemple de tel flou, suivant deux représentations (vu de haut, et vu de 3/4) est donné en Fig. 1.1.

1.6.2 Flou de mouvement rectiligne

La fonction de dispersion⁴ d'un tel noyau dépend, comme nous l'avons dit, de deux paramètres, sa longueur l et son orientation θ , et s'écrit

$$h_2(x,y)(l,\theta) = \begin{cases} \frac{1}{l} & \text{si } \sqrt{x^2 + y^2} \leq \frac{l}{2} \quad \text{et} \quad \tan \theta = \frac{y}{x} \\ 0 & \text{ailleurs .} \end{cases} \quad (1.35)$$

Un exemple de représentation, également sous deux angles, est donné en Fig. 1.2. Ce noyau convolué avec l'image d'un point résulte en sortie en un segment de droite, de longueur l et d'angle θ . Mais comme nous l'avons dit, le flou de bougé n'est pas exclusivement

4. Également appelée « réponse impulsionnelle ».

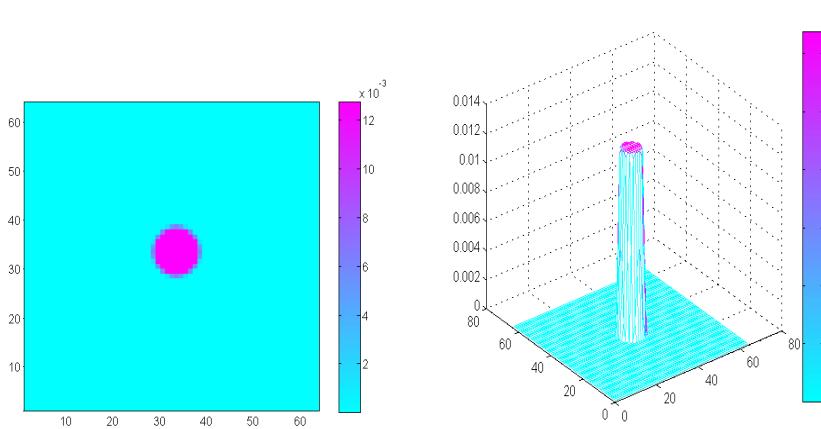


FIGURE 1.1 – Exemple de flou de défocalisation, vu de haut, et vu de 3/4.

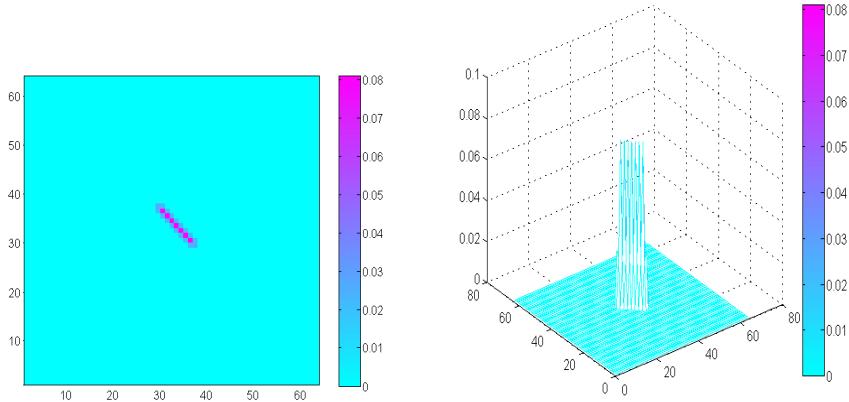


FIGURE 1.2 – Exemple de flou de mouvement, vu de haut, et vu de 3/4.

rectiligne uniforme (c'est au contraire plutôt un cas restrictif de la réalité physique), et le cas général serait plutôt de considérer une ligne courbe avec valeurs variables le long de celle-ci, ce qui est néanmoins bien plus délicat à traiter pour des problèmes de déconvolution.

2 Déconvolution : théorie et principes

On présente ici la problématique fondamentale des problèmes inverses et de leur régularisation, dont la déconvolution est un cas particulier. On pourrait en effet naïvement penser que le fait de disposer de la connaissance du noyau de flou affectant une image est suffisante pour pouvoir « annihiler » ce défaut, en effectuant une opération inverse. Il n'en n'est en fait rien, et la restauration, aveugle ou non, s'avère un phénomène instable, très facilement perturbable, et que l'on appelle « problème mal-posé ».

2.1 Filtrage inverse et son instabilité

En l'absence de bruit, une manière naturelle et intuitive de résoudre l'équation (1.31), soit le problème de déconvolution de g , serait d'effectuer un filtrage inverse en multipliant matriciellement à gauche par H^{-1} , ou par l'inverse généralisée H^\dagger si H n'est pas carrée :

$$\tilde{f} = H^\dagger g . \quad (1.36)$$

On montre facilement que cette solution est équivalente à l'estimateur des moindres carrés [79]

$$\min_{\mathbf{f}} \|\mathbf{g} - H\mathbf{f}\|_{L^2}^2 \quad \text{ou} \quad \min_f \|g - h * f\|_{L^2}^2 . \quad (1.37)$$

Cette solution est cependant la plupart du temps inacceptable car elle produit une amplification du bruit b inhérent à l'image, amplification qui « noie » les structures de l'image. En effet, l'équation d'inversion est alors dans les faits

$$\tilde{\mathbf{f}} = H^\dagger \mathbf{g} + H^\dagger \mathbf{b} , \quad (1.38)$$

dans laquelle le deuxième terme introduit de très grandes valeurs parasites qui peuvent largement surpasser celles du premier terme. Ceci est dû au fait que le problème de déconvolution est un problème mal posé, qui ne vérifie pas les propriétés de stabilité requises pour ce genre d'opération.

À l'inverse, Hadamard a défini en 1923 un problème bien posé comme respectant les conditions ci-après [82] :

1. Existence de la solution
2. Unicité de la solution
3. Stabilité - continuité par rapport aux données .

La stabilité signifie concrètement qu'une petite perturbation sur les données observées n'entraîne qu'une petite erreur sur la solution. Cette condition n'est malheureusement quasi jamais vérifiée pour les problèmes inverses de traitement de l'image.

Il a donc été développé des techniques dites de « régularisation », afin de pallier cette difficulté et de pouvoir calculer une solution admissible au problème. Dans le cas du modèle (1.37), une des approches possibles (et la plus classique) peut alors être de minimiser cette fonctionnelle des moindres carrés, à laquelle est adjointe un opérateur de stabilisation, qui vise d'une certaine manière à fixer l'espace d'appartenance de l'image (L^2 , H^1 , etc.). Cela nous donne alors le problème d'optimisation

$$\min_{\mathbf{f}} \|H\mathbf{f} - \mathbf{g}\|_{L^2}^2 + \alpha \mathcal{R}(\mathbf{f}) , \quad (1.39)$$

dans lequel α est un paramètre dit de régularisation, c'est-à-dire permettant de contrôler la balance entre l'importance du premier terme d'attache (ou de fidélité) aux données connues, et $\mathcal{R}(\mathbf{f})$ un opérateur de régularisation, permettant, lui, de forcer la solution à exhiber un certain nombre de propriétés voulues, particulièrement concernant sa régularité, son caractère lisse. A cette fin, \mathcal{R} est en général un opérateur passe-haut.

2.2 Régularisation des problèmes mal-posés

Plus généralement, un régulariseur (ou régularisateur) de l'équation linéaire $\mathbf{g} = H\mathbf{f}$ est une famille d'opérateurs bornés $\mathcal{R}_\alpha = \alpha \mathcal{R}$ tels que

$$\mathcal{R}_\alpha : X \rightarrow Y , \alpha > 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0} \mathcal{R}_\alpha \mathbf{g} = H^\dagger \mathbf{g} \quad \forall \mathbf{g} \in Y . \quad (1.40)$$

Comme l'opérateur H^{-1} ne présente pas la stabilité requise, ceci revient à construire une classe d'opérateurs de stabilisation ayant comme cas limite H^\dagger . S'il est appliqué à des données parfaites, \mathcal{R}_α fournit alors une approximation de f^\dagger d'autant meilleure que $\alpha \rightarrow 0$. Nous obtenons alors une solution notée $\mathbf{f}^\alpha = \mathcal{R}_\alpha \mathbf{g}$, dans laquelle α est le paramètre de régularisation, qui est à régler suivant les caractéristiques propres du problème (structure

de l'image, niveau de bruit, etc.). Ce paramètre contrôle le compromis entre l'amplification du bruit (quand α est nul, donc pas de régularisation), et l'erreur d'approximation entre \mathcal{R}_α et H^\dagger due à la régularisation (compromis sur la « douceur » de l'image).

Le choix de ce paramètre de contrôle α est une question difficile et centrale en restauration d'images, de par son influence sur la qualité de la solution. Globalement, on peut dire que sa valeur dépend pour beaucoup du niveau de bruit présent dans l'image que l'on souhaite déflouer, et du conditionnement mathématique du noyau l'affectant, c'est-à-dire, pour un opérateur H tel que $\mathbf{g} = H\mathbf{f}$, de la quantité $\text{cond}(H) = \|H\| \cdot \|H^{-1}\|$, où $\|\cdot\|$ est la norme l^2 .

Les méthodes de régularisation peuvent être classées en deux groupes [92] :

1. Régularisation par contrôle de dimension.
2. Régularisation par minimisation d'un critère composite.

Nous décrivons ci-dessous brièvement le principe de ces deux approches.

2.2.1 Régularisation par contrôle de dimension

Il s'agit de contourner la difficulté du caractère mal posé ou mal conditionné du problème inverse de deux manières :

- en minimisant le critère $\Phi(H\mathbf{f} - \mathbf{g})$, où Φ est une norme, dans un sous-espace de dimension réduite, après un éventuel changement de base approprié.
- en minimisant le critère $\Phi(H\mathbf{f} - \mathbf{g})$ dans l'espace initialement choisi, mais par une méthode itérative dont on limite le nombre d'opérations.

Des exemples de telles méthodes sont fournis entre autre par la décomposition tronquée en valeurs singulières [84], les méthodes itératives de type Van Cittert et Landweber [112, 191], de même que par les techniques de seuillage des coefficients de la transformée en ondelettes [99, 100].

2.2.2 Régularisation par minimisation d'un critère composite

La caractéristique principale de cette classe de méthodes de régularisation est de demander à la solution de réaliser un compromis entre une fidélité aux données mesurées et une fidélité à une information donnée a priori.

Une des techniques fondamentales en restauration d'images est la régularisation au sens de Tikhonov⁵, introduite en 1963 [65, 66, 68] et qui consiste à minimiser $\|h * f - g\|_{L^2}^2$ avec en sus un terme en norme L^2 portant sur l'image f ou sur son gradient ∇f ; ceci menant au problème bien connu de minimisation

$$\min_{\mathbf{f}} \|H\mathbf{f} - \mathbf{g}\|_{L^2}^2 + \|D\mathbf{f}\|_{L^2}^2, \quad (1.41)$$

dans lequel D est un opérateur passe-haut issu de la discréttisation du gradient, incluant un éventuel paramètre de régularisation. Ce problème est alors un cas particulier de (1.39), et sa solution est donnée par

$$\tilde{\mathbf{f}} = (H^T H + D^T D)^{-1} H^T \mathbf{g}. \quad (1.42)$$

5. Également translittéré de l'alphabet cyrillique *Tikhonov*, particulièrement dans la littérature en langue anglaise.

De manière plus générale, ce type d'approche consiste en fait à considérer les problèmes d'optimisation génériques

$$\min_{\mathbf{f}} \Phi(H\mathbf{f} - \mathbf{g}) + \alpha \mathcal{R}(\mathbf{f}), \quad (1.43)$$

dans lesquels Φ est une norme (le plus couramment L^2) permettant de définir le terme de fidélité aux données. Celles-ci seront explicitées dans le chapitre suivant.

3 De la difficulté de l'évaluation qualitative des résultats en déconvolution aveugle

On utilisera dans la suite de cette thèse différents indicateurs d'évaluation de la qualité des images restaurées. Parmi ceux-ci, on portera un intérêt particulier au très classique PSNR (*Peak Signal to Noise Ratio*), qui mesure d'une certaine façon la distance quadratique entre deux images, et qui est un indicateur proposant une comparaison globale des images dans leur entièreté. Mais nous porterons également attention au plus récent SSIM (*Structural SIMilarity index*) [202], qui permet lui une mesure de similarité structurelle locale entre deux images, et dont on verra qu'il se révèle souvent plus adapté au problème de déconvolution aveugle que le PSNR.

Cependant, il est très important de comprendre que l'utilisation de ces indicateurs ne peut fournir qu'une idée très partielle, et parfois très partielle même, de la performance d'une méthode de déconvolution aveugle. En effet, ils ne mesurent clairement en rien le caractère net ou pas d'une image, et il est tout à fait possible de rencontrer des cas de figure dans lesquels, en partant d'une donnée nette f et de son homologue g flouée, l'image restaurée estimée \tilde{f} exhibe des indicateurs qualitatifs moins bons que ceux de g , et ce bien que, visuellement, l'image soit plus agréable, plus claire, plus nette.

Ceci est essentiellement à rapprocher du fait que la déconvolution aveugle doit compter avec une image dégradée dont la dégradation se représente via une fonction de dispersion inconnue, et qui doit être estimée, reconstruite. Or cette estimée sera - sauf cas extrêmement particuliers - toujours entachée d'erreurs, même minimes. Ces erreurs se répercuteront lors de la phase d'inversion du noyau de flou, résultant en la présence d'un certain nombre d'artefacts sur l'image restaurée, tels que des ondulations de haute fréquence. Ces artefacts ont alors bien évidemment pour effet de faire fortement chuter des indicateurs comme le PSNR, et ce malgré le fait que l'image traitée puisse apparaître visuellement « bien restaurée » du point de vue de son apparence, qu'elle soit (encore) floue ou non.

Un autre phénomène qui peut entrer en jeu est celui de la dynamique de l'image. En effet, suivant la méthode de déconvolution qui est utilisée - et ceci n'est pas propre à la déconvolution aveugle -, l'image restaurée résultant du traitement peut présenter une plage dynamique (de niveaux de luminance) légèrement altérée par rapport à celle de l'image originale nette, avec un contraste un peu différent. Ce phénomène a par exemple été mis en évidence dans le cas de l'utilisation de schémas de restauration basés sur une minimisation quadratique en conjonction avec certaines régularisations non-quadratiques. Il a été montré, par exemple dans [38], que l'emploi d'un critère des moindres carrés et de la régularisation par norme TV (variation totale) résultait en une image à contraste atténué. Ceci ayant également un impact sur des critères d'évaluations uniquement basés sur la valeur des niveaux de gris.

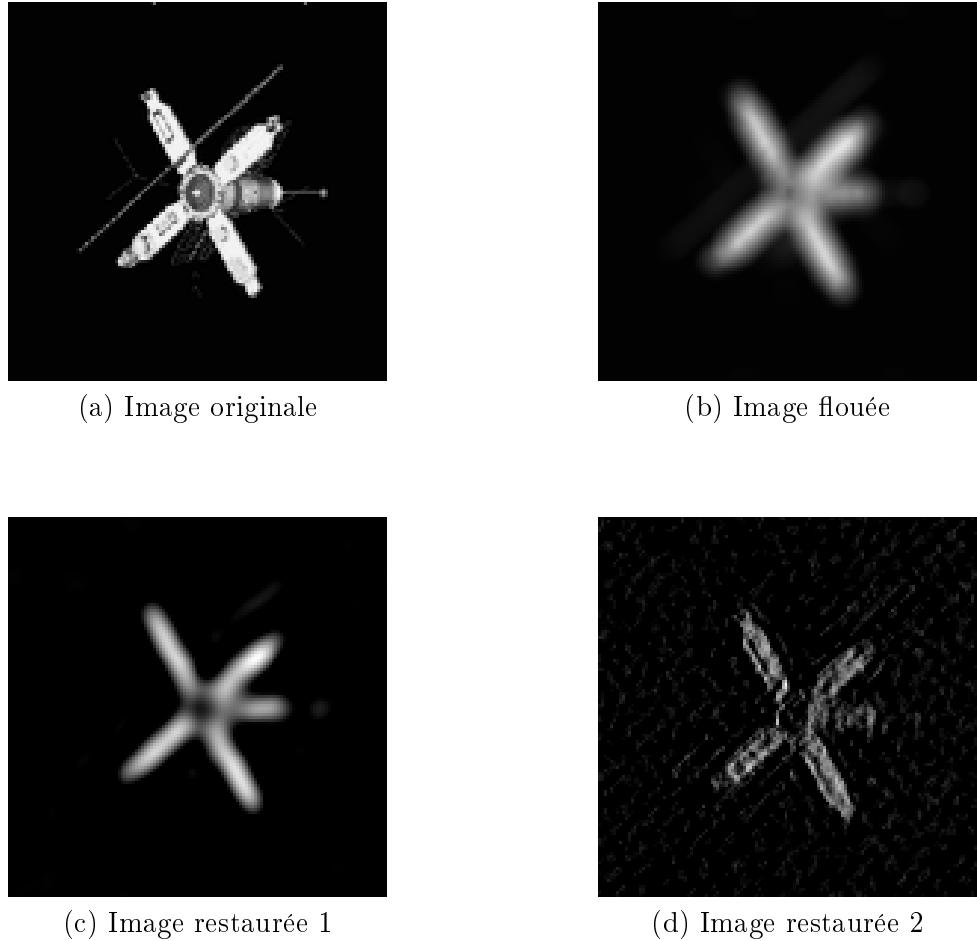


FIGURE 1.3 – Images *Satellite* utilisées pour la mise en évidence des difficultés de mesure de la qualité de la déconvolution aveugle.

Nous montrons un exemple de ce type de phénomène en considérant l'image de la Fig. 1.3 (a). Celle-ci a été flouée par un noyau de défocalisation de paramètre $\rho = 5$ (cf. Fig. 1.3 (b)). Nous allons utiliser plusieurs indicateurs permettant de mesurer la « qualité » de cette image : le PSNR, le SSIM, le MAE (*Mean Absolute Error*), le RMSE (*Root Mean Square Error*) et le MAX [101]. Ensuite, nous appliquerons ces mêmes indicateurs à deux images restaurées par déconvolution aveugle, présentées en Fig. 1.3 (c) et (d). L'idée est alors de mettre en évidence que, bien que les images traitées puissent apparaître plus agréables à l'œil, plus nettes, davantage déflouées, les indicateurs de mesure peuvent ne pas refléter ce fait et évaluer les images floues sources comme étant « meilleures ». Les PSNR et SSIM doivent présenter des valeurs les plus hautes possibles, tandis que les autres indicateurs, mesurant des erreurs, doivent présenter, eux, des valeurs les plus faibles possibles.

Le Tab. 1.1 synthétise l'ensemble des mesures effectuées sur les différentes images présentées en Fig. 1.3. La première image restaurée (c) n'est absolument pas nette, et l'essai de déconvolution fait qu'elle demeure très floue, très lissée. En revanche, dans la deuxième image restaurée (d), la structure de l'objet est déjà beaucoup plus nette, bien que perturbée (de même que le fond de la scène). Cependant, il apparaît des résultats du tableau, d'après l'ensemble des indicateurs considérés, que c'est l'image floue (b) qui

Indicateur	Image (b)	Image (c)	Image (d)
PSNR (dB)	20,72	20,53	15,43
RMSE	23,47	24	43,16
MAE	8,86	8,63	16,67
MAX	173	206	246
SSIM	0,7749	0,5472	0,3888

TABLEAU 1.1 – Indicateurs de mesure de qualité pour les images de la Fig. 1.3 (en vert : meilleures valeurs ; en rouge : pires valeurs).

serait la « meilleure », puisque, hormis pour le PSNR, les autres critères mesurent une erreur, qui doit donc être la plus basse possible. Ceci nous montre bien la mesure toute relative de la qualité du déflouage en aveugle par ces indices.

Très souvent, estimer des résultats de déconvolution peut se faire soit visuellement, et donc subjectivement, soit à l'aide d'indicateurs théoriques, donc qualitativement. Cependant, dans ce domaine, et a fortiori en déconvolution aveugle, l'utilisation de ces indicateurs n'est pas forcément systématiquement et directement applicable ni adéquate.

En outre, il est bien évident que pour des applications réelles, l'image nette recherchée est totalement inconnue, puisque le but justement recherché est de l'estimer. Dans ce cas, il va de soit qu'aucun indicateur de mesure n'est alors possible, et seul un critère visuel subjectif par rapport à l'image source floue est alors utilisable.

4 Du conditionnement des opérateurs de flous

En général, la plupart des expérimentations effectuées dans la littérature consacrée au problème de déconvolution aveugle, utilisent des noyaux de flou très petits. Ceci pour deux raisons, qui, à notre avis, impliquent des conditions très favorables :

- Inversion du noyau mieux conditionnée.
- Problème plus simple de par la faible quantité d'information perdue dans l'image.

Dans des cas plus réalistes cependant, les noyaux à considérer sont autrement plus grands. Leur inversion n'en devient alors que plus délicate.

À titre illustratif, on pourra consulter les valeurs de conditionnements pour quelques opérateurs de flous de mouvement et de défocalisation, données en Fig. 1.4, Fig. 1.5 et Fig. 1.6. Le premier graphique illustre l'évolution du conditionnement d'un flou de défocalisation, appliqué à une image de taille 65×65 , suivant son rayon⁶. On constate bien que le conditionnement atteint très vite des valeurs extrêmement importantes, et que prendre en compte un noyau de $\rho = 0,8$ ou $\rho = 4$ mène à des problèmes de stabilité très différents. En effet, on peut comprendre le conditionnement comme étant une mesure donnant un ordre de grandeur du niveau d'erreur relative sur la solution, par rapport à l'erreur relative sur la donnée observée. Un conditionnement de 10^5 implique donc une erreur d'estimation de \mathbf{f} , en inversant H dans $\mathbf{g} = H\mathbf{f}$, de l'ordre de 10^5 fois celle sur \mathbf{g} , qui serait obtenu initialement par $\mathbf{g} = H\mathbf{f} + b$, et dont l'erreur proviendrait de la présence

6. Le noyau est donc en pratique discréétisé sur une grille de taille similaire 65×65 , et représenté sous forme d'une matrice de cette dimension, dont seuls des coefficients centraux sont non-nuls.

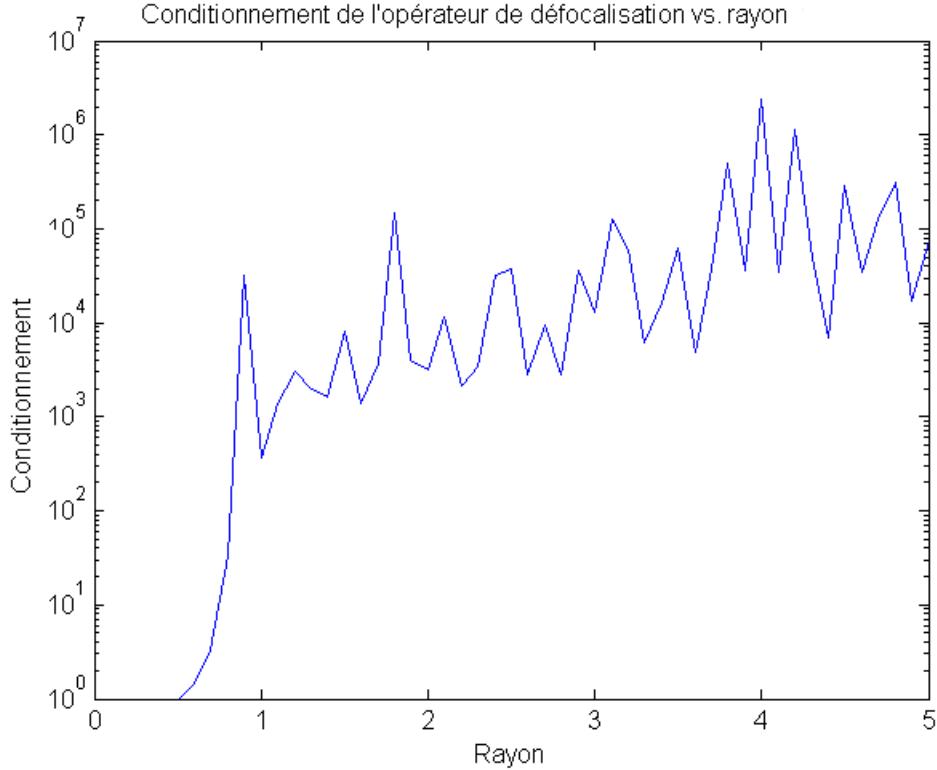


FIGURE 1.4 – Conditionnement de l’opérateur de défocalisation suivant son rayon (pix.), appliqué à une image de taille 65×65 .

du bruit b .

Les deux graphiques suivants, en Fig. 1.5 et Fig. 1.6, s’appliquent eux aux noyaux de mouvement rectiligne uniforme biparamétriques, et illustrent la même tendance : si globalement des noyaux de longueur de support $l \leq 2$ sont utilisés, l’inversion sera bien plus simple qu’avec des longueurs plus élevées. On constatera également que l’orientation de ces noyaux a un effet certain sur la valeur du conditionnement.

Globalement, il apparaît clairement que déflouer en aveugle de très petits noyaux, comme cela est fait dans la grande majorité des travaux publiés, est un cas tout à fait favorable d’une part, et de l’autre peu représentatif de l’ensemble des problèmes réels susceptibles de se poser dans des applications pratiques.

Les noyaux que nous considérerons dans nos expérimentations seront donc à chaque fois des opérateurs induisant une dégradation majeure de l’image, affectant fortement son contenu visuel. L’efficacité des approches présentées n’en sera alors que davantage confirmée.

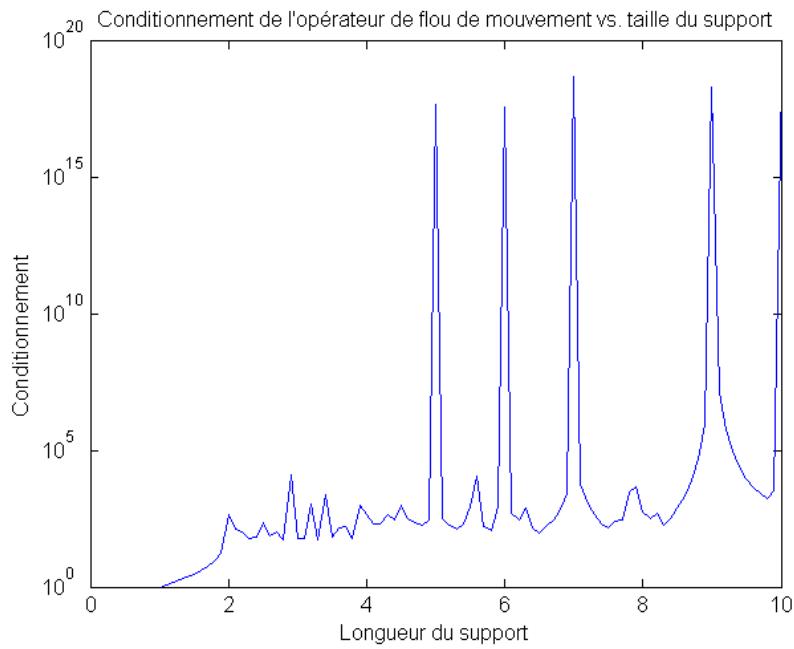


FIGURE 1.5 – Conditionnement de l’opérateur de flou de mouvement rectiligne d’angle nul, suivant sa longueur de support (pix.), appliqué à une image de taille 65×65 .

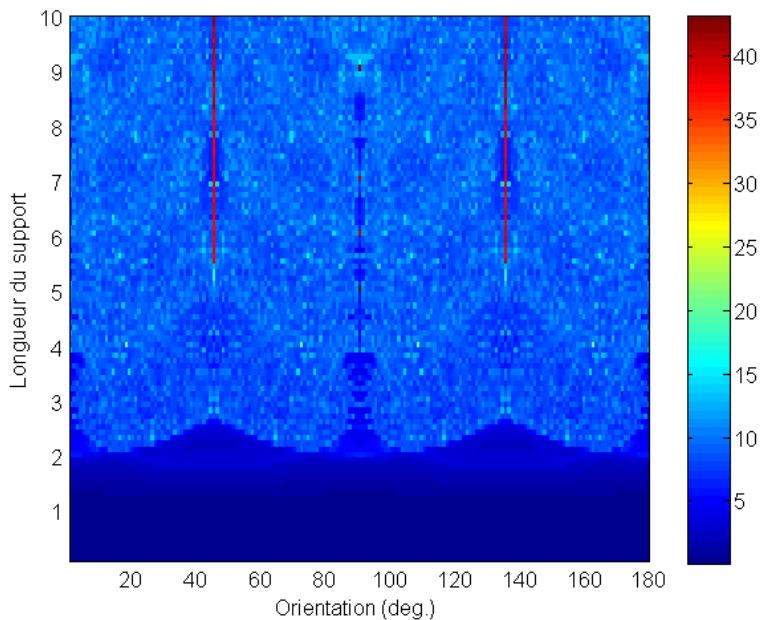


FIGURE 1.6 – Logarithme du conditionnement de l’opérateur de flou de mouvement rectiligne 2D appliquée à une image de taille 65×65 , suivant la longueur de son support (pix.) et son orientation.

Chapitre 2

État de l'art en déconvolution aveugle

Dans ce chapitre, nous allons présenter l'ensemble des techniques existantes en déconvolution aveugle d'images, suivant leurs différentes approches. Étant donné que le caractère aveugle de ces méthodes de restauration peut être vu comme une extension des techniques de restauration « simples », ou « classiques », c'est-à-dire à flou connu, nous allons voir qu'il est nécessaire de donner également un aperçu de ces dernières approches, en plus de celles bien spécifiquement axées sur l'approche aveugle. En effet, nombre d'algorithmes, qu'ils soient récents ou plus anciens, se basent en fait sur des techniques « simples », auxquelles sont adjointes des procédures plus spécifiques d'identification de la dégradation, afin de pallier le caractère aveugle du problème.

Précisons de suite que le formalisme utilisé majoritairement tout au long de ce chapitre, et a fortiori de ce mémoire, est déterministe. Il existe en effet également un grand nombre d'approches basées sur des formulations stochastiques. À notre choix, peu de raisons particulières, si ce n'est que le cadre déterministe nous est apparu requérir des formulations mathématiques moins alambiquées et plus rapidement appréhendables. En outre, il convient de bien préciser que la plupart des approches déterministes ont une formulation stochastique équivalente, et réciproquement. Le choix de l'une ou de l'autre n'étant alors en rien restrictif.

1 Introduction

On peut classifier de manière générale les approches de déconvolution aveugle en deux catégories, suivant la façon dont on va identifier le flou : soit *a priori*, c'est-à-dire de manière disjointe à la procédure de restauration, préalablement à celle-ci, et indépendamment, soit de manière jointe à cette même étape de restauration de l'image, la plupart du temps dans le cadre d'une méthode itérative, alternant entre l'estimation du noyau de flou et de l'image restaurée, jusqu'à une convergence escomptée.

Méthodes avec identification du flou *a priori*. Ces méthodes visent à estimer la réponse impulsionnelle h à partir de l'image dégradée uniquement. Cette estimation est ensuite utilisée dans un schéma d'inversion classique. Les premières techniques de déconvolution aveugles se sont basées sur cette approche [30, 31, 181], en partie en raison de leur grande simplicité, et donc aussi de leur relative rapidité, à une époque où le calcul numérique était encore balbutiant. Cette approche a donc pour avantage sa rapidité, mais présente de l'autre côté le défaut d'être de fonctionnement assez

aléatoire en pratique. En effet, si l'estimation obtenue à l'identification n'est pas de qualité suffisante, alors le processus de déconvolution de l'image ne pourra qu'être médiocre, sans aucune possibilité de correction *a posteriori*. Notons que les meilleurs résultats obtenus avec ce genre de techniques le sont dans les cas de modèles de flous paramétriques, pour lesquels on considère alors connue la classe paramétrique du noyau, ce qui constraint donc fortement leur estimation. Notons enfin que certaines méthodes plus récentes, et qui sont assimilables à cette catégorie proposent d'estimer directement l'inverse de la dégradation (ex. [28]). L'ensemble de ces approches est examiné dans la Section 2.

Méthodes d'identification jointe. La plupart des méthodes actuelles rentrent dans cette deuxième catégorie. L'image restaurée et le flou y sont estimés simultanément, même si cette appellation est un peu impropre, car dans les faits, le processus est très souvent alterné sur ces deux données. Ceci en raison du fait que la calcul d'une solution jointe est souvent problématique, par exemple à cause de difficultés posées par la minimisation de fonctionnelles non convexes. Ces méthodes d'identification jointe sont algorithmiquement bien plus complexes, nécessitant de plus longs temps de calculs, mais sont mieux à même de traiter des problèmes généraux avec des noyaux non-paramétriques, dans lesquels on cherche à reconstruire tout un opérateur de flou (soit une surface 2D), en raison de leur plus grande robustesse. Ces méthodes feront l'objet de la Section 3.

2 Méthodes avec identification du flou *a priori*

Nous donnons dans cette section un aperçu des méthodes existantes dans le domaine de la déconvolution aveugle par identification *a priori* du flou. Ces méthodes reposent principalement sur une estimation préalable du flou à partir de la seule connaissance de l'image observée, puis d'une étape d'inversion de ce flou estimé, ceci par une des innombrables méthodes existantes pour la restauration « classique » d'images, c'est-à-dire à flou connu. En bref, ces méthodes contiennent donc globalement deux étapes :

1. Estimation préalable du flou.
2. Restauration de l'image avec flou connu.

Le point essentiel se situe de manière claire dans la première étape d'estimation, car c'est la qualité de cette estimée obtenue qui conditionnera la bonne marche ou non du processus de restauration par inversion consécutif. Notons que c'est ce genre d'approches qui a été utilisé dans les premières techniques de déconvolution d'images telles que [181] et [31].

En ce qui concerne la deuxième étape de restauration à partir du flou estimé, nous donnerons principalement les techniques générales parmi les très nombreuses méthodes existantes, car une énumération exhaustive ne relèverait pas de notre propos.

2.1 Estimation préalable du flou

Comme nous l'avons dit plus haut, les méthodes initiales de déconvolution aveugle d'images rentrent dans cette catégorie. Leur grande simplicité et donc leur rapidité étaient idéales du point de vue des besoins (et des possibilités) en capacité de calcul. En revanche, leur robustesse n'était en général pas avérée.

Un certain nombre des approches ici présentées procèdent en deux sous-étapes : estimation de la taille du support, puis calcul des coefficients. Si l'estimation de la taille

du support du flou diffère de sa taille réelle, les coefficients ne peuvent pas être estimés de manière fiable. Cette estimation préalable du flou permet dans certains cas précis d'arriver à de bien meilleurs résultats que ne le fait une procédure de déconvolution à identification jointe, et plus rapidement ; mais bien entendu uniquement dans le cas d'une estimation suffisamment exacte.

Plusieurs parmi ces méthodes sont conçues pour être utilisées avec un type de flou à chaque fois bien particulier, cela pouvant être un noyau gaussien, de mouvement, de défocalisation, etc. Cependant, le point négatif de ces approches est que, dans leur grande majorité, elles ne peuvent fonctionner qu'avec des modèles de flou paramétriques, ce qui exclut donc a priori la plupart des images réelles observées en pratique, pour lesquelles le flou ne peut pas être forcément toujours modélisée de la sorte de manière fiable. En effet, celui-ci n'est alors dans ce cas que plus ou moins proche d'un modèle paramétrique (étant p. ex. un disque plus ou moins régulier pour une défocalisation).

Précisons que ce type d'approches est en pratique majoritairement utilisé dans le cadre d'une démarche expérimentale : on collecte une ou plusieurs images d'un point source, et on en déduit la fonction de dispersion du système imageur. C'est par exemple ce qui a été fait dans le cas du télescope spatial Hubble. De même, si la physique du système imageur peut être modélisée de façon précise, alors on peut en déduire une estimation a priori du flou qui affectera les images issues de ce système. Ceci peut par exemple être fait en microscopie, télédétection, etc.

Parmi les défauts inhérents à ces méthodes d'estimation a priori, on pourra citer le manque de réalisme du modèle d'image sous-jacent, souvent basé sur la réalisation d'un processus aléatoire. En outre, quand la scène contient des bords nets (ce qui est quasi systématiquement le cas), ou des textures variant spatialement, ces modèles ne permettent pas une estimation efficace du noyau de flou. En effet, pour que ces méthodes fonctionnent de manière efficace, il faut absolument que la modélisation globale (du flou et de l'image) soit suffisamment fiable.

Les méthodes que nous allons présenter ci-dessous ont été regroupées en 5 catégories. Celles-ci, cependant, ne sont pas totalement hermétiques les unes aux autres, et il peut arriver que certaines soient assimilables à l'une ou l'autre catégorie que celle à laquelle nous l'avons associée. Ces catégories seront les :

- Méthodes basées sur la modélisation ARMA.
- Méthodes basées sur les caractéristiques spectrales de l'image.
- Méthodes basées sur l'autocorrélation.
- Méthodes basées sur la transformée de Radon.
- Autres méthodes.

2.1.1 Méthodes basées sur la modélisation ARMA

Ces approches se basent sur la modélisation ARMA (angl. *AutoRegressive Moving Average*) des images floues. Cette modélisation repose sur deux processus : un processus AR pour le modèle d'image, et un processus MA pour le modèle de flou, ce qui permet de distinguer les effets du flou de ceux de l'image [30]. En effet, les images floues exhibent généralement les caractéristiques d'un lissage passe-bas, d'où l'intérêt du processus MA 2D utilisé pour représenter cet effet. Le processus MA identifié est alors pris pour être la description de la fonction de dispersion du système imageur. Le problème d'iden-

tification du flou affectant une image revient donc à l'identification d'un modèle ARMA 2D.

La modélisation de l'image discrète originale (AR 2D), est donnée par l'équation

$$f(x,y) = \sum_{k,l \in R_a; (k,l) \neq (0,0)} a_{k,l} f(x-k, y-l) + u(x,y) , \quad (2.1)$$

où les $a_{k,l}$ sont les coefficients du modèles, pris sur le demi-plan asymétrique (NSHP)¹ R_a , et u est un bruit blanc de moyenne nulle. On peut aussi utiliser la notation équivalente $\mathbf{f} = A\mathbf{f} + \mathbf{u}$, par ordonnancement lexicographique des éléments de f et u . L'équation décrivant l'image dégradée (MA 2D) s'écrit elle

$$g(x,y) = \sum_{(k,l) \in R_d} h_{k,l} f(x-k, y-l) + b(x,y) , \quad (2.2)$$

ou, sous forme plus compacte, $\mathbf{g} = H\mathbf{f} + \mathbf{b}$.

Ces deux expressions (2.1) et (2.2) peuvent être mises sous une forme réduite à une équation :

$$\mathbf{g} = H(I - A)^{-1}\mathbf{u} + \mathbf{b} . \quad (2.3)$$

De manière à spécifier complètement la manière dont les paramètres identifiés doivent être utilisés dans le schéma de restauration, on doit établir un critère définissant le résultat de la restauration. Il est en général choisi pour cela une régularisation quadratique, menant à une minimisation de la forme

$$\min_{\mathbf{f}} \|H\mathbf{f} - \mathbf{g}\|^2 + \alpha \|L\mathbf{f}\|^2 , \quad (2.4)$$

où L est un opérateur de régularisation, et α son paramètre de contrôle. Le résultat de restauration pour ce schéma est alors donné par

$$\tilde{\mathbf{f}} = (H^T H + \alpha L^T L)^{-1} H^T \mathbf{g} , \quad (2.5)$$

ce qui est naturellement identique à (1.42), avec $D = \sqrt{\alpha}L$.

Sur base de (2.3) et (2.5), on voit donc bien que pour obtenir \tilde{f} , il faut tout d'abord identifier les paramètres H du modèle MA, et A du modèle AR, ce qui, pour ce dernier cas, n'est pas trivial.

Validation croisée généralisée. Le critère de la validation croisée généralisée (angl. GCV) a tout d'abord été utilisé par Reeves [160, 162] pour l'estimation des paramètres d'un modèle ARMA. Le principe de la validation croisée est simple : pour une valeur fixée des paramètres du modèle, une image « restaurée » est déterminée en utilisant toutes les valeurs provenant de l'image observée g sauf une, et l'image « restaurée » est reflouée afin de prédire l'observation qui avait été mise de côté pour la restauration.

La formule $V(\Xi)$ du critère du GCV, à minimiser afin d'identifier les paramètres Ξ recherchés, est donnée par

$$V(\Xi) = \frac{\frac{1}{N} \| (I - B(\Xi)) \mathbf{g} \|^2}{\left[\frac{1}{N} \text{tr} (I - B(\Xi)) \right]^2} , \quad (2.6)$$

1. C'est-à-dire le demi-plan défini pour tout $(m,n) \in \mathbb{Z}^2$ par $S(m,n) = \{(k,l) \in \mathbb{Z}^2 : k < m\} \cup \{(m,l) \in \mathbb{Z}^2 : l > n\}$.

où N est le nombre de pixels de l'image discrétisée, et

$$B(\Xi) = H(H^T H + \alpha(I - A)^T(I - A))^{-1}H^T. \quad (2.7)$$

Les paramètres minimisant le critère $V(\Xi)$ sont considérés comme les estimations des paramètres du modèle. Cependant, cette minimisation peut être délicate, car des minima locaux peuvent apparaître, de même que l'approche demande de grandes ressources en calculs.

Dans [141], il est proposé un schéma numérique efficace, différent de celui développé dans [162], pour la minimisation du critère du GCV, fournissant ainsi une première réponse au problème des capacités de calcul requises. L'approche des auteurs se base sur l'utilisation de règles de quadrature avec algorithme de Lanczos, afin d'approximer les numérateurs et dénominateurs de (2.6). Des applications intéressantes à la restauration et à la super-résolution sont présentées, avec des résultats encourageants.

Autres méthodes. Notons que la modélisation ARMA a encore été utilisée assez récemment par Chan et Yap dans [49], afin d'en tirer deux estimateurs, utilisant des propriétés de l'autocorrélation du noyau, afin d'estimer non le flou lui-même, mais la taille de son support. Cette approche est en fait une extension partielle de [209] (décrite plus bas), visant à pouvoir s'attaquer à toutes sortes de supports 2D généraux. Les estimateurs proposés se basent sur la conception d'un filtre adaptatif, obtenu d'après un modèle AR. Cette approche peut par exemple être utilisée en conjonction avec une méthode de déconvolution à identification jointe, de manière à ce que l'on n'ait alors plus qu'à estimer la valeur des coefficients sur le support de flou identifié, fournissant ainsi une contrainte très pertinente.

Pour davantage de détails sur ces questions d'estimation des flous dans le cadre de la modélisation ARMA, on pourra consulter [183]. Le défaut fondamental de ces approches utilisant la modélisation ARMA est qu'elles ne peuvent être fondamentalement adaptées qu'à des images relativement lisses, ce qui n'est que rarement le cas pour des scènes naturelles. Les modèles AR sont en effet incapables de reproduire des phénomènes de discontinuité, dont la prise en compte efficace est devenue incontournable dans les techniques contemporaines de traitement d'images.

2.1.2 Méthodes basées sur les caractéristiques spectrales de l'image

Ces méthodes comptent parmi les premières introduites en déconvolution aveugle d'images. Elles considèrent l'image observée comme une réalisation particulière d'un processus stochastique, et sont bien adaptées quand la réponse en fréquence du système optique présente une forme paramétrique connue qui est complètement caractérisée par ses zéros dans le domaine fréquentiel. Ceci est par exemple le cas pour les flous de mouvement linéaires, de même que pour les noyaux circulaires de défocalisation. En revanche, ce n'est plus le cas par exemple pour des mouvements accélérés et des vibrations basses-fréquences.

Si l'on réécrit le modèle convolutif de floutage $g = h * f$ dans le domaine fréquentiel,

$$\hat{g} = \hat{h} \cdot \hat{f}, \quad (2.8)$$

alors, il apparaît qu'en raison de la multiplication des spectres, les zéros de \hat{g} sont la combinaison de ceux de \hat{h} et \hat{f} . Le problème revient donc à identifier les zéros de \hat{g} qui appartiennent à \hat{h} . L'utilisation de modèles paramétriques rend ceci possible : en effet,

la transformée de Fourier de flous linéaires et circulaires est une fonction de type sinus cardinal ou de Bessel, qui présente des caractéristiques de périodicité dans la distribution de ses zéros spectraux. Pour une défocalisation par exemple, l'espacement de ces zéros dépend de son rayon. Si ce genre de caractéristique peut être détecté, alors les paramètres du noyau peuvent également être estimés.

En pratique, ce type d'approche se révèle cependant souvent inopérant en raison de la présence dans l'image de bruit, dont le spectre est approximativement plat, masquant ainsi les caractéristiques périodiques. La méthode homomorphique [181], ou l'approche cepstrale [31] tentent d'exploiter l'effet non stationnaire de l'image et l'effet stationnaire du flou pour contrecarrer cette difficulté. L'approche homomorphique consiste à partitionner l'image en blocs f_i , de taille plus large que celle de la fonction de dispersion (ce qui suppose de disposer a priori d'une bonne estimation de son support). Chaque bloc g_i peut alors s'écrire $g_i = f_i * h_i + b_i$. Un opérateur logarithmique peut alors être appliqué à la transformée de Fourier de l'image floue, ce qui a pour effet de convertir la convolution originelle en une addition. La moyenne sur les blocs (en supposant N) est alors :

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \log \hat{g}_i \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\log \hat{f}_i + \log \hat{h}_i) . \quad (2.9)$$

Cette sommation consiste ici en la moyenne des contributions provenant des blocs \hat{h}_i , qui sont supposés être égaux, et des blocs \hat{f}_i , qui eux ne le sont pas, puisque ceux-ci ont des contenus spectraux variants. D'après ceci, la composante de flou devrait tendre à dominer dans cette expression.

Comme alternative, le cepstre de puissance peut être utilisé. Celui consiste à prendre la transformée de Fourier du logarithme du spectre de l'image, ou du spectre de puissance². En combinaison avec la méthode de séparation des blocs décrite ci-dessus, le résultat est qu'un pic important apparaît dans le domaine cepstral où il y a une distribution périodique des zéros dans le domaine de Fourier original. La distance entre ce pic et l'origine représente l'espacement entre les zéros et peut donc être utilisée pour identifier les paramètres du flou. L'importante contribution du terme de flou, répété dans chaque bloc, domine. Le bruit (haute fréquence) et le contenu spectral moyen de l'image tendent alors à être séparés du pic dans le domaine cepstral.

Ce type de méthode a également été étendu à l'utilisation du bispectre de puissance³ au lieu du spectre (classique) ou du cepstre [42], permettant des performances accrues dans des conditions de rapport signal/bruit faible. Cependant, la limitation à des noyaux paramétriques s'applique dans tous les cas dans ce genre d'approches.

Une méthode plus originale, basée sur l'utilisation des propriétés spectrales d'une classe large (mais cependant limitée) de flous pouvant s'exprimer comme des convolutions de densités de probabilités 2D symétriques stables au sens de Lévy, a été proposée par Carasso dans [32, 33]. L'approche développée détecte la fonction de dispersion affectant une image, à partir de son analyse de Fourier unidimensionnelle. Elle peut être appliquée aux noyaux dont la transformée de Fourier, notée $\hat{h}(u,v)$, est de la forme

$$\hat{h}(u,v) = \exp^{-\alpha(u^2+v^2)^\beta} \quad (2.10)$$

2. Le spectre de puissance d'un signal est le module au carré de la transformée de Fourier de ce signal.
3. Le bispectre est la transformée de Fourier de la triple corrélation.

avec $\alpha > 0$ et $0 < \beta < 1$.

Si l'image floue $g = h * f$ est obtenue par convolution, alors on a dans le domaine de Fourier

$$\hat{g}(u,v) = \hat{f}(u,v) \cdot \hat{h}(u,v) \quad (2.11)$$

$$= \hat{f}(u,v) \cdot \exp^{-\alpha(u^2+v^2)^\beta}. \quad (2.12)$$

L'idée derrière la méthode d'identification du flou est alors d'ajuster la fonction $\alpha|u|^{2\beta}$ au logarithme de la transformée de Fourier de l'image observée moins une estimée de l'image réelle (nette). Cet ajustement n'est possible qu'avec une classe d'images particulières (dites à « bon comportement » ; cf. [32] pour une définition précise), incluant cependant une grande variété d'images numérisées. De même, une importante limitation de la méthode est l'impossibilité de traiter des flous de défocalisation ou de mouvement, étant donné leur non-appartenance à la classe des noyaux supposés.

2.1.3 Méthodes basées sur l'autocorrélation

Pour les flous de mouvement. Yitzhaky et Kopeika ont proposé dans [209] une approche pour l'identification des flous de mouvement rectilignes, à partir de la seule connaissance d'une unique image dégradée. La technique est limitée à l'identification des paramètres d'orientation et de longueur et ne peut s'appliquer à d'autres types de noyaux. L'idée générale est d'identifier certains paramètres importants par lesquels on peut ensuite caractériser la fonction de dispersion. On se base pour cela sur le fait que les caractéristiques de l'image le long de la direction du mouvement (soit l'angle du noyau flou) sont différentes de celles dans les autres directions.

L'identification de la direction du flou se fait en mesurant l'orientation dans laquelle le spectre de puissance de la dérivée de l'image est le plus faible, et la longueur du support est identifiée en utilisant des propriétés de la fonction d'autocorrélation de la dérivée de l'image dans la direction précédemment trouvée.

Concrètement, la dérivée horizontale (d'angle 0°) au point $f(i,j)$ se calcule très simplement par $\Delta f(i,j)_{[0^\circ]} = f(i+1,j) - f(i,j)$, tandis que celle orientée de k° sera donnée par $\Delta f(i,j)_{[k^\circ]} = f(i',j') - f(i,j)$, où $f(i',j')$ est un pixel virtuel dans la direction k à partir du pixel $f(i,j)$, dont l'intensité est fixée à partir de celle de $f(i+1,j)$ et $f(i+1,j+1)$. L'intensité totale $I(\Delta f)$ de la dérivée de l'image dans la direction k est alors la somme des valeurs absolues des pixels dans $\Delta f(i,j)$, c'est-à-dire

$$I(\Delta f)_{[k^\circ]} = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{m-1} |\Delta f(i,j)_{k^\circ}|. \quad (2.13)$$

L'angle k minimisant cette fonction est alors identifié comme l'angle du noyau de mouvement. Une fois ce paramètre disponible, on calcule l'autocorrélation $R_l(x)$ dans la direction du mouvement des dérivées par ligne l de l'image floue :

$$R_l(t) = \sum_{s=-M}^{+M} l(s+t)l(s) \quad \text{avec} \quad t \in [-M, +M] \quad (2.14)$$

où $l(s) = 0$ pour $s \notin [0, +M]$.

La moyenne des autocorrélations des lignes des dérivées de l'image $\bar{R}_{\Delta f}$ est alors utilisée pour calculer l'étendue du flou, qui est la distance entre la localisation du minimum de $\bar{R}_{\Delta f}$ et de son point de décalage en zéro $\bar{R}_{\Delta f}(0)$.

Cette approche s'est montrée être efficace pour différents types de mouvements, autant uniforme qu'accélérés, que ce soit sur des images synthétiques ou réelles. Dans [211], la même approche a été présentée, sous un angle légèrement différent, par lequel la direction du mouvement est obtenue par un filtrage passe-haut de l'image floue dans toutes les directions. Ceci est en fait équivalent au calcul du plus faible spectre de puissance dans une direction. Beaucoup d'applications à mouvement linéaire accéléré ont été traitées dans ce cas. En outre, la même technique a été appliquée pour des modèles vibratoires sinusoïdaux (autant à basse qu'à haute fréquence) dans [208].

Notons finalement que pour l'étape de restauration, les auteurs se sont limités à l'utilisation d'un filtre de Wiener, sans présumer de sa capacité à gérer ou non d'éventuelles erreurs d'estimation du flou. Dans [210], ils ont proposé une comparaison de leur méthode - dénommée « blanchiment » (angl. *whitening*) - avec la méthode homomorphique de Stockman [181], de même qu'avec la méthode cepstrale de Cannon [31] (qui suppose elle un noyau de mouvement uniforme). Par rapport à cette dernière, l'approche de Yitzhaky et Kopeika s'est révélée très légèrement inférieure pour des images présentant un faible SNR ; de l'autre côté, la méthode cepstrale de Cannon s'est révélée incapable d'estimer des flous à grande longueur de support. Tout ceci pour des mouvements uniformes bien entendu. Dans tous les autres cas de mouvement traités (non-uniformes), la comparaison de l'approche de blanchiment avec l'approche homomorphique a montré des résultats d'identification supérieurs.

Pour les autres flous. Chen et Yap ont proposé dans [47] une méthode généralisant l'approche de blanchiment à des flous généraux en deux dimensions. Celle méthode ne traite pas de l'estimation des coefficients, mais seulement de l'estimation de la taille du support du flou. Il est proposé pour cela un critère consistant à mesurer les corrélations d'une image (dégradée) filtrée avec différentes distances de décalage.

La propriété de séparabilité des noyaux, vérifiée selon les auteurs pour la plupart des flous d'images réelles, est utilisée. On peut donc écrire que $h(x,y) = h_1(x)h_2(y)$ et ainsi décomposer la convolution 2D en deux convolutions 1D. La taille du support est alors estimée séparément dans les directions verticale et horizontale.

Le critère mis en œuvre requiert tout d'abord de sélectionner un filtre approprié, obtenu à partir de l'image dégradée, suivant un modèle AR. Après application à l'image, la méthode calcule la corrélation de l'image filtrée avec les différentes distances de décalage. Cette corrélation atteint son minimum lorsque la distance de décalage est égale à la taille du support du flou. La technique peut donc traiter la plupart des flous typiques tels que noyaux uniformes, de mouvement, et gaussiens. Cependant, l'utilisation des modèles AR n'est pas toujours appropriée (mauvaise gestion des discontinuités), et une difficulté essentielle se pose quant à la possibilité d'obtention du filtre adéquat permettant de mesurer les corrélations.

2.1.4 Méthodes basées sur l'utilisation de la transformée de Radon

La transformée de Radon est une approche qui a été utilisée dans les techniques les plus récentes en matière d'identification des flous de mouvement. Pour une fonction $f(x,y)$, la

transformée de Radon est définie par

$$\mathcal{R}(f, \rho, \theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \delta(\rho - x \cos \theta - y \sin \theta) dx dy . \quad (2.15)$$

Citons par exemple le travail de Lun *et al.* [121], qui considèrent des flous symétriques généraux bidimensionnels (gaussien, défocalisation, etc.). Leur approche se base fondamentalement sur la modélisation ARMA et l'utilisation du critère GCV présenté ci-dessus. Mais l'utilisation d'une transformée discrète périodique de Radon leur permet de transformer le problème 2D (traité par GCV) en plusieurs problèmes 1D (traités par GCV aussi). Ceci permet alors de réduire sérieusement la complexité calculatoire nécessaire à la mise en œuvre du critère du GCV. La technique proposée peut donc être vue comme une version rapide du GCV 2D, et elle en partage donc globalement les mêmes limitations et avantages.

Une autre approche utilisant la transformée de Radon, mais seulement pour des flous de mouvement uniformes rectilignes, a été proposée par Moghaddam et Jamzad dans [132]. Leur méthode consiste en fait en l'identification de l'angle seul du mouvement par cette transformée, alors que la longueur du support est déduite grâce à l'information contenue dans le bispectre [42] de l'image dégradée. L'estimation de l'angle est donnée par la valeur θ permettant de maximiser la transformée de Radon. Notons que cette approche a été développée dans le cadre particulier des images fortement bruitées ; sa robustesse dans ces cas étant sa principale contribution. Cependant, elle ne peut fonctionner que pour des noyaux à support relativement long, de telle sorte que l'image devient suffisamment lisse dans leur direction, menant alors à un maximum de la transformée. Enfin, rajoutons que, de nouveau, les auteurs se sont limités à l'utilisation d'un filtre de Wiener pour l'étape de restauration consécutive à l'identification des paramètres du flou.

Une des techniques les plus récentes utilisant la transformée de Radon a été présentée par Oliveira *et al.* dans [147], également dans le seul cas des noyaux de mouvement uniformes rectilignes. L'approche est fondamentalement très proche de celle de Moghaddam, mais présente quelques améliorations, permettant de circonvenir à quelques défauts, tels que la nécessité d'être en présence de noyaux de longueur conséquente pour pouvoir obtenir un maximum dans la transformée et donc d'estimer l'angle du mouvement. Ici, même des flous de faible longueur sont identifiables. Pour cela, les auteurs utilisent une transformée de Radon exacte, prise sur des intervalles similaires. Au lieu de calculer la transformée pour toute l'image, on intègre sur le carré le plus grand qui puisse être inscrit dans l'image, ceci résultant en la formulation

$$\mathcal{R}_d(f, \rho, \theta) = \int_{-d}^{+d} f(\rho \cos \theta - s \sin \theta, \rho \sin \theta + s \cos \theta) ds , \quad (2.16)$$

où $d = \frac{\sqrt{2}}{2}n$, avec n la taille de l'image (supposée carrée).

L'estimation de l'angle du flou est alors donnée par

$$\tilde{\theta} = \arg \max_{\theta} V \{ \mathcal{R}_d (\log |\hat{g}|, \rho, \theta) \} , \quad (2.17)$$

où V est l'opérateur de variance ; ceci étant déduit des propriétés de $\log |\hat{g}|$.

Pour l'estimation de la longueur du support, les auteurs utilisent les caractéristiques de $\mathcal{R}_d (\log |\hat{g}|, \rho, \tilde{\theta})$, ce qui est aussi l'approche suivie dans [132]. L'algorithme proposé est cependant dit être plus simple, et ceci à précision équivalente. En introduisant la fonction

$N(\omega) = \mathcal{R}_d \left(\log |\hat{g}|, \omega, \hat{\theta} \right)$, ils montrent que les minima de cette fonction sont aussi ceux de la transformée de Fourier d'une pulsation rectangulaire⁴ de longueur L . En supposant alors que $N(\omega)$ est en effet la transformée de Fourier d'une pulsation de longueur L' , soit

$$N(\omega) = \exp^{i\psi(\omega)} \frac{\sin \frac{\omega L'}{2}}{\sin \frac{\omega}{2}}, \quad (2.18)$$

le but est alors de trouver L' en déterminant le premier zéro positif de $N(\omega)$.

2.1.5 Autres méthodes

Il existe plusieurs autres méthodes permettant l'identification a priori d'un flou dans des images dégradées, méthodes basées sur des concepts ou approches très divers. Loin de vouloir en fournir une liste exhaustive, nous en donnons quelques exemples ci-dessous.

Méthode utilisant une fonction de filtrage extraite. Dans [34, 35], il est proposé un méthode utilisant la transformée de Fourier de l'image dégradée, mais dont le principe est assez différent des méthodes spectrales/cepstrales présentées si dessus. La fonction de dispersion est considérée avoir *a priori* une certaine forme et est extraite de l'image, ceci en passant par le domaine de Fourier. Dans le domaine fréquentiel, les auteurs postulent que pour un système linéaire et invariant spatialement, la fonction de transfert peut être déterminée à partir de la puissance α -ième du spectre de puissance lissé de l'image dégradée. Ils posent donc que

$$\hat{h}(u,v) = K_{\hat{h}} \mathcal{S} \left\{ |P_{\hat{g}(u,v)} - P_{\hat{b}(u,v)}|^{\frac{\alpha}{2}} \right\} \quad (2.19)$$

où $K_{\hat{h}}$ est une constante assurant que $|\hat{h}(u,v)| \leq 1$, \mathcal{S} une fonction « lissante » (non précisée par les auteurs), α un paramètre à estimer, et P l'opérateur de densité spectrale de puissance, définie pour \hat{f} par $P_{\hat{f}} = \frac{|\hat{f}(u,v)|^2}{n^2}$, où n est la taille de l'image. Il est cependant montré que pour que cette condition soit valable, il faut que \hat{f} et \hat{h} soient reliés par la relation

$$\hat{h}^{1-\alpha}(u,v) = K_{\hat{h}} \mathcal{S} P_{\hat{f}}^{\alpha/2}(u,v). \quad (2.20)$$

Assez obscures sont au final les raisons de la similarité entre la fonction de dispersion réelle et la fonction extraite, et il est fort probable que cette approche soit uniquement applicable dans un nombre de cas très limités.

Méthode utilisant les statistiques de l'image. Levin [115] utilise les statistiques de l'image (distribution des dérivées de l'image floue) pour estimer la longueur du support d'un flou de mouvement. L'auteur met en œuvre l'approche de Kopeika [211] pour déterminer l'angle du noyau. Cette approche, qui n'est valable que pour un mouvement uniforme, se base sur les travaux de Fergus *et al.* [60] concernant la restauration par apprentissage et l'intelligence artificielle, travaux que nous évoquerons plus loin.

Méthode basée sur la carte topographique de l'image. Ladjal [111] a proposé une méthode à la base destinée à quantifier localement le flou d'une image, en analysant ses zones de transition. Son approche permet seulement dans certains cas de revenir à l'expression du noyau de convolution, si celui-ci vérifie une hypothèse de symétrie radiale, ce qui n'est pas le cas de la plupart des noyaux de mouvement. L'auteur utilise dans ce cas une inversion de la transformée de Radon inverse, à partir de la largeur calculée du flou.

4. Pulsion rectangulaire à rapprocher de la modélisation du flou de mouvement rectiligne uniforme.

Méthodes basées sur l'analyse des transparences. Jia a proposé [95] une méthode également limitée aux flous de mouvements, utilisant l'information contenue dans les translucidités des zones floues entre deux régions opaques. Son approche est supervisée, dans le sens où l'utilisateur doit sélectionner lui-même les zones de transparence pertinentes. L'estimation du noyau de flou est formulée comme la résolution d'un problème de maximum a posteriori avec une vraisemblance et a priori sur la transparence. La restauration est ensuite effectuée avec un algorithme de Richardson-Lucy [173] ou simplement avec un filtre inverse.

Méthodes basées sur les filtres de choc. Une approche permettant d'obtenir rapidement une estimée du flou d'une image par utilisation de filtres de choc a été proposée par Money et Kang dans [135].

Le filtrage de choc est une technique qui a été introduite par Osher et Rudin dans [151]. Celle-ci consiste de manière très générale à rehausser les contours d'une image. Pour cela, l'idée initiale était de s'inspirer de la physique des chocs et des fronts d'onde. Par résolution d'une équation aux dérivées partielles d'évolution en temps, l'image traitée voit ses bords (adoucis par le flou) accentués.

Cette image rehaussée peut alors être utilisée comme une approximation de l'image restaurée, que l'on peut noter g_r . On peut alors calculer à partir de cette image de référence et de l'image observée un noyau de convolution de référence h_r , en utilisant un schéma classique de déconvolution. Les auteurs ayant travaillé avec des flous de défocalisation et de mouvement (donc des noyaux discontinus) proposent de minimiser le critère pénalisé suivant

$$\min_h \frac{1}{2} \|h * g_r - g\|_{L^2}^2 + \int_{\Omega} |\nabla h|. \quad (2.21)$$

Le noyau obtenu estimé est ensuite « raffiné », en raison de la présence de bruit dans son estimation. Pour cela, il est proposé une procédure en plusieurs étapes : passer le noyau estimé au filtre de choc, le normaliser, effectuer un premier débruitage par seuillage, avec une petite constante. Ensuite, une technique de débruitage adaptative, basée sur les travaux de [182], est mise en œuvre en calculant l'échelle de l'objet (ie. du noyau), c'est-à-dire le rapport de son périmètre par sa surface, afin de pouvoir retrouver une forme correspondant bien à un mouvement rectiligne ou à un disque de défocalisation.

Bien que l'idée de l'utilisation d'un filtre de choc afin de rehausser les contours de l'image semble novatrice, la procédure de raffinement du noyau comporte tout de même une démarche très heuristique semblant bien peu à même de fonctionner dans des cas réels. Néanmoins, on utilisera l'approche intéressante du filtrage de choc pour des noyaux paramétriques dans le Chapitre 6.

Méthodes basées sur le kurtosis. Le kurtosis k d'une variable aléatoire X est défini comme son moment centré du quatrième ordre :

$$k(X) = \frac{\mathbb{E}\{X - \mu\}^4}{\sigma^4}, \quad (2.22)$$

où μ est la moyenne de X et σ son écart-type. \mathbb{E} est la fonction d'espérance mathématique.

Cette caractéristique a été utilisée par Li *et al.* dans [116] ainsi que dans [216]. Li *et al.* employent cette statistique afin de mesurer le caractère pointu (la *pointicité*) de la

distribution des niveaux de gris d'une image. Ils utilisent le fait que, pour une distribution dite platykurtique, c'est-à-dire une distribution avec une queue courte, pour lesquelles $k < 3$, plus grand est le kurtosis, plus lisse est cette distribution. Soit g une image bruitée donnée, à partir de la connaissance de la forme paramétrique du flou pour la fonction de dispersion, et en se plaçant dans un espace raisonnable, on cherche la meilleure estimation du paramètre, en mesurant à chaque fois le kurtosis de l'image restaurée. À chaque étape de la boucle, les auteurs restaurent l'image avec un filtre de Wiener (car c'est une technique très rapide), et le kurtosis est mémorisé. L'image présentant la plus petite valeur k est alors choisie comme l'image restaurée, et le paramètre correspondant comme caractérisant le flou associé.

Bien entendu, cette approche n'est pas totalement une approche d'identification de flou, puisqu'elle doit être couplée à une étape de restauration. Néanmoins, cette étape de restauration ne peut pas être ici trop évoluée (et donc gourmande en ressources de calculs), dans la mesure où toutes les valeurs possibles des paramètres du noyau doivent être testées. Il est alors préférable d'utiliser, une fois que le noyau a été identifié, une procédure de restauration plus avancée, au choix de l'utilisateur.

Méthode basée sur la maximisation de la variance. Li *et al.* ont également utilisé l'analyse en composante principales pour obtenir un filtre de déflouage maximisant la variance de l'image restaurée [117]. Il a montré que, pour cela, l'estimation de l'image idéale peut être obtenue par

$$\tilde{f} = G\mu_1 + \Psi, \quad (2.23)$$

où G est une matrice à M colonnes comportant une certaine représentation des éléments \bar{g}_i de l'image sans bruit \bar{g} , μ_1 est le vecteur propre correspondant à la plus grande valeur propre de la matrice de covariance $G^T G$, et $\Psi = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \bar{g}_i$. Le vecteur μ_1 est d'ailleurs en fait le filtre de déflouage.

Seuls des tests sur des images affectées par de très légers flous, sans perte forte de contenu dans l'image, ont été effectués par les auteurs, et il est à craindre que des images réelles soient difficilement appréciables avec cette approche, dont la robustesse paraît limitée. D'autre part, cette méthode semble nécessiter la connaissance (du moins approximative) de la taille du support du flou, ce qui est assez gênant dans le cadre d'applications pratiques.

Méthodes basées sur les techniques d'apprentissage. Une approche prometteuse, pour le moment limitée à l'estimation de flous provenant de bougés (humains) d'appareils photographiques, a été proposée par Fergus *et al.* [60]. Celle-ci exploite les statistiques des images naturelles (comme la technique de [115]), et en particulier de la distribution des gradients. L'approche est également supervisée, nécessitant le choix d'une zone rectangulaire pertinente de l'image, et certaines hypothèses a priori sur le noyau à estimer (orientation et taille maximum du support). Un algorithme bayésien, permettant une prise en compte des incertitudes sur les données, est alors mis en œuvre, permettant d'identifier le flou à partir d'une distribution d'images probables. L'algorithme d'apprentissage employé pour résoudre le problème de séparation de ces images est originellement proposé dans [131] (et est relié à l'analyse en composantes indépendantes). Les comparaisons effectuées par les auteurs par rapport à l'algorithme `deconvblind` de MATLAB® ont montré la supériorité de leur approche.

Bronstein *et al.* [28] ont également proposé une méthode permettant l'estimation d'un filtre de déflouage, sur la base d'une technique d'apprentissage. Pour cela, une approche

basée sur des estimateurs de quasi maximum de vraisemblance du filtre recherché est utilisée, en considérant une modélisation de la distribution des niveaux de gris d'une image de signaux creux, par une famille de fonctions convexes lisses

$$\varphi_\lambda(s) = |s| - \lambda \log \left(1 + \frac{|s|}{\lambda} \right). \quad (2.24)$$

La méthode est intéressante, mais les auteurs n'ayant pas effectué de tests sur des images traditionnellement utilisées dans la littérature, ni de comparaisons avec d'autres approches, il est bien difficile de se prononcer quant à ses capacités de manière générale.

2.2 Restauration de l'image avec flou connu

La deuxième étape dans le déroulement d'une méthode de déconvolution aveugle avec identification a priori du flou, est l'inversion de celui-ci, c'est-à-dire l'étape de restauration proprement dite. Fondamentalement, n'importe quelle approche peut être utilisée, et la quasi-totalité des auteurs des méthodes présentées ci-dessus pour l'estimation de h ne cherche pas à utiliser une méthode spécialement adaptée, par exemple à l'incertitude qui peut demeurer sur le noyau identifié ou sur sa forme.

Par la suite, nous allons donner un aperçu des types de méthodes existantes, que nous classerons dans les catégories suivantes, les quatre premières considérant davantage les images à niveaux de gris, et la dernière les images couleurs :

1. Méthodes variationnelles.
2. Méthodes utilisant l'analyse multirésolution et les ondelettes.
3. Méthodes basées sur les équations aux dérivées partielles.
4. Autres méthodes.
5. Méthodes spécifiques aux images couleur.

Notons encore une fois qu'il existe un quasi-infini d'approches, et qu'il n'est pas de notre propos d'en donner une liste exhaustive. Nous nous limiterons donc à fournir un aperçu général, avec une description plus en profondeur de certaines méthodes récentes ou présentant un intérêt particulier.

2.2.1 Méthodes variationnelles

Parmi les méthodes de restauration d'images floues, la classe des méthodes dites variationnelles (c'est-à-dire basées sur l'analyse des variations d'une fonctionnelle donnée), joue un rôle de premier plan. Un modèle générique variationnel, avec régularisation déterministe (a contrario d'une régularisation stochastique), peut s'écrire

$$\min_f \mathcal{J}(f) = \min_f \int_{\Omega} \Phi(h * f - g) + \alpha \mathcal{R}(f), \quad (2.25)$$

où Φ une norme caractérisant la fidélité aux données du problème, \mathcal{R} est un opérateur de régularisation, et α le paramètre de contrôle de la régularisation.

Méthodes itératives basiques. Dans le cas où Φ est la norme L^2 et $\mathcal{R} = 0$, on a le schéma classique des moindres carrés, dont la solution peut être vue comme un simple filtre inverse. Ce filtre inverse peut être calculé explicitement par une approche comme l'itération de van Cittert [191], une des méthodes de déconvolution les plus anciennes, et qui s'exprime par

$$f_{i+1} = g + (I - h) * f_i , \quad (2.26)$$

où I est l'opérateur identité et $f_0 = g$. On montre que cette itération ne converge cependant pas pour des flous discontinus, ce qui l'exclut donc pour traiter des images affectées par des noyaux de défocalisation ou de mouvement.

Une autre approche assez similaire, grand classique de la déconvolution, est la méthode de Landweber [112] :

$$f_{i+1} = f_i + \gamma h^\otimes * (h * f_i - g) . \quad (2.27)$$

Il est important de noter que, bien que dans ces deux approches on ait $\mathcal{R} = 0$, on a quand même une certaine régularisation présente, et ce de par l'arrêt des itérations de l'algorithme, comme nous l'expliquons au Chapitre 1 Section 2.2.1.

Méthode de Tihonov. Les premiers travaux concernant la régularisation des problèmes inverses, menés dans un cadre totalement mathématique (équation de Fredholm du premier ordre) et hors de toute considération de traitement d'images, ont été effectués par Tihonov [65, 66] dans les années soixante.

Ses premières études ont consisté à considérer pour la régularisation la norme L^2 de la fonction f recherchée, soit la fonctionnelle

$$\mathcal{J}(f) = \|h * f - g\|^2 + \alpha \int_\Omega |f|^2 . \quad (2.28)$$

L'interprétation de ce modèle est de fournir un compromis entre la proximité avec la solution des moindres carrés, et une solution de norme minimale. Ce compromis est contrôlé par l'intermédiaire du paramètre α , dont le réglage adéquat est en soi un problème délicat. Dans un deuxième temps, Tihonov a proposé de minimiser la norme de la dérivée de la fonction, soit la semi-norme H^1 de f [68], résultant en le modèle

$$\mathcal{J}(f) = \|h * f - g\|^2 + \alpha \int_\Omega |\nabla f|^2 . \quad (2.29)$$

Celui-ci est plus à même de pénaliser les irrégularités locales de l'image, bien qu'étonnamment, dans ses premiers travaux en traitement d'images [70], souvent inconnus de la communauté scientifique occidentale, Tihonov *et al.* continuent à considérer la minimisation de (2.28) plutôt que celle de (2.29).

La minimisation de tels critères quadratiques (2.28) et (2.29) présente le gros avantage de pouvoir être mise en œuvre par des techniques rapides. On citera par exemple la transformée de Fourier rapide [195], ou les approches multigrilles [57].

Bien que cela ne soit pas du tout la façon usuelle de le présenter, le filtre de Wiener peut également être relié à une méthode variationnelle et, plus particulièrement, à la minimisation de (2.29). En effet, il revient aussi à considérer la minimisation de cette fonctionnelle, mais dans le domaine fréquentiel, soit de

$$\mathcal{J}(f) = \|\hat{h}\hat{f} - \hat{g}\|^2 + \alpha \int_{\Omega} |\hat{\nabla}\hat{f}|^2 , \quad (2.30)$$

où α dépend alors de la variance σ^2 du bruit présent dans l'image.

L'utilisation de ces critères quadratiques présente cependant le lourd défaut de trop pénaliser les discontinuités des images lors de l'inversion. Or celles-ci revêtent une importance fondamentale dans le quasi-totalité des applications, puisqu'une image est quasi toujours composée de zones homogènes séparées par de franches discontinuités. Un effet de lissage est donc observé à chaque utilisation de tels schémas, résultant en un léger flou persistant, très gênant visuellement. Pour contrecarrer cette difficulté, des termes de pénalisation autres que les normes L^2 et H^1 ont été considérés par nombre d'auteurs.

Méthodes avec prise en compte des discontinuités. De nombreux travaux ont été menés ces dernières années, portant sur la définition de termes de régularisation non-quadratiques d'une part, et sur les méthodes de minimisation nécessaire au traitement efficace des fonctionnelles résultantes de l'utilisation de ce type d'approches.

Norme L^1 et variation totale. Une des premières approches naturelles permettant de moins pénaliser les fortes discontinuités est de ne plus considérer un terme de pénalisation en $\|\nabla f\|^2$ mais plutôt la norme L^1 *vert* $|\nabla f|$ du gradient, ce qui résulte en une fonctionnelle à minimiser du type

$$\mathcal{J}(f) = \|h * f - g\|^2 + \alpha \int_{\Omega} |\nabla f| . \quad (2.31)$$

Mathématiquement, la solution à ce problème appartient à un espace analogue à celui de Sobolev $W^{1,1}$, et est également trop douce pour modéliser des images formées de régions régulières séparées par des contours. C'est pourquoi, il est plus judicieux de se positionner dans l'espace des fonctions à variation bornée BV, qui, lui, permet des points de discontinuités sur des courbes. On arrive donc à des fonctionnelles utilisant comme régularisateur la variation totale $\text{TV}(f) = \int_{\Omega} |\mathcal{D}f|$, où \mathcal{D} est le gradient au sens des distributions :

$$\mathcal{J}(f) = \|h * f - g\|^2 + \alpha \int_{\Omega} |\mathcal{D}f| . \quad (2.32)$$

En pratique néanmoins, une telle formulation au sens des distributions est difficilement utilisable, et on se rabattra sur l'approximation

$$\text{TV}(f) = \int_{\Omega} |\mathcal{D}f| \approx \int_{\Omega} |\nabla f| , \quad (2.33)$$

qui, en théorie, n'est valable que pour f différentiable, et donc continue. Ceci ramenant au final à (2.31).

Notons qu'en variables discrétisées, la différence entre la norme L^1 du gradient et sa variation totale donne souvent lieu à des confusions, et il y a ambiguïté dans la littérature à ce sujet. Très souvent, le régularisateur $l^1(\mathbf{f}) = \sum_i |\Delta_i^{hor}\mathbf{f}| + |\Delta_i^{ver}\mathbf{f}|$ est utilisé comme approximation de la variation totale⁵, ou même considéré lui-même à tort comme le régularisateur TV, dont le modèle isotrope discret s'écrit plutôt $\text{TV}(\mathbf{f}) = \sum_i \sqrt{(\Delta_i^{hor}\mathbf{f})^2 + (\Delta_i^{ver}\mathbf{f})^2}$ [20, 21, 146], ceci en raison de la consistance, au sens

5. Les Δ_i^{hor} et Δ_i^{ver} sont les opérateurs aux différences finies du premier ordre, respectivement horizontal et vertical, d'indice i .

de l'analyse numérique, associée à ce dernier schéma de discréétisation. On reviendra plus longuement à cette question de discréétisation au chapitre suivant.

Autour de la variation totale, plusieurs méthodes ont proposé l'introduction de paramètres ou informations supplémentaires. On citera par exemple la méthode de Combettes et Pesquet de contrainte sur la variation totale [53]. Les auteurs y proposent de ne plus utiliser exclusivement la variation totale comme un objectif à minimiser sous certaines contraintes, mais introduisent une formulation alternative dans laquelle la variation totale est utilisée elle-même comme une contrainte parmi d'autres dans un contexte d'optimisation convexe. Ceci leur permet de faire face au problème d'effet d'escalier souvent rencontré dans les formulations classiques du type (2.31), et de ne pas avoir besoin de connaître l'environnement du bruit. Des expérimentations ont été effectuées sur des images satellitaires avec des résultats convaincants.

Minimisation de la variation totale. Pour ce qui est de la minimisation de (2.32), un grand nombre d'approches a été proposé, que ce soit en débruitage [36, 167, 193, 196], ou en déconvolution [118, 197]. On pourra citer pour ce deuxième cas la récente méthode de Bioucas-Dias [21], qui propose une manière originale et efficace de traiter le problème de restauration avec régularisation TV. L'algorithme de minimisation, au lieu de traiter directement ce problème difficile, le remplace par une suite de problèmes plus simples, en utilisant des arguments de convexité.

Soit $\mathbf{f}^{(t)}$ le calcul de \mathbf{f} à l'instant t . Les auteurs cherchent un majorant quadratique de la fonctionnelle $\mathcal{L}(\mathbf{f}) = \|H\mathbf{f} - \mathbf{g}\|^2 + \alpha \text{TV}(\mathbf{f})$, et montrent pour cela que

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_{\text{TV}}(\mathbf{f}|\mathbf{f}^{(t)}) &= \text{TV}(\mathbf{f}^{(t)}) + \\ &\quad \frac{\alpha}{2} \sum_i \frac{[(\Delta_i^h \mathbf{f})^2 - (\Delta_i^v \mathbf{f})^2]}{\sqrt{(\Delta_i^h \mathbf{f}^{(t)})^2 + (\Delta_i^v \mathbf{f}^{(t)})^2}} + \frac{\alpha}{2} \sum_i \frac{[(\Delta_i^v \mathbf{f})^2 - (\Delta_i^h \mathbf{f})^2]}{\sqrt{(\Delta_i^h \mathbf{f}^{(t)})^2 + (\Delta_i^v \mathbf{f}^{(t)})^2}} \end{aligned} \quad (2.34)$$

en est un pour $\text{TV}(\mathbf{f})$. On a donc $\text{TV}(\mathbf{f}) \leq \mathcal{Q}_{\text{TV}}(\mathbf{f}|\mathbf{f}^{(t)})$ pour $\mathbf{f} \neq \mathbf{f}^{(t)}$ et $\text{TV}(\mathbf{f}) = \mathcal{Q}_{\text{TV}}(\mathbf{f}|\mathbf{f}^{(t)})$ pour $\mathbf{f} = \mathbf{f}^{(t)}$. En remarquant que le premier terme de $\mathcal{L}(\mathbf{f})$ est également quadratique, cette fonctionnelle a alors comme borne quadratique $\mathcal{Q}(\mathbf{f}, \mathbf{f}^{(t)}) = \|H\mathbf{f} - \mathbf{g}\|^2 + \mathcal{Q}_{\text{TV}}(\mathbf{f}, \mathbf{f}^{(t)})$. La minimisation de cette dernière expression menant par suite à

$$\mathbf{f}^{(t+1)} = \left(H^T H + D^T W^{(t)} D \right)^{-1} H^T \mathbf{g}, \quad (2.35)$$

où $W^{(t)} = \text{diag}(w^{(t)}, w^{(t)})$ avec

$$w^{(t)} = \left[\frac{\alpha/2}{\sqrt{(\Delta_i^h f^{(t)})^2 + (\Delta_i^v f^{(t)})^2}}, i = 1, 2, \dots \right], \quad (2.36)$$

et $D = [(D^h)^T (D^v)^T]^T$ avec D^h et D^v les matrices telles que $D^h f$ et $D^v f$ donnent les différences horizontales et verticales du premier ordre.

Cette méthode a surclassé toutes celles auxquelles elle a été comparée, méthodes récentes et basées sur les ondelettes pour la plupart : Bioucas-Dias *et al.* [19], Figueiredo et Nowak [62], Banham et Katsaggelos [8], Mignotte [130], Neelamani *et al.* [139]. Les résultats se sont avérés convaincants et il s'agit d'une des méthodes parmi les plus performantes. Notons qu'une adaptation intéressante a été proposée dans [20, 146], où le

paramètre de régularisation α est automatiquement réglé, avec cependant des performances légèrement amoindries.

Fonctions φ et conditions de préservation des discontinuités. De manière plus générale, les conditions permettant de définir des opérateurs de régularisation à préservation des discontinuités, dans le cadre du formalisme continu, ont été définies (entre autre) par Blanc-Féraud et Charbonnier dans [23, 44]. La fonctionnelle de restauration considérée dans ce cas s'écrit

$$\mathcal{J}(f) = \|h * f - g\|^2 + \alpha \int_{\Omega} \varphi(|\nabla f|), \quad (2.37)$$

avec φ fonction paire définie sur \mathbb{R} , et croissante sur \mathbb{R}^+ . Les conditions à respecter par φ sont alors les suivantes :

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi'(t)}{2t} = 1 & (\text{lissage dans les régions à faible gradient}) \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\varphi'(t)}{2t} = 0 & (\text{préservation des grands gradients aux discontinuités}) \\ \frac{\varphi'(t)}{2t} \text{ est strictement croissante.} \end{cases} \quad (2.38)$$

De nombreuses fonctions présentant de telles caractéristiques ont été proposées, parmi lesquelles la fonction de Green $\varphi(t) = 2 \log \cosh t$ [81], la fonction de Geman-MacClure $\varphi(t) = \frac{t^2}{1+t^2}$ [75] ou encore la fonction de Perona-Malik $\varphi(t) = 1 - \exp(-t^2)$ [156]. De nombreuses autres pourront être trouvées dans [23].

Régularisation convexe et non-convexe. Parmi les fonction φ évoquées ci-dessus, certaines pourront être convexes, soit $\varphi'' \geq 0$, et d'autres non. Si φ est convexe, alors la fonctionnelle (2.37) à minimiser l'est aussi, facilitant ainsi grandement la tâche d'optimisation. D'autre part, sous certaines conditions, des résultats d'existence et d'unicité du minimum existent (ex. [37]). Si φ est non-convexe, alors la minimisation est bien plus délicate, et l'existence d'un minimum n'est pas garantie. De manière globale, on pourra dire qu'une fonctionnelle non-convexe reconstruira des discontinuités de manière plus instable qu'une fonctionnelle convexe, mais ces discontinuités présenteront un caractère plus franc, plus net.

Notons dès maintenant que les deux chapitres suivants considéreront, dans un schéma de déconvolution aveugle, l'utilisation d'un terme de régularisation convexe $\varphi(t) = \sqrt{1+t^2}$ (comme approximation de la variation totale), puis d'un terme non-convexe $\varphi(t) = \min(t^2, 1)$, ceci afin de mettre en évidence dans un contexte appliqué les différences de reconstruction susceptibles de se produire.

Minimisation semi-quadratique. Parmi les algorithmes utilisés pour la minimisation de critères pénalisés avec prise en compte des discontinuités, les techniques dites semi-quadratiques tiennent une place importante. L'idée principale est d'introduire et d'optimiser une nouvelle fonction coût, ayant le même minimum que la fonctionnelle originale non-quadratique, mais que l'on peut manipuler avec des méthodes algébriques linéaires [44].

On peut montrer que les fonctions φ définies ci-dessus vérifient $\varphi(t) = \min_{b \in [0,1]} (bt^2 + \psi(t))$, où ψ est une fonction strictement convexe. À partir de là, il découle que la minimisation de (2.37) est équivalente à celle de la première forme (ou forme multiplicative) semi-quadratique

$$\mathcal{J}^\triangleright(f,b) = \int_{\Omega} |h * f - g|^2 + \alpha \left(\int_{\Omega} b |\nabla f|^2 + \int_{\Omega} \psi(b) \right), \quad (2.39)$$

dans laquelle la variable b représente la présence ou l'absence d'une discontinuité, selon que sa valeur est (respectivement) proche de zéro ou de un. On peut voir que dans ce deuxième cas, la régularisation devient quadratique, alors que le terme en $\|\nabla f\|$ disparaît en présence d'un bord, d'où l'appellation semi-quadratique. Une deuxième forme (ou forme additive) de telle régularisation peut être obtenue en remarquant que $\varphi(t) = \min_{b \in \mathbb{R}^+} ((t - b)^2 + \xi(b))$, où ξ est encore une fonction strictement convexe, cette fois définie par $\xi(b) = \min_{s \in \mathbb{R}} (\varphi(s) - (s - b)^2)$. Alors, de même que pour le premier cas, minimiser (2.37) revient à minimiser

$$\mathcal{J}^\triangleleft(f, b) = \int_{\Omega} |h * f - g|^2 + \alpha \left(\int_{\Omega} (|\nabla f| - b)^2 + \int_{\Omega} \xi(b) \right). \quad (2.40)$$

Influence du terme de fidélité. La quasi totalité des méthodes de restauration par minimisation de critères pénalisés considèrent des termes de fidélité aux données en norme L^2 , par soucis de s'approcher le plus possible d'une solution de type moindres carrés, mais surtout par simplicité, puisque l'utilisation d'une norme quadratique pose beaucoup moins de difficultés théoriques. Néanmoins, cette approche n'est pas la seule possible, et certains auteurs ont commencé ces dernières années à envisager l'utilisation de termes de fidélité en norme L^1 , ou même L^∞ .

Lintner et Malgouyres [119] ont par exemple proposé un modèle utilisant la norme L^∞ pour le terme de fidélité aux données Φ . Leur modèle se place dans le cadre de la régularisation par ondelettes, et s'écrit

$$\begin{cases} \min_f \int_{\Omega} |\nabla f| \\ \|h * f - g\|_{L^\infty, \mathcal{D}} \leq \tau, \end{cases} \quad (2.41)$$

où le terme de fidélité est en fait donné par la norme L^∞ du produit scalaire avec les éléments d'un dictionnaire de caractéristiques \mathcal{D} : $\|f\|_{L^\infty, \mathcal{D}} = \sup_{\Psi \in \mathcal{D}} |\langle f, \Psi \rangle|$. L'utilisation de cette norme est dite porter plus d'informations et permettre de réduire l'espace de recherche pour le minimum de la variation totale dans la régularisation. La minimisation est alors effectuée en utilisant une méthode dérivée de celle d'Uzawa, et résulte en une meilleure préservation des textures qu'avec le modèle de Rudin-Osher-Fatemi [167].

Parmi les travaux en restauration utilisant d'autres termes de fidélité, on pourra citer ceux de Bar *et al.* [12], qui envisagent l'approximation de la norme L^1 (approximation permettant d'éviter l'apparition de singularités en zéro), traitant ainsi le modèle

$$\mathcal{J}(f) = \int_{\Omega} \sqrt{(h * f - g)^2 + \eta} + \alpha \mathcal{R}(f). \quad (2.42)$$

Celui-ci s'est montré efficace dans la restauration d'images affectées par des bruits impulsifs et autres observations aberrantes (angl. *outliers*).

De même, dans [38, 71, 207], une norme L^1 est également utilisée comme terme de fidélité aux données :

$$\mathcal{J}(f) = \|h * f - g\|_{L^1} + \alpha \mathcal{R}(f). \quad (2.43)$$

Dans [71], les auteurs visent comme intérêt de ce terme le fait de ne plus supposer d'a priori gaussien, ni sur le bruit, ni sur la distribution des niveaux de gris de l'image⁶. Dans [38], on envisage plutôt la norme L^1 comme un moyen d'éviter la perte de contraste

6. Ce qui est aussi une des raisons du choix courant de la norme L^2 pour l'attache aux données.

caractérisant la restauration des images effectuées par des modèles du type $L^2 + TV^7$, tandis que dans [207], on considère davantage l'incertitude caractérisant le flou disponible pour effectuer l'étape de déconvolution.

Nikolova étudie dans [142] le modèle générique à terme de fidélité non-lisse

$$\mathcal{J}(f) = \int_{\Omega} \psi(h * f - g) + \alpha \mathcal{R}(f), \quad (2.44)$$

avec une emphase sur le cas $\psi(t) = |t|^p$, ce qui résulte alors en le modèle

$$\mathcal{J}(f) = \int_{\Omega} |h * f - g|^p + \alpha \mathcal{R}(f). \quad (2.45)$$

Ce type de fonctionnelle en est, dans son utilisation, encore au stade des balbutiements, mais il est à penser que son usage se développera dans les années à venir.

Moindres carrés totaux et moindre norme totale. Les moindres carrés totaux sont une approche qui étend les moindres carrés traditionnels [125], et permet de gérer une incertitude sur l'image et la fonction de dispersion. Dans cette méthode, la fonction de dispersion est supposée contenir une composante déterministe, de même qu'une composante stochastique : $h = \bar{h} + \delta h$. Ceci résulte alors en le modèle de dégradation $\bar{g} + \delta g = (\bar{h} + \delta h) * f$, dans lequel \bar{g} est la composante déterministe de l'image observée, et δg sa composante stochastique. Le problème est alors formulé comme la minimisation de δg et δh , avec les contraintes de l'équation de modélisation précédente.

Ce type de technique a par exemple été utilisé dans [127] pour (ce qui est qualifié être de) la déconvolution aveugle. Cependant, la méthode des auteurs requiert une connaissance relativement précise de la fonction de dispersion, ce qui l'exclut immédiatement s'il y nécessite d'une reconstruction complète, ce qui est le cas dans la vaste majorité des problèmes aveugles. L'absence de comparaisons avec d'autres méthodes rend également l'évaluation des possibilités de restauration délicate.

Dans [158], un algorithme assez proche est proposé, basé sur l'utilisation de la moindre norme totale. Celui-ci n'est cependant pas très convaincant, car la technique APEX/SECB [32] décrite plus avant fait mieux ou aussi bien dans tous les cas, et ce sans connaissance préalable du noyau de dégradation.

2.2.2 Méthodes utilisant l'analyse multirésolution et les ondelettes

La transformée continue en ondelettes permet de décomposer un signal en un espace d'échelles/positions qui sépare les composantes de différente taille. L'analyse des caractéristiques significatives dans cet espace mène à des filtrages adaptatifs.

Il faut noter que parler de déconvolution par ondelettes est un abus de langage, cette décomposition servant seulement à la régularisation du problème inverse, et non à la déconvolution (inversion) proprement dite.

Nous donnons ci-dessous un aperçu de quelques méthodes utilisant un principe basé sur les ondelettes.

7. C'est-à-dire le modèle à fidélité aux données en norme L^2 et régularisation TV.

Transformée en ondelettes-vaguelettes. Une des premières techniques introduite pour la déconvolution par ondelettes a été développée par Donoho, non dans le cadre du traitement d'images, mais dans celui beaucoup plus général de la résolution de problèmes inverses [58]. Il s'agit d'une approche non-itérative, consistant à appliquer tout d'abord un simple filtrage inverse aux données observées. L'équation $\mathbf{g} = H\mathbf{f} + \mathbf{b}$ (le bruit étant gaussien) devient donc :

$$\tilde{\mathbf{f}} = H^{-1}\mathbf{g} = \mathbf{f} + H^{-1}\mathbf{b}. \quad (2.46)$$

Le bruit $H^{-1}\mathbf{b}$ n'est plus blanc mais demeure gaussien. Il est amplifié lorsque la déconvolution est instable.

Une transformée en ondelettes est alors appliquée à $\tilde{\mathbf{f}}$, et les coefficients obtenus sont soumis à un seuillage dit « brut » (angl. *hard thresholding*) ou « doux » (angl. *soft thresholding*). Un seuillage doux consiste, pour un coefficient a et un certain seuil $\varsigma > 0$, à remplacer a par $a^\varsigma = (|a| - \varsigma) + \text{sign } a$. De même, un seuillage brut est effectué quand a est remplacé par $a^\varsigma = a \cdot I\{|a| > \varsigma\}$ où I est la fonction indicatrice.

Une transformée en ondelettes inverse est alors appliquée aux données filtrées, afin d'obtenir une approximation de l'image originale. En effet, si le seuil a été judicieusement choisi, le bruit présent après filtrage inverse, dans \tilde{f} , a été éliminé.

Cette technique constitue le point de départ des méthodes de déconvolution par ondelettes. Elle a été raffinée par la suite par nombre d'auteurs, en adaptant la base d'ondelettes à la réponse en fréquence de H^{-1} .

Bect *et al.* montrent dans [14] qu'un seuillage doux dans une base d'ondelettes est équivalent, en formulation variationnelle, au choix d'un terme de régularisation étant la norme de l'espace de Besov B_1^{11} [69]⁸ :

$$\mathcal{J}(f) = \int_{\Omega} \Phi(h * f - g) + \alpha \|f\|_{B_1^{11}}, \quad (2.47)$$

où

$$\|f\|_{B_1^{11}} = \sum_{j,k,\psi} |c_{j,k,\psi}^f| \quad (2.48)$$

et $c_{j,k,\psi}^f$ est la séquence de coefficients d'ondelettes, suivant lesquels on a, pour $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$, $f = \sum_{j,k,\psi} c_{j,k,\psi}^f \psi_{j,k}$.

Ceci illustre bien le fait que des approches semblant très éloignées les une des autres peuvent tout à fait se rejoindre sur une formulation équivalente.

Le même auteur a également donné la formulation variationnelle d'un modèle couplé faisant intervenir à la fois une régularisation TV et un seuillage dans une base d'ondelettes. Cette formulation pouvant s'écrire sous la forme

$$\mathcal{J}(f) = \int_{\Omega} \Phi(h * f - g) + \alpha \int_{\Omega} |\nabla f| + (1 - \alpha) \|Wf\|_{L^1}, \quad (2.49)$$

8. On ne rentrera pas ici dans des considérations plus détaillées sur les espaces de Besov. Signalons seulement que ceux-ci sont utilisés en théorie des ondelettes, et de manière plus générale définissent des espaces interpolés entre ceux de Lebesgue et ceux de Sobolev.

où W représente une transformée en ondelettes orthonormale, et $\|Wf\|_{L^1} = \sum_\theta |(Wf)_\theta|$, avec $(Wf)_\theta$ étant les coefficients de cette transformée.

Influence et adaptation de la base d'ondelettes. Il faut bien remarquer que, pour des méthodes telles que celle introduite ci-dessus, le choix de la base d'ondelettes ainsi que de la valeur du seuil sont des éléments fondamentaux. C'est principalement autour de ces deux axes que la communauté des chercheurs a envisagé des améliorations. Ces recherches ont résulté par exemple dans le choix d'une base d'ondelettes appelée « base en ondelettes miroirs » [99, 100], dont le principe de l'approche est fondamentalement le même que celui utilisé dans l'approche de Donoho. Cette base d'ondelettes possède cependant une structure de pavage temps/fréquence différente de celle des ondelettes traditionnelles. Elle permet d'isoler la fréquence ω_s pour laquelle \hat{H} (spectre de H) est proche de zéro, car une singularité dans $\hat{H}^{-1}(\omega_s)$ influence la variance du bruit dans l'échelle d'ondelettes correspondant à la bande de fréquence qui inclut ω_s .

Le principe est alors le même que celui utilisé dans la méthode de Donoho : seuillage des coefficients de la transformée en ondelettes puis transformation inverse.

En pratique, il peut ne pas être possible d'isoler toutes les singularités, ce qui rendra l'utilisation de la technique plus délicate (surtout dans l'application que nous traitons, dans laquelle l'opérateur de flou varie à chaque image acquise).

Régularisation hybride spectrale - ondelettes. Neelamani a proposé une approche hybride [137, 139] dans laquelle on utilise la transformée de Fourier combinée à la transformée en ondelettes (redondante [124]) dans le but de réduire l'amplification excessive du bruit à l'inversion du noyau. La base de Fourier permet de représenter économiquement le bruit coloré $H^{-1}\mathbf{b}$, et le domaine d'ondelettes l'image \mathbf{f} . Cette approche hybride est une réponse à la difficulté à isoler toutes les singularités [138] avec la méthode de Kalifa *et al.* [100].

Un premier seuillage est effectué dans la base de Fourier. Il consiste à seuiller $\hat{\tilde{\mathbf{f}}}$ avec certains scalaires obtenus par déconvolution de Wiener, ou de Tihonov. On calcule ensuite la transformée de Fourier inverse de $\hat{\tilde{\mathbf{f}}}$ seuillé, pour obtenir $\tilde{\mathbf{f}}_1$.

Un deuxième seuillage dans la base d'ondelettes est ensuite effectué. Pour cela, on calcule la transformée discrète en ondelettes de $\tilde{\mathbf{f}}_1$ afin d'obtenir les coefficients d'ondelette. Ceux-ci sont alors également seuillés. Finalement, on calcule la transformée discrète en ondelettes inverse avec ces coefficients seuillés, ce qui amène à l'estimateur dénommé **ForWaRD** de \mathbf{f} .

Les avantages de cette méthode résident dans le fait qu'elle est rapide, compétitive, et élimine les sursoscillations à l'inversion. De plus, sa supériorité par rapport à la méthode de Kalifa *et al.* a été montrée par les auteurs. En revanche, on notera parmi ses inconvénients que le paramètre de régularisation utilisé est difficile à fixer, et que le coût en calculs limite son utilité. En outre, le spectre de l'image observée n'est en général pas connu (bien que nécessaire ici), et - de manière plus éloignée de notre problématique - la prise en compte de bruits de types autres que gaussien n'est pas triviale.

Régularisation par paquets d'ondelettes complexes. Au delà de l'utilisation des ondelettes classiques, comme présenté ci-dessus, certains auteurs ont proposé l'utilisation

d'approches multirésolution plus évoluées, telles les paquets d'ondelettes complexes. Il s'agit d'une méthode proposée par Jalobeanu *et al.* dans la cadre de l'imagerie satellitaire [93], et dénommée **COWPATH**.

Ils proposent une amélioration de la méthode introduite par Donoho, qui, on le rappelle, consiste à effectuer une déconvolution « brute » suivie d'un filtrage du bruit dans le domaine de la transformée en ondelettes. Il s'agit ici de seuiller les coefficients d'une nouvelle transformée, dite en paquets d'ondelettes complexes, dans laquelle tous les paramètres sont automatiquement sélectionnés. Dans l'étape de débruitage de l'image déconvoluée de manière directe, les auteurs proposent de représenter cette dernière dans une base de paquets d'ondelettes, dans laquelle le processus de seuillage des coefficients est effectué. Cette méthode est directe (au sens de non-itérative) et permet une implémentation très rapide.

La motivation essentielle de cette technique est de résoudre le problème de déconvolution d'une manière efficace d'un point de vue calculatoire. Ceci est fait par utilisation des ondelettes complexes, qui permettent une invariance en translation sans perte de temps de calcul. Ces ondelettes permettent également une meilleure restauration, en séparant six directions, alors que les ondelettes réelles séparables ne prennent en compte que deux directions.

Cette méthode est dite être entre autre plus rapide que les autres, et prendre mieux en compte les directions et textures de l'image. Des comparaisons ont été effectuées par les auteurs avec les techniques suivantes : régularisation quadratique, régularisation non-quadratique (les bords sont bien restaurés mais le bruit reste toujours assez présent, les textures sont atténues, l'image obtenue est utilisée comme image de départ pour **COWPATH**), et paquets d'ondelettes réelles avec seuillage doux [99], par rapport à laquelle l'algorithme des auteurs de [93] est plus de deux fois plus rapide.

Ces bons résultats dépendent cependant sûrement en grande partie de l'image d'approximation nécessaire à l'étape d'initialisation. En ce qui concerne l'adéquation au flou, si la fonction de transfert contient des zéros, la déconvolution directe produit une trop forte amplification du bruit, et le signal devient difficile à restaurer. Si le flou est non-inversible, comme par exemple pour les noyaux de mouvement, il est impossible d'effectuer une inversion non-régularisée dans le domaine de Fourier. Il faudra alors remplacer cette étape par une déconvolution régularisée.

Régularisation par approche hybride ondelettes - curvelettes. Certains auteurs ont proposé d'associer à la fois les ondelettes « classiques » et une autre transformée, présentant des caractéristiques différentes, ceci dans le but de bénéficier des avantages des deux techniques. Starck *et al.* se sont à cette fin intéressés aux curvelettes [179].

Leur idée est d'utiliser pour le problème de déconvolution les bons résultats obtenus grâce aux curvelettes dans le cadre du débruitage [178] : la reconstruction d'une image fait en effet apparaître moins d'artefacts le long des contours avec les curvelettes qu'avec les ondelettes traditionnelles.

Deux méthodes différentes existent pour la déconvolution combinée :

1. Si le bruit est gaussien et si la division par la fonction de dispersion dans le domaine de Fourier peut être effectuée proprement, alors le problème de déconvolution se ramène

à un problème de filtrage où le bruit est encore gaussien, bien que non nécessairement blanc, à la manière des méthodes explicitées ci-haut.

2. Une méthode de déconvolution itérative peut s'appliquer dans un cadre plus général. De plus, une modélisation correcte du bruit peut plus facilement être prise en compte. L'approche consiste premièrement à détecter tous les coefficients significatifs avec toutes les transformées multiéchelles utilisées. Si on utilise k transformées $\mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_k$, on obtient k supports multirésolution $\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_k$ de l'image originale, en utilisant la modélisation du bruit.

Après détermination de l'ensemble des supports de multirésolution, Starck *et al.* proposent de résoudre le problème d'optimisation

$$\min_f \text{TV}(f) \quad \text{avec} \quad \mathcal{M}_k \mathcal{T}_k [h * f] = \mathcal{M}_k \mathcal{T}_k h \quad \forall k \quad (2.50)$$

avec l'approximation $\text{TV}(f) = \int |\nabla f|^p$ où $p = 1,1$ afin d'approcher le cas $p = 1$ avec une fonctionnelle strictement convexe. La contrainte sur les supports multirésolution impose la fidélité aux données, ou plus précisément aux coefficients significatifs obtenus par les différentes transformées. Ceux non-significatifs, correspondant au bruit, ne sont pas pris en compte dans le but de prévenir son amplification dans l'algorithme. Pour résoudre ce problème de minimisation, il est proposé de relaxer la contrainte pour en obtenir une approximation, menant ainsi à la formulation

$$\min_f \sum_k \|\mathcal{M}_k \mathcal{T}_k g - \mathcal{M}_k \mathcal{T}_k [h * f]\|_2 + \alpha \text{TV}(f). \quad (2.51)$$

La solution est alors calculée en utilisant la méthode de Landweber projetée [16]. La comparaison avec une déconvolution « purement » par ondelettes fait apparaître la supériorité de la technique proposée.

Régularisation par autres ondelettes « avancées ». D'autres représentations d'images récentes commencent à être utilisées en déconvolution d'images. Ces ondelettes « de nouvelle génération » (ridgelettes, curvelettes, contourlettes et autres bandlettes [155, 192]) semblent donner des résultats en déconvolution plutôt intéressants pour les quelques expérimentations qui ont été faites. On pourra consulter par exemple à ce propos [188] et [154].

2.2.3 Méthodes basées sur les équations aux dérivées partielles.

Ces méthodes se basent sur la résolution d'un problème se ramenant à une équation aux dérivées partielles (EDP). Les modèles de diffusion sont les plus couramment utilisés. Une des difficultés principales est de choisir judicieusement le terme de diffusivité, de manière homologue au choix des opérateurs de régularisation pour les approches variationnelles.

On citera par exemple le schéma de Welk *et al.* [206, 207], qui présente une méthode de déconvolution se basant à la fois sur le formalisme des EDP et celui variationnel, et utilisant des tenseurs de diffusion anisotropes [204].

En partant du modèle variationnel général de déflouage suivant,

$$\mathcal{J}(f) = \int (h * f - g)^2 + \alpha \Psi(|\nabla f|^2), \quad (2.52)$$

les auteurs obtiennent, en appliquant la condition d'Euler, une EDP de diffusion-réaction :

$$\partial_t f = h^* * (h * f - g) + \alpha \operatorname{div} (u (|\nabla f|^2) \nabla f) , \quad (2.53)$$

dans laquelle le terme de diffusion $u(s^2) = \Psi'(s^2)$ est relié au terme de régularisation dans la fonctionnelle d'énergie (2.52). Ils choisissent d'utiliser des diffusivités de type TV : $u(s^2) = 1/|s|$, souvent utilisée dans sa forme « régularisée » $u(s^2) = 1/\sqrt{s^2 + \varepsilon^2}$, où ε doit être petit, et une diffusivité de type Perona-Malik : $u(s^2) = (1 + s^2/\lambda^2)^{-1}$, où λ est un paramètre à fixer. Le choix de ces termes de diffusivité provenant de leur qualité reconnue à bien faire ressortir des bords nets dans les images. Un schéma numérique de type différences finies est ensuite appliqué pour la résolution de cette équation.

Du point de vue du SNR, la restauration avec diffusivité de type Perona-Malik s'avère meilleure qu'avec la diffusivité TV ; cependant, l'aspect visuel est beaucoup plus discutable.

2.2.4 Autres méthodes

Nous présentons ici quelques méthodes basées sur des approches plus originales, et/ou présentant des résultats intéressants, et qu'il est difficile de classer dans les catégories ci-dessus.

Il existe une quasi infinité d'autres algorithmes, et comme nous l'avons déjà dit, il est impossible et hors de notre propos d'en dresser un recensement exhaustif. Néanmoins, on pourra citer à titre d'exemple les méthodes utilisant des réseaux de neurones [168], la méthode CLEAN [89] et des approches dérivées en radioastronomie [122], ou encore les méthodes basées sur divers filtres adaptatifs [185]. Dans [185], on calcule en fait un filtre de restauration à partir de la carte des bords de l'image dégradée, en utilisant des modèles de référence pour la distribution statistique des niveaux de gris. Cependant, pour plusieurs de ces techniques à filtrage adaptatif, force est de constater qu'il s'agit souvent plus d'améliorer l'image floue que de la restaurer à proprement parler.

Parmi les autres approches que nous pensons destinées à se développer, figurent celles basées sur des traitements locaux de l'image dégradée. Nous en donnons quelques éléments dans les paragraphes ci-dessous, en présentant un cas particulier.

Déconvolution locale / adaptative. Katkovnik *et al.* ont proposé une méthode utilisant la régression non-paramétrique [101]. L'idée se base sur une approximation locale polynomiale de l'image (dénommée LPA) et un paradigme d'intersection d'intervalles de confiance (ICI), qui est appliqué pour définir des échelles adaptatives variantes de l'estimateur LPA. L'algorithme est non-linéaire et spatialement adaptable à la douceur et aux irrégularités des images corrompues par un bruit additif.

On considère un paramètre d'échelle e , et un noyau (filtre passe-bas d'ordre m) u_e défini tel que $f_e = u_e * f$. Sa bande passante se réduit quand l'échelle e augmente. Si celle-ci est petite, la bande passante de l'estimateur est large et le signal f est reproduit sans distorsions. À l'inverse, si l'échelle est grande, la bande passante est étroite et seules les composantes basses fréquences de f peuvent être observées en sortie. La conception du filtre u_e est effectuée grâce à la méthode LPA présentée dans [102].

L'idée basique de l'algorithme est d'utiliser l'image lissée f_e au lieu de f comme solution du problème inverse, et d'exploiter l'estimateur du noyau u_e muni du paramètre d'échelle e dans le but de supprimer autant que possible le bruit en préservant les détails

de la fonction objet f . En appliquant l'opérateur de noyau u_e aux deux membres de $g = h * f + b$, on obtient dans le domaine fréquentiel $\hat{g}_e = \hat{f}_e \hat{h} + \hat{b}_e$ ou $\hat{g}_e = \hat{f} \hat{h}_e + \hat{b}_e$.

Deux types de « solutions » à ces expressions sont alors utilisées comme estimées de f_e : l'inverse régularisée

$$\tilde{\hat{f}}_e = \frac{\hat{h}^*}{|\hat{h}|^2 + \varepsilon_1^2} \hat{g}_e = \frac{\hat{h}^* \hat{u}_e}{|\hat{h}|^2 + \varepsilon_1^2} \hat{g} \quad (2.54)$$

et l'inverse de Wiener régularisée

$$\tilde{\hat{f}}_e = \frac{\hat{h}^* |\hat{f}|^2 \hat{u}_e}{|\hat{h} \hat{f}|^2 + \varepsilon_2^2 \sigma^2} \hat{g}. \quad (2.55)$$

La régression non paramétrique LPA avec le paramètre optimal e permet alors une haute qualité d'approximation de f . La règle ICI pour la sélection de l'échelle adaptative est obtenue à partir de la précision de LPA. On consultera [78] pour le fonctionnement détaillé de ICI.

Les résultats obtenus par les auteurs se sont révélés être très bons, et les comparaisons effectuées avec l'algorithme **ForWaRD** de Neelamani *et al.* et **EM** de Figuereido et Nowak [61] en faveur de leur approche dans tous les cas traités.

Takeda *et al.* ont proposé par la suite [184] ce qu'on pourrait qualifier d'évolution de la technique de Katkovnik, qu'ils qualifient de suboptimale, en raison de la présence de deux étapes dans son processus de déflouage : débruitage et déconvolution.

Leur algorithme est basé sur le choix d'une fonctionnelle spécifique à minimiser (en ce sens il rentre dans la catégorie des méthodes variationnelles), utilisant un terme d'a priori sur l'image (c'est-à-dire un opérateur de régularisation) particulier, basé sur les caractéristiques de celle-ci, et qualifié de « variation totale à noyau adaptatif ».

De très bons résultats ont été observés par les auteurs par rapport à l'approche de Katkovnik, ceci en faisant ainsi probablement l'une des méthodes d'état de l'art à l'heure actuelle en déconvolution à noyau connu.

2.2.5 Méthodes spécifiques aux images couleur

Parmi toutes les techniques développées, très peu - et ceci de manière étonnante - ont été conçues dans le but de traiter des données en couleur, bien que grand nombre d'applications actuelles la requièrent. Comme on le verra plus en détails dans le Chapitre 5, qui sera consacré à une méthode de déconvolution aveugle pour les images couleurs, il existe fondamentalement deux approches pour traiter ce type de données : l'approche monochromatique, consistant à séparer chaque canal couleur, à le restaurer de manière indépendante aux autres, puis à les regrouper tous ; et l'approche que l'on pourrait qualifier de couplée, introduisant comme son nom l'indique un couplage entre les canaux, qui force chacun d'entre eux à évoluer suivant les deux autres durant le processus de restauration.

Alors que la première approche se déduit immédiatement de n'importe quel schéma monochromatique (p. ex. un de ceux présentés précédemment), d'une manière générale, un schéma variationnel de déconvolution d'images couleurs (à trois composantes) avec couplage sur

les canaux peut s'écrire comme la minimisation d'une fonctionnelle de la forme

$$\int_{\Omega} \sum_{i=1}^3 \Phi(h * f_i - g_i) + \mathcal{R}(f) = \Upsilon(f) + \mathcal{R}(f). \quad (2.56)$$

Ici, la fonctionnelle $\mathcal{R}(f)$ représente le terme de régularisation, portant sur les trois composantes de $f = (f_1, f_2, f_3)$, et est le terme permettant d'induire un lien entre les différents canaux de l'image.

À titre d'exemple, on pourra considérer les travaux de Bar *et al.* [10], eux-mêmes issus de ceux de Brook *et al.* [29]. Ces auteurs proposent une méthode variationnelle permettant le traitement des images en couleur, méthode basée sur l'emploi de différents termes de régularisation $\mathcal{R}(f)$ prenant en compte des couplages intercanaux. Ces différents termes sont : la fonctionnelle de Mumford-Shah couplée (c'est-à-dire une régularisation non-convexe couplée), la fonctionnelle de Mumford-Shah / TV couplée, et le régularisateur de Beltrami (défini plus loin).

Bar *et al.* montrent la supériorité des fonctionnelles de régularisation étudiées par rapport à la régularisation TV, du moins pour certains niveaux et certains types de bruits. De plus, ils exhibent également la supériorité de l'approche avec couplage des canaux par rapport à l'approche canal par canal. Bien évidemment, ce type d'approche se généralise immédiatement à un nombre de canaux quelconque.

2.3 Synthèse sur les méthodes avec identification du flou a priori

Nous avons donné dans les sections ci-dessus un aperçu, que nous espérons le plus complet possible, des différentes manières envisageables pour traiter un problème de déconvolution aveugle en deux étapes disjointes : estimation du flou (ou de son inverse) à partir de la seule image dégradée, puis restauration par une des méthodes traditionnelles de restauration à noyau connu.

Le choix de la procédure d'identification du flou se fera suivant le type de noyau à identifier. Étant donné que nous avons à traiter des images dégradées par des noyaux de défocalisation (entre autre), des procédures telles que l'utilisation du kurtosis, ou le filtrage de choc, nous semblent être parmi les plus adaptées.

Globalement, on a pu constater un choix quasi-illimité pour ce qui est de la restauration d'images à niveaux de gris avec connaissance parfaite du flou. Cependant, dans un schéma de déconvolution aveugle à identification du flou a priori, on privilégiera plutôt pour l'étape de restauration une approche robuste permettant de compenser l'erreur d'estimation sur le flou, inévitable en pratique, telle que l'utilisation de normes non-quadratiques pour le terme de fidélité aux données.

Pour ce qui est de la régularisation, on veillera à utiliser des termes à préservation des discontinuités, la manière la plus simple étant de choisir des opérateurs convexes, ou pouvant être approximés par une fonction convexe.

En bref, un schéma de restauration variationnel basé sur l'utilisation d'une fonctionnelle comprenant un terme de fidélité aux données en norme L^1 (pour la robustesse aux incertitudes du flou identifié), et une régularisation TV approximée (pour sa capacité bien connue à la préservation de bords, et sa relative simplicité de mise en œuvre), nous paraît

être un choix judicieux.

En ce qui concerne les images multicanal, le peu d'approches disponibles nous fait nous orienter vers des techniques variationnelles dans lesquelles le terme de régularisation contient des informations de couplage des canaux couleurs. Les approches de Bar et Brook y sont fondamentales. La robustesse du terme de régularisation, encore en norme L^1 , employé par le premier auteur, nous oriente incontestablement vers ce genre de technique.

3 Méthodes d'identification jointe

Le problème de déconvolution à identification jointe cherche à déterminer de manière parallèle le noyau de flou et l'image originale, nette donc. On pourra alors également le voir qualifié de « conjoint » ou « aveugle ». Cependant, en réalité, beaucoup de ces méthodes s'y rapportant utilisent en fait une approche alternée entre la reconstruction de h et f , plutôt que de calculer à proprement une solution jointe.

On trouvera également parfois la dénomination « myope » ou « semi-aveugle », ceci provenant du fait que, d'une manière ou d'une autre, des hypothèses sont toujours faites sur certaines données du problème, dans le but de ne pas se trouver dans une configuration qui reviendrait à traiter sans information supplémentaire une (seule) équation à deux inconnues (de une le flou, et de deux l'image nette).

De manière générale, on pourra scinder cette classe d'algorithmes en deux groupes : méthodes directes, et méthodes itératives, alternant de manière successive la reconstruction de h et f , et ce jusqu'à (éventuelle) convergence.

Notons que la grande majorité des méthodes rentre dans le deuxième groupe, soit celui des approches itératives, et que la quasi totalité d'entre elles se positionne dans le cadre monocanal. De même, elles sont pour la plupart issues du formalisme variationnel. Nous donnerons dans ce qui suit un exemple de méthode directe, tandis que toutes les autres présentées seront itératives. Ces méthodes seront listées selon l'ordre suivant :

1. Méthode directe de séparation de la plage des zéros.
2. Méthode d'Ayers-Dainty.
3. Méthode des moindres carrés non-régularisés.
4. Méthodes à double régularisation.
5. Méthodes de filtrage adaptatif.
6. Méthodes basées sur l'analyse en composantes indépendantes.
7. Méthodes diverses.
8. Méthodes pour les images couleur.

3.1 Méthode directe de séparation de la plage des zéros

Un des premiers algorithmes conjoint de restauration des signaux multidimensionnels est dû à Lane et Bates [114], qui ont proposé une approche basée sur le principe de séparation de la plage des zéros de l'image flouée g .

Ils ont montré que tout signal issu de multiples convolutions entre d'autres signaux est en théorie automatiquement déconvoluable si sa dimension est supérieure à un. Cet

argument repose sur les propriétés de la transformée en Z de signaux n -dimensionnels à support fini, qui prend nécessairement la valeur zéro sur des hypersurfaces de dimension $2n - 2$ dans un espace de dimension $2n$.

L'approche suppose l'absence de bruit additif, ce qui résulte en

$$\check{g}(z_1, z_2) = \check{h}(z_1, z_2) \check{f}(z_1, z_2) \quad (2.57)$$

dans le Z-domaine, avec \check{f} la transformée en Z de f .

Elle consiste alors à séparer la transformée en Z de l'image floue $\check{g}(z_1, z_2)$ en les deux facteurs de la convolution. Comme $\check{g}(z_1, z_2)$ est un polynôme, la solution est équivalente à en trouver les racines qui appartiennent à chaque composante.

Pour cela, on effectue plusieurs hypothèses : support fini compact pour $\check{h}(z_1, z_2)$ et $\check{g}(z_1, z_2)$; la transformée en Z de chaque facteur doit être nulle sur une seule surface continue ; et ces plages de zéros ne peuvent se couper qu'en des points discrets.

En pratique, l'applicabilité de cette méthode est malgré tout limitée, en raison de sa grande complexité calculatoire, et également de sa sensibilité au bruit. On préférera alors s'orienter pour plus de robustesse vers une approche itérative.

3.2 Méthode d'Ayers-Dainty

Autrement appelé algorithme de « déconvolution aveugle itérative » (angl. *iterative blind deconvolution*), cette approche est la plus connue des approches aveugles à estimation conjointe du flou et de restauration de l'image dégradée. Elle consiste à itérer les estimations dans le domaine de Fourier et dans le domaine spatial, en imposant des contraintes dans ces deux espaces. Ces contraintes, la façon dont elles sont utilisées, de même que la manière de mettre en œuvre cet algorithme ont donné lieu à différentes versions. On pourra consulter [7] pour l'approche originelle par Ayers et Dainty, et [56, 187] pour quelques variantes.

L'estimation dans le domaine de Fourier est faite à partir d'un filtre assimilable à celui de Wiener, et est donnée, à la n -ième itération par

$$\hat{h}_n = \frac{\hat{g} \hat{f}_{n-1}^*}{|\hat{f}|^2 + \frac{\alpha}{|\hat{h}_{n-1}|^2}} \quad (2.58)$$

et

$$\hat{f}_n = \frac{\hat{g} \hat{h}_{n-1}^*}{|\hat{h}|^2 + \frac{\alpha}{|\hat{f}_{n-1}|^2}} . \quad (2.59)$$

Il existe une adaptation de cette méthode proposée par Holmes [90], qui, au lieu d'utiliser itérativement ces formules de Wiener, se base sur l'algorithme dit « EM » (angl. *Expectation-Maximization*), largement utilisé dans un grand nombre d'applications d'imagerie, et ceci sous différents noms, dont le plus connu est sûrement celui de Richardson-Lucy [173]. Dans le cas d'un modèle à flou connu $g = h * f$, linéaire et spatialement invariant, l'itération EM procède de la manière suivante :

$$f_{n+1} = f_n h^* * \left(\frac{g}{h * f_n} \right) . \quad (2.60)$$

Pour un modèle aveugle, on obtient un algorithme à double itération en « échangeant » l'image et la fonction de dispersion, ce qui résulte alors en le schéma alterné suivant :

$$f_{n+1} = f_n h_n^* * \left(\frac{g}{h * f_n} \right) \quad (2.61)$$

et

$$h_{n+1} = \frac{h_n}{\int_{\Omega} g} f_n^* * \left(\frac{g}{h * f_n} \right). \quad (2.62)$$

Cependant, bien que la convergence de l'algorithme EM soit bien établie, celle de la double itération n'est, elle, pas garantie, ce qui peut mener à un fonctionnement assez aléatoire suivant les données traitées.

Notons que cette approche n'est pas à proprement parler régularisée, et qu'elle peut être vue comme la minimisation d'un critère standard des moindres carrés, sous certaines contraintes. Certains auteurs ont alors proposé, afin de s'affranchir - ou tout du moins de limiter - les problèmes de convergence de cet algorithme, d'employer des formulations explicites des moindres carrés avec (ou non) régularisation.

3.3 Méthode des moindres carrés non-régularisés

McCallum [128] a par exemple proposé de simplement minimiser la fonctionnelle

$$\min_{f,h} \mathcal{J}(f,h) = \min_{f,h} \int (h * f - g)^2 \quad (2.63)$$

dans laquelle f et h sont supposés positifs et de support connu. L'optimisation est mise en œuvre par une technique appelée « recuit simulé » (angl. *simulated annealing*), consistant à rechercher le minimum global par des perturbations aléatoires des variables : si celles-ci mènent à une diminution de \mathcal{J} , elles sont acceptées, sinon elles sont rejetées avec une loi de probabilité particulière, dépendant du nombre d'itérations déjà effectuées.

Le gros inconvénient de cette approche réside cependant dans sa vitesse de convergence plutôt lente, la rendant ainsi difficilement utilisable avec des images de taille courante, présentant une résolution relativement élevée, comme c'est le cas pour celles issues d'appareils photographiques modernes.

3.4 Méthodes à double régularisation

Depuis quelques années sont apparues des méthodes basées sur la minimisation de fonctionnelles de type moindres carrés, avec régularisation portant à la fois sur l'image à restaurer et sur le noyau à reconstruire. Ces approches sont une extension au problème aveugle de la régularisation simple, dont nous avons parlé auparavant⁹, et qui est utilisée pour la déconvolution d'images à flou connu. Cette dernière consiste à minimiser une fonctionnelle dont la forme générique est donnée (avec les mêmes notations que précédemment) par

$$\mathcal{J}(f) = \int_{\Omega} \Phi(h * f - g) + \alpha \mathcal{R}_1(f), \quad (2.64)$$

où Φ est une norme pour le terme de fidélité aux données, \mathcal{R}_1 l'opérateur de régularisation (autrement appelé « fonction potentiel ») visant à contrôler l'amplification du bruit lors

9. Cf. Chapitre 1 Section 2.2.2.

du processus d'inversion, et α le paramètre de régularisation permettant de contrôler la balance, l'équilibre, entre la fidélité aux données dans le premier terme, et la contrainte *a priori* introduite par l'opérateur de régularisation. Ceci sur le domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ de l'image.

En imaginant que nous soyons dans une configuration inversée dans laquelle nous disposerions des images floue et nette, mais pas de la dégradation, alors celle-ci pourrait être estimée par le schéma similaire suivant :

$$\mathcal{J}(h) = \int_{\Omega} \Phi(h * f - g) + \alpha \mathcal{R}_2(h) \quad (2.65)$$

dans lequel le terme de régularisation porte ici dorénavant sur h .

Pour un problème aveugle, qui est alors doublement mal posé (à la fois sur l'image et sur le flou), on peut considérer la « somme » des deux problèmes (2.64) et (2.65). Ceci ramène alors à la minimisation sur f et h de la fonctionnelle

$$\mathcal{J}(f,h) = \int_{\Omega} \Phi(h * f - g) + \alpha_1 \mathcal{R}_1(f) + \alpha_2 \mathcal{R}_2(h) \quad (2.66)$$

où Φ est comme précédemment la norme pour le terme de fidélité aux données, \mathcal{R}_1 l'opérateur de régularisation sur l'image, \mathcal{R}_2 celui sur le flou, et α_1 et α_2 les paramètres de régularisation respectifs sur f et h . L'un des principaux problèmes de cette approche réside dans le choix des opérateurs \mathcal{R}_1 , \mathcal{R}_2 et des paramètres α_1 et α_2 , de même que dans la conception d'un algorithme efficace pour la minimisation de la fonctionnelle (2.66), algorithme dont la complexité dépendra alors de la régularisation retenue.

Globalement, on pourra scinder ces approches de double régularisation en deux groupes. Un premier groupe de méthodes qu'on pourra qualifier de « non-paramétriques », dans lesquelles l'opérateur de flou h et l'image f sont considérées comme étant de forme générale, indépendante de toute représentation via des paramètres. Ensuite un deuxième groupe, dans lequel h et/ou f pourront satisfaire un certain degré de structure paramétrique, comme par exemple en considérant des flous de défocalisation, de mouvement, ou encore gaussiens.

3.4.1 Approches non-paramétriques

Lane [113] a par exemple considéré l'extension suivante de (2.28),

$$\mathcal{J}(f,h) = \|h * f - g\|^2 + \alpha_1 \int_{\Omega} |f|^2 + \alpha_2 \int_{\Omega} |h|^2, \quad (2.67)$$

avec des contraintes concernant le support de f et h , de même qu'une contrainte sur leur positivité. Il s'agit donc ici du cas $\mathcal{R}_1(f) = \int_{\Omega} |f|^2$ et $\mathcal{R}_2(h) = \int_{\Omega} |h|^2$. La minimisation s'effectue alors à partir d'une technique de type gradient conjugué. Cette approche - probablement l'une des premières à mettre en œuvre un principe de double régularisation - a également permis de mettre en évidence les difficultés propres à ce type de méthodes : influence du bruit sur la reconstruction de l'image solution, critère d'arrêt à choisir, prise en compte rigoureuse des contraintes considérées, etc.

You et Kaveh [212] ont eux proposé d'utiliser $\mathcal{R}_1(f) = \int_{\Omega} |\nabla f|^2$ et $\mathcal{R}_2(h) = \int_{\Omega} |\nabla h|^2$, en conjonction avec une norme L^2 pour le terme de fidélité aux données Φ , soit une extension de (2.29). Malheureusement, l'utilisation de cette semi-norme H^1 pour les opérateurs de

régularisation¹⁰ mène au problème bien connu de reconstruction d'image et de noyau trop lisses, comme nous l'avons présenté dans la Section 2.2.1. Notons qu'en fait, les auteurs considèrent en outre, à des fins d'affinage de la régularisation, des matrices de pondération λ_f et λ_h , menant en définitive au traitement du problème suivant :

$$\min_{f,h} \mathcal{J}(f,h) = \min_{f,h} \frac{1}{2} \|h * f - g\|_{L^2}^2 + \alpha_1 \int_{\Omega} \lambda_f |\nabla f|^2 + \alpha_2 \int_{\Omega} \lambda_h |\nabla h|^2 . \quad (2.68)$$

L'optimisation mise en œuvre se base sur une minimisation alternée suivant f et h . La pertinence de ces matrices de pondération est cependant discutable, et leur définition bien peu aisée, puisque celles-ci sont estimées à partir de l'image observée seulement. En outre, en pratique, on est limité à des flous de support (très) réduits, de l'ordre de quelques pixels.

Par la suite, il a été proposé, comme dans le cadre de la restauration à noyau connu, des termes de régularisation prenant en compte les discontinuités inhérentes à la plupart des images naturelles. Ceci peut par exemple être fait en utilisant la norme TV, comme cela a été mis en œuvre dans le contexte de la déconvolution aveugle par Chan et Wong [40]. Leur modèle de déflouage étant alors

$$\min_{f,h} \mathcal{J}(f,h) = \min_{f,h} \frac{1}{2} \|h * f - g\|_{L^2}^2 + \alpha_1 \int_{\Omega} |\nabla f| + \alpha_2 \int_{\Omega} |\nabla h| . \quad (2.69)$$

Le principe de minimisation utilisé est fondamentalement le même que celui de You et Kaveh, à savoir une minimisation selon des directions alternées. La prise en compte de termes de régularisation non-convexes pose alors des difficultés théoriques, résolues par une approche de linéarisation des composantes du gradient de la fonctionnelle, que nous présenterons en détail dans le chapitre suivant.

Notons que You et Kaveh ont également proposé un schéma utilisant ce type de régularisation, pour un modèle de flou anisotrope [214].

Ces dernières années, plusieurs auteurs ont essayé de pallier les défauts des approches de You et Kaveh ou de Chan et Wong (convergence globale, influence de l'initialisation, paramètres de régularisation, etc.). He, Marquina et Osher, dans [85] ont par exemple considéré un raffinement de la technique introduite par Chan et Wong, et basée sur le principe de l'itération de Bregman [67]. Ils modifient la fonctionnelle d'énergie (2.69), en y ajoutant des contraintes sur le noyau de convolution et l'image originale, dans le but de se défaire du problème de non-unicité de la solution.

Une régularisation itérative est ensuite appliquée en utilisant la distance de Bregman pour le nouveau problème de déconvolution. Celle-ci consiste à remplacer l'image g par $g + v_n$ à l'itération $n + 1$ de l'algorithme alterné, avec

$$v_n = f + v_{n-1} - h * f_n . \quad (2.70)$$

Une contrainte de la forme $\int f = w = \int g$ est également introduite afin de pallier la non-unicité de la solution du modèle de Chan et Wong. Le modèle modifié obtenu, c'est-à-dire la fonctionnelle à minimiser, se trouve alors être

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(f,h) = & \frac{1}{2} \|h * f - g\|_{L^2}^2 + \alpha_1 \text{TV}(f) + \alpha_2 \text{TV}(h) + \\ & \frac{\lambda_1}{2} \left(\int_{\Omega} f - w \right)^2 + \frac{\lambda_2}{2} \left(\int_{\Omega} |f| - w \right)^2 + \frac{\lambda_3}{2} \left(\int_{\Omega} h - 1 \right)^2 + \frac{\lambda_4}{2} \left(\int_{\Omega} |h| - 1 \right)^2 . \end{aligned} \quad (2.71)$$

10. Cf. Chapitre 1, Section 1.3, p. 7.

Un schéma explicite est ensuite obtenu afin de minimiser cette fonctionnelle, schéma utilisant la régularisation itérée de Bregman présentée ci-haut.

Les résultats présentés par les auteurs semblent très légèrement supérieurs à ceux obtenus par Chan et Wong, et les temps de calcul très raisonnables (de l'ordre de quelques minutes pour l'ensemble du processus). L'itération de Bregman semble permettre de faire apparaître plus de détails dans les images que ne le peut la méthode de Chan et Wong initiale, mais risque toujours de légèrement plus amplifier le bruit. D'autant plus qu'aucun résultat n'a été présenté sur des images réelles, mais seulement sur une unique image à support fini, exhibant ainsi des propriétés particulières que nous évoquerons dans le chapitre suivant. Au final, il est à craindre que cette méthode soit principalement basée sur un artifice mathématique qui ne change rien à la capacité de reconstruction du noyau de flou, élément fondamental et primordial de la problématique aveugle.

Précisons que, dans [126], il est proposé une reformulation du modèle ci-dessus comme un problème d'espace d'échelle inverse. Les méthodes d'espace d'échelle consistent globalement à lisser les petites caractéristiques plus rapidement que les grandes par un modèle d'équation d'évolution en temps. Les mêmes limitations que dans l'approche variationnelle s'appliquent cependant également, dans la mesure où la modélisation en elle-même ne change aucunement.

3.4.2 Approches paramétriques

Dans [13], il est proposé un modèle qualifié de « semi-aveugle » qui fait l'hypothèse que l'on ne connaît pas précisément la fonction de dispersion, mais uniquement à quelle classe de fonctions paramétriques elle appartient, en l'occurrence à celle des noyaux gaussiens, paramétrables par un unique paramètre. La technique se base de nouveau sur le modèle de Chan et Wong [40]. Les auteurs choisissent d'utiliser un terme de régularisation de type Mumford-Shah pour l'image, ce qui permet de résoudre simultanément le problème de segmentation (soit de partitionnement de l'image) et de restauration. Le principe de Γ -convergence [6]¹¹ est appliqué pour l'approximation discrète. Le modèle variationnel considéré est alors

$$\min_{f,v,\sigma} \frac{1}{2} \int_{\Omega} (h_{\sigma} * f - g)^2 + G_{\epsilon}(f,v) + \gamma \int_{\Omega} |\nabla h_{\sigma}|^2 , \quad (2.72)$$

où σ est le paramètre du flou, et $G_{\epsilon}(f,v)$ l'opérateur de régularisation défini par

$$G_{\epsilon}(f,v) = \beta \int v^2 |\nabla f|^2 + \alpha \int \left(\epsilon |\nabla v|^2 + \frac{(v-1)^2}{4\epsilon} \right) . \quad (2.73)$$

Ici, ϵ est le paramètre assurant la Γ -convergence, qui doit être choisi proche de zéro pour que celle-ci soit vérifiée, et v l'opérateur donnant une approximation de la carte des discontinuités de l'image. Ces aspects seront précisés plus loin dans le Chapitre 4, où une approche similaire sera mise en œuvre. Cette fonctionnelle est minimisée de manière alternée par rapport à f , v et σ , en utilisant les conditions d'Euler-Lagrange, avec des conditions aux bords de type Neumann. À chaque étape de la procédure itérative, on minimise donc par rapport à une fonction en gardant les deux autres fixées.

Chen et Yap ont proposé dans [48] une approche basée sur [213], qualifiée de déconvolution par double régularisation paramétrique, visant à minimiser l'expression

$$\mathcal{J}(\mathbf{f}, \mathbf{h}) = \frac{1}{2} \|H\mathbf{f} - \mathbf{g}\| + \mathcal{R}(\mathbf{f}, \mathbf{h}) + \mathcal{S}(\mathbf{f}, \mathbf{h}) . \quad (2.74)$$

11. Ces notions seront explicitées au Chapitre 4.

$\mathcal{R}(\mathbf{f}, \mathbf{h})$ représente ici une fonctionnelle de régularisation qui introduit de la stabilité dans la solution en imposant des contraintes de douceur sur l'image et la fonction de dispersion. Elle est définie par

$$\mathcal{R}(\mathbf{f}, \mathbf{h}) = \frac{1}{2} \|\Lambda \Delta \mathbf{f}\|^2 + \frac{1}{2} \|\Psi \Delta \mathbf{h}\|^2, \quad (2.75)$$

où Δ est l'opérateur laplacien (passe-haut) standard, comme utilisé par You et Kaveh, et Λ et Ψ sont des matrices de régularisation adaptatives qui ont deux buts :

1. assigner des paramètres de régularisation spatialement variants à différentes régions de l'image pour encourager la préservation des détails dans les régions texturées, et supprimer le bruit dans les zones lisses ;
2. fournir un compromis entre la fidélité aux données et la fidélité au modèle.

$\mathcal{S}(\mathbf{f}, \mathbf{h})$ représente lui un terme de modélisation paramétrique pour l'image et le flou. Il joue le rôle d'un terme de renforcement d'apprentissage pour intégrer une structure paramétrique potentiellement utile de l'image et du flou. La plupart des flous satisfont en effet à une certaine forme de structure paramétrique, du moins en théorie. Ce terme a donc la forme

$$\mathcal{S}(\mathbf{f}, \mathbf{h}) = \frac{1}{2} \|\Gamma(\mathbf{h} - \mathbf{h}_f)\|^2 \quad (2.76)$$

où \mathbf{h}_f est un estimateur pour le flou, et Γ une matrice diagonale qui assigne différentes emphases basées sur des différences relatives entre \mathbf{h} et \mathbf{h}_f .

La procédure d'optimisation est basée, comme pour les modèles précédents, sur l'algorithme classique de minimisation alternée.

3.5 Méthodes de filtrage adaptatif

Plusieurs méthodes basés sur des techniques de filtrage adaptatif ont également été proposés afin de traiter le problème de déconvolution aveugle. Une des plus connues parmi celles-là est peut-être la méthode NAS-RIF (angl. *Nonnegativity And Support constraints Recursive Inverse Filtering*) développée par Kundur et Hatzinakos [108]. Celle-ci peut être rapprochée de la technique de déconvolution aveugle itérative d'Ayers et Dainty, et cherche à minimiser une fonctionnelle, en mettant à jour à chaque étape un filtre de restauration w (inverse du noyau de dégradation donc), qui est convolué avec g afin de fournir l'estimée de f . Contrairement aux approches de double régularisation évoquées ci-dessus, on ne minimise donc pas ici par rapport à h , mais par rapport à son inverse. La fonction coût utilisée comprend les mêmes contraintes que l'algorithme d'Ayers-Dainty, excepté pour ce qui est des contraintes sur la fonction de dispersion. Celle-ci doit ici seulement être d'inverse absolument sommable. Comme pour un grand nombre d'approches, le gros défaut de cette méthode est néanmoins qu'elle ne soit applicable qu'à des images à support fini, c'est-à-dire entièrement incluses dans un fond uniforme noir. Elle n'est donc pas utilisable en l'état pour notre problématique et sera plutôt réservée à des domaines tels que l'observation spatiale ou la microscopie.

Dans [140], il est proposé une variante de l'algorithme NAS-RIF, reprenant globalement le même concept, mais y appliquant un principe de régularisation, rendant la technique (qui, on le rappelle, était à la base seulement régularisée par un arrêt des itérations de la méthode) plus robuste au bruit. Une première régularisation est effectuée par un principe de troncature des valeurs propres sur le filtre inverse estimé, tandis qu'une seconde possibilité est introduite, permettant d'utiliser un schéma de régularisation par

minimisation de la variation totale de l'image. Bien qu'améliorant le schéma initial de Kundur et Hatzinakos, celui-ci reste quand même très sensible à l'initialisation du filtre, rendant en ce sens l'algorithme délicat à utiliser en pratique.

Un certain nombre d'autres approches peuvent être vues comme des variantes de l'algorithme NAS-RIF. On pourra citer à titre d'exemple [174], qui propose la construction itérative d'un filtre inverse, par utilisation de diverses contraintes (entre autre de non-négativité), ou encore [52], qui utilise l'information de la transformée de Radon des bords de l'image pour mettre en œuvre une banque de filtres de déconvolution, résultant en une technique appelée algorithme de type « Bussgang », efficace apparemment surtout pour des observations multiples de la même scène, bien que, en théorie, l'approche puisse fonctionner avec une seule image.

Une approche autorégressive adaptative plus originale a été publiée par Vural et Sethares dans [199, 200]. Celle-ci se base sur la minimisation d'un critère de dispersion, qui est défini, pour une image f , par

$$\gamma = \frac{\mathbb{E}\{f^4\}}{\mathbb{E}^2\{f^2\}}, \quad (2.77)$$

où \mathbb{E} est l'espérance mathématique. Le critère à minimiser est issu des techniques de séparation aveugle de source et s'écrit

$$\mathcal{J}(f) = \frac{1}{4} (f^2 - \gamma)^2. \quad (2.78)$$

En notant que l'estimée \tilde{f} de f est donnée par $\tilde{f} = \mathbf{w}^T \mathbf{g}$, où \mathbf{w} est le filtre adaptatif de déconvolution (soit le filtre inverse de h), et en utilisant le fait que

$$\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \mathbf{w}} = \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \tilde{f}} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \mathbf{w}} = [\tilde{f}^2 - \gamma] \tilde{f} \mathbf{g}, \quad (2.79)$$

on obtient alors le schéma itératif suivant sur \mathbf{w} ,

$$\mathbf{w}_{i+1} = \mathbf{w}_i - \mu \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \mathbf{w}_i}, \quad (2.80)$$

où μ est une constante petite (à fixer), garantissant la stabilité de l'algorithme.

3.6 Méthodes basées sur l'analyse en composantes indépendantes

Le principe de l'analyse en composantes indépendantes (ICA) pour le problème de déconvolution a été introduit par Umeyama dans [190]. Cette technique est basée sur l'utilisation d'une banque de filtres de Gabor 2D, appliquée à l'image floue g observée. Les images en sortie de ces filtres, de même que l'image dégradée originale sont alors soumises à une analyse en composantes indépendantes. Cette analyse est menée en utilisant un algorithme de gradient stochastique, et, en sélectionnant de manière appropriée un paramètre d'apprentissage, l'ICA estime l'image déflouée comme étant la première composante indépendante, quand celle-ci provient d'une scène naturelle¹².

Cette approche a été reprise par Kopriva *et al.* [106], car Umeyama suppose une condition critique qui est que l'image source et ses dérivées spatiales doivent être statistiquement indépendantes. Or ceci n'est pas vrai en général. La qualité de l'image restaurée par la méthode d'Umeyama dépend donc surtout du niveau auquel chaque image traitée

12. On remarquera le lien entre cette technique et celle de [117] présentée dans la Section 2.1.5, p. 30.

vérifie cette condition d'indépendance statistique. Kopriva *et al.* montrent que le problème de déconvolution aveugle d'une image unique peut être formulé en tant que problème de factorisation de matrice non-négative, avec des contraintes de caractère creux (angl. *sparseness*) imposées.

Dans [105], il a été proposé une nouvelle extension se basant sur l'analyse en composantes indépendantes par décomposition en sous-bandes (par ondelettes), technique issue d'approches utilisées en séparation de sources statistiquement dépendantes. Une méthode pour résoudre ce type de problèmes est de relâcher la contrainte d'indépendance statistique et de supposer que les signaux à bande large sont dépendants, mais qu'il existe des sous-bandes plus étroites pour lesquels ils sont indépendants. L'avantage de cette approche par rapport à celle de la factorisation matricielle non-négative de [106] est que l'on évite alors des problèmes potentiels associés à la non-unicité de la décomposition matricielle et à la sélection des contraintes de caractère creux. Une fois la sous-bande avec les composantes les moins dépendantes identifiées, l'algorithme de décomposition en composantes indépendantes peut être utilisé pour obtenir soit une estimation de l'inverse de la matrice base, ou une estimation de la matrice base elle-même.

3.7 Méthodes diverses

Comme pour le cas des méthodes à estimation du flou a priori, il existe dans le cadre de la déconvolution à identification jointe de nombreuses autres approches présentant des degrés divers d'originalité et/ou de performances réelles. On pourra citer à titre indicatif les méthodes basées sur l'apprentissage et l'intelligence artificielle, tel que l'algorithme d'évolution présenté dans [72], ou encore les méthodes prenant en compte des sources multiples de la même image nette à des fins de restauration plus performante. Dans ce dernier domaine, on citera les travaux de Šroubek [165] qui font référence dans le domaine, et par exemple [148] qui présente une méthode spécialisée pour le traitement des flous de mouvement.

3.8 Méthodes pour les images couleurs

Nous avons décrit dans ce qui précède des méthodes aveugles basées sur un traitement monocanal. Dans le cas de la déconvolution des images en couleurs, ces méthodes peuvent être appliquées en séparant les canaux couleurs, afin de les traiter indépendamment, puis on peut reconstituer l'image en recombinant les trois canaux restaurés.

Un des points essentiels de ce genre d'approche est de voir si le fait de considérer des canaux indépendants n'est pas une hypothèse abusive introduisant divers artefacts ou autres défauts dans la phase de recombinaison. On verra qu'il existe cependant des approches fonctionnant avec un traitement réellement multicanal.

On notera que l'ensemble des techniques décrites dans ce qui va suivre sont variationnelles. Comme vu précédemment, ces méthodes sont les plus utilisées en déconvolution aveugle et ont donné lieu à une abondante littérature ces dernières années. Rappelons que l'on entend généralement par « techniques variationnelles » l'ensemble des méthodes qui rapportent le problème de déconvolution aveugle à la minimisation d'une fonctionnelle.

Redonnons le modèle linéaire général traditionnel d'images couleurs dégradées dans le

système RGB/RVB :

$$g_j = \sum_{i=R,V,B} h_{ij} * f_i + b_i \quad \text{avec } j = R,V,B . \quad (2.81)$$

Le flou appelé « intracanal » h_{ii} domine en général le flou $h_{ij;i \neq j}$ dénommé « intercanal », c'est-à-dire que $h_{ii} \gg h_{ij}$. Sous forme aveugle, nous devons donc estimer les f_i connaissant les g_j (pour $i,j = R,V,B$).

Il est très important de noter que l'extension « naturelle » des méthodes de déconvolution monochrome à la couleur (ou aux images multicanales de manière générale) ne peut pas, dans la plupart des cas, donner de résultats très satisfaisants, dans la mesure où les relations entre canaux ne sont pas considérées. Ces approches consisteraient en effet alors à traiter chaque canal indépendamment des deux autres, avec des risques élevés d'apparition d'artefacts chromatiques et autre mauvais alignements des discontinuités dans chaque composante couleur.

3.8.1 Méthodes basées sur l'utilisation des ondelettes

Dans [86], He *et al.* proposent une méthode de résolution du problème de déconvolution aveugle des images en couleurs, en utilisant une décomposition en ondelettes dans un cadre variationnel.

Les auteurs notent que des méthodes telles que celle présentée ci-dessus n'exploitent que la corrélation spatiale des canaux, et que ceci résulte en des artefacts de couleur et autres distorsions. Ils proposent pour remédier à cela d'utiliser une combinaison d'algorithmes SISO (angl. *Single Input Single Output*) et SIMO (angl. *Single Input Multiple Output*).

Une décomposition discrète en ondelettes est effectuée sur chaque membre de l'équation (2.81). La raison donnée est que, puisqu'il existe des caractéristiques différentes de corrélation spectrale dans les différentes sous-bandes, il faut les traiter différemment. On obtient donc

$$\left\{ \begin{array}{l} g_j^{LL} = \sum_{i=R,V,B} h_{ij} * f_i^{LL} \\ g_j^{LH} = \sum_{i=R,V,B} h_{ij} * f_i^{LH} \\ g_j^{HL} = \sum_{i=R,V,B} h_{ij} * f_i^{HL} \\ g_j^{HH} = \sum_{i=R,V,B} h_{ij} * f_i^{HH} \end{array} \right. \quad (2.82)$$

où H signifie ici *high (frequency)*, et L *low (frequency)*; notations classiques pour la décomposition en ondelettes.

La déconvolution de la sous-bande LL passe par l'utilisation d'un modèle SISO. Pour cela, la technique de double régularisation présentée dans [48] est utilisée, et la fonction coût traitée est alors

$$\mathcal{J}(f_R, f_V, f_B, h_{RR}, h_{VV}, h_{BB}) = \sum_{i=R,V,B} \mathcal{J}_i(f_i, h_i i) , \quad (2.83)$$

où

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_i(f_i, h_{ii}) = & \frac{1}{2} \sum_{\Omega} \left[g_i - \tilde{f}_i * \tilde{h}_{ii} \right]^2 + \frac{1}{2} \lambda_i \mathcal{R}_f \sum_{\Omega} \left[\sum_{j=R,V,B} q_{ij} * \tilde{f}_i \right]^2 + \\ & \frac{1}{2} \gamma_i \mathcal{R}_h \sum_{D_i} \left[p * \tilde{h}_{ii} \right]^2 + \frac{1}{2} \beta_i \sum_{D_i} \left[\tilde{h}_{ii} - h_f \right]^2. \quad (2.84) \end{aligned}$$

Le premier terme représente la fidélité aux données. Les second et troisième sont des fonctions de régularisation introduisant des contraintes de douceur sur l'image et la fonction de dispersion. Le quatrième terme est un « terme d'apprentissage paramétrique doux » qui vise à estimer la structure paramétrique du flou h_f (voir [46]). q_{ij} est un opérateur passe-haut laplacien 3D pour l'image, p un opérateur du même type en 2D pour le flou, \mathcal{R}_f et \mathcal{R}_h des matrices de régularisation adaptative qui encouragent la préservation des détails.

La déconvolution des sous-bandes (*SB*) de détails passe elle par un modèle SIMO. En raison de la très forte interaction intercanal dans les images naturelles, l'hypothèse simplificatrice sur les sous-bandes, stipulant que les fréquences de détails sont les mêmes dans chaque canal, est faite. C'est-à-dire qu'il est considéré que $f_R^{SB} = f_V^{SB} = f_B^{SB}$. L'estimation des sous-bandes se fait en réduisant le modèle MIMO du départ à trois modèles SIMO, obtenus par la décomposition en ondelettes et en examinant le fait que les hautes fréquences des trois canaux sont presque identiques. La déconvolution est alors effectuée par utilisation d'une méthode basée sur les vecteurs propres (EVAM : [165]).

Une fois les sous-bandes de détails estimées, on les combine avec la sous-bande *LL* estimée pour synthétiser l'image couleur.

Les expérimentations effectuées par les auteurs montrent des résultats clairement supérieurs à ceux obtenus par Chow [51] (voir section suivante) avec de simples modèles SISO (c'est-à-dire une déconvolution monocomposante sur chaque canal). Pour cela, l'évaluation des images restaurées a été menée à la fois visuellement, et grâce aux indicateurs de NMSE et PSNR. L'approche est intéressante et originale, bien que le réglage d'un certain nombre de paramètres et la définition de certains opérateurs ne soient pas précisés par les auteurs. C'est une des rares méthodes à prendre en compte un éventuel flou intercanal, mais ceci ne semble pas être d'un apport essentiel dans les résultats obtenus. En outre, ces derniers sont assez lacunaires pour être réellement significatifs.

3.8.2 Méthode basée sur la double régularisation symétrique

Dans [51], Chow, Li et Ng utilisent une double régularisation, comme dans le modèle introduit par You et Kaveh dans le cadre de l'imagerie monocanal [212], pour la résolution d'un problème de déconvolution aveugle multicanal. Les auteurs prennent en compte seulement le cas où $h_{ij} = 0$ avec $i \neq j$, dans (2.81).

Leur méthode propose de minimiser une fonctionnelle qui consiste en une mesure de l'erreur de restauration dans chaque canal de l'image, et de deux termes de régularisation. Une stratégie d'optimisation par gradient-conjugué de type minimisation alternée est mise en œuvre.

La fonctionnelle à minimiser est donnée par

$$\mathcal{J}(\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_N, \tilde{h}_{11}, \dots, \tilde{h}_{NN}) = \sum_{i=1}^N \mathcal{J}_i(\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_N, \tilde{h}_{ii}), \quad (2.85)$$

où

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_i(\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_N, \tilde{h}_{ii}) &= \frac{1}{2} \sum_{\Omega} [g_i - \tilde{f}_i * \tilde{h}_{ii}]^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \lambda_i \sum_{\Omega} \left[\sum_{j=1}^N c_{ij} * \tilde{f}_j \right]^2 + \frac{1}{2} \gamma_i \sum_{D_i} [a * \tilde{h}_{ii}]^2, \end{aligned} \quad (2.86)$$

où N est le nombre de canaux de l'image (donc $N = 3$ pour les images couleurs). Les contraintes sont au nombre de trois, et données pour la première par

$$0 \leq \min_i \leq \tilde{f}_i(x,y) \leq \max_i \leq \infty, \quad (x,y) \in \Omega. \quad (2.87)$$

Il s'agit d'une contrainte de non-négativité et de finitude de l'intensité de la luminance. Les autres contraintes posées sont

$$\sum_{D_i} \tilde{h}_{ii} = 1, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2.88)$$

et

$$\tilde{h}_{ii} \geq 0 \quad \in D_i \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (2.89)$$

Ce problème est non-convexe. Une stratégie de minimisation alternée est appliquée pour sa résolution ; plus particulièrement celle de Biemond *et al.* [18], en utilisant une procédure d'optimisation sous contraintes itérative. Notons que la régularisation classique de Tihonov est utilisée, mais est différente suivant que l'on traite l'image ou le flou.

La méthode est aujourd'hui obsolète, de par son utilisation d'une régularisation quadratique (ne préservant donc pas les discontinuités), et de son approche fondamentale, qui traite les canaux indépendamment les uns des autres. Elle semble largement dépassée par une méthode telle que celle de He *et al.* [86] par exemple.

3.8.3 Méthode utilisant la régularisation de Beltrami

Dans [98], il est proposé une approche très intéressante de déconvolution d'images multicanal, basée sur la géométrie différentielle. Il est montré qu'une régularisation de type Beltrami donne de meilleurs résultats qu'en utilisant la classique variation totale (voir également pour cela [186]).

Le modèle considéré est le suivant : $g_i = h * f_i + b$, avec $i = R, V, B$ et b un bruit blanc gaussien de moyenne nulle et variance σ .

Les auteurs utilisent le cadre de Beltrami, selon lequel une image couleur est une surface de \mathbb{R}^5 , avec les coordonnées (x, y, u_R, u_V, u_B) . Une métrique est introduite pour mesurer les distances sur ces surfaces, et la minimisation de « l'action de Polyakov » mène à l'opérateur de Beltrami. Dans un espace euclidien, cette action de Polyakov mesure en fait l'aire de la surface. La minimiser rend l'image plus lisse, et fait que ses canaux couleurs s'alignent. Ceci étant - comme déjà dit - bien plus efficace que des techniques

considérant ces canaux comme indépendants.

Le problème de minimisation à résoudre est

$$\min_{f_i, h} \mathcal{J}(f, h) = \min_{f_i, h} \left\{ \frac{1}{2} \sum_i \|h * f_i - g_i\|^2 + \alpha_1 \mathcal{A}(f_i) + \alpha_2 \mathcal{A}(h) \right\}, \quad (2.90)$$

où \mathcal{A} est l'action de Polyakov, définie par

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(f_i) &= \int \sqrt{\det G_{RVB}} \\ &= \int \sqrt{1 + \beta^2 \sum_i |\nabla f_i|^2 + \frac{1}{2} \beta^4 \sum_{i,j} \langle \nabla f_i, \nabla f_j \rangle^2} \end{aligned} \quad (2.91)$$

et

$$\mathcal{A}(h) = \int \sqrt{\det G_h} = \int \sqrt{1 + \beta^2 |\nabla h|^2}, \quad (2.92)$$

avec

$$G_{RVB} = \begin{pmatrix} 1 + \beta^2 \sum_i (f_i^x)^2 & \beta^2 \sum_i f_i^x f_i^y \\ \beta^2 \sum_i f_i^x f_i^y & 1 + \beta^2 \sum_i (f_i^y)^2 \end{pmatrix}, \quad (2.93)$$

où β est un paramètre et les indices ou exposants x et y représentent la dérivation, et

$$G_h = \begin{pmatrix} 1 + \beta^2 h_x^2 & \beta^2 h_x h_y \\ \beta^2 h_x h_y & 1 + \beta^2 h_y^2 \end{pmatrix}. \quad (2.94)$$

Pour ce qui est des résultats obtenus par les auteurs, les images sont bien restaurées, bien qu'il n'y ait pas de comparaison avec d'autre méthode. L'algorithme a montré être robuste et converger rapidement (en quelques itérations). Divers types de flou ont été testés : défocalisation, mouvement, et gaussien, avec ajout d'un bruit blanc gaussien. Les bords dans les images restaurées sont bien nets et le bruit invisible. Le flou est bien estimé, bien qu'il ait été considéré à un niveau relativement faible. La restauration basée sur le principe de Beltrami introduit un couplage entre les couleurs non seulement au niveau du paramètre de régularisation, mais aussi à travers l'opérateur de régularisation. De ce fait, les comparaisons avec la régularisation TV font apparaître la supériorité de l'approche de Beltrami pour de petits noyaux.

L'évaluation des images et flous reconstruits a été menée par les auteurs via l'analyse du PSNR et du contenu visuel des scènes. Le niveau de flou n'est pas précisé, mais est relativement faible. Il est donc délicat d'être catégorique quant aux possibilités réelles de reconstruction de noyaux de flou plus importants. L'approche semble cependant intéressante de par le type de régularisation utilisé sur l'image.

3.9 Synthèse sur les méthodes d'identification jointe

Nous avons présenté dans ce qui précède un aperçu des différentes catégories de méthodes de déconvolution aveugle fonctionnant suivant le principe d'identification jointe de l'image restaurée et du noyau de flou.

Parmi les possibilités qui s'offrent à nous, nous avons choisi d'étudier dans le chapitre suivant une méthode de déconvolution monicanale basée sur les travaux de Chan et Wong. Ceci en raison de l'aspect relativement « classique » de leur approche, souvent utilisée dans des comparatifs de techniques, et également en raison du fait que des algorithmes

de minimisation évolués et bien adaptés existent pour traiter ce modèle, qui préserve les discontinuités des images.

Devant le peu d'approches spécifiquement destinées à la déconvolution des images couleurs, nous nous tournons vers la méthode de Kaftory *et al.*, utilisant la régularisation de Beltrami, qui nous paraît intéressante. Cependant, les images testées sont dégradées avec des flous légers qui ne permettent pas de présumer de l'efficacité de la technique sur des images plus fortement dégradées, telles que celles que nous envisageons de traiter. Nous avons donc mis en œuvre une technique propre, inspirée de celle-ci, et de celle qui sera développée dans le chapitre suivant pour les images monochromes. Cette approche couleur propre sera présentée dans le Chapitre 5.

4 Synthèse globale

Un état de l'art des méthodes récentes en déconvolution d'images a été effectué ici. Celui-ci nous permet d'avoir un aperçu global des techniques existantes et de pouvoir en retirer les plus performantes. Il nous permet également de dégager un certain nombre de pistes à explorer.

Nous nous sommes appliqués pour chaque groupe à analyser les algorithmes permettant de traiter d'un côté les images monocanales (telles que les images en échelle de gris), et d'un autre côté les images multicanales, parmi lesquelles les images couleurs nous intéressent particulièrement.

Il ressort de cela, et de par les informations dont nous disposons quant aux dégradations affectant les images acquises par un aéronef en vol pour le cadre de notre application, que les méthodes les plus intéressantes à considérer rentrent dans la catégorie des approches d'identification jointe, et plus particulièrement des méthodes variationnelles. En effet, ce sont quasi exclusivement les seules qui permettent une résolution du problème aveugle.

Des opérateurs de régularisation et convexes et non-convexes, tels que variation totale et Mumford-Shah, seront utilisés dans les deux prochains chapitres. Ils seront couplés à une approche adaptée au type d'image et aux informations sur le modèle de dégradation dont nous disposons. Les phases de test comporteront ensuite des résultats sur images simulées, contenant des caractéristiques géométriques et/ou colorimétriques se rapportant à des éléments que l'on peut chercher à visualiser plus en détail, puis sur des images aériennes acquises en vol.

Chapitre 3

Déconvolution aveugle à double régularisation à variation totale

1 Introduction

Ce chapitre vise à étudier une première méthode de déconvolution aveugle, basée sur un modèle spécifique, pour des images en niveaux de gris. Notre but est de tester l'applicabilité de cette approche à notre problématique. Pour cela, nous nous intéressons particulièrement au compromis obtenu entre la qualité effective de restauration des images, par rapport au coût de calcul nécessaire. De même, nous souhaitons étudier la complexité de réglage des différents paramètres et variables de l'approche, ce qui en est un aspect fondamental. En effet, une méthode facilement utilisable ne doit pas nécessiter que sa performance soit fortement tributaire d'un trop grand nombres de variables, d'autant moins si le réglage de ces variables s'avère délicat.

Nous allons envisager une méthode basée sur le principe de double régularisation¹, dans laquelle les deux objets image et flou seront régularisés à l'aide de la variation totale (TV). Cela a été originellement proposé en 1998 par Chan et Wong dans [40]. L'idée derrière l'utilisation de cette régularisation par variation totale est la préservation des discontinuités de l'image et du noyau lors du processus de reconstruction.

Nous allons mettre en évidence que, dans la plupart des cas, et surtout quasi systématiquement pour les images « non-synthétiques », l'approche à double régularisation TV, telle qu'elle a été mise en œuvre par Chan et Wong, ne fonctionne pas de manière satisfaisante. Nous allons montrer que deux groupes d'images doivent être soigneusement traités de manière différenciée : celui des images à fond noir, et celui des autres images. Pour le cas des images à fond noir (qui malheureusement ne relève que d'un nombre limité d'applications réelles hors de l'astronomie et de la microscopie), l'algorithme originel proposé par Chan et Wong « peut » globalement fonctionner. « Peut » seulement, car ce bon fonctionnement est conditionné à un réglage judicieux d'un certain nombre de paramètres. Pour le cas des images sans fond noir, en revanche, aucun exemple probant de déconvolution n'avait étonnamment été présenté par Chan et Wong dans leur article. Quant aux tentatives initiales de restauration effectuées par nos soins, toujours sur ce type d'images sans fond noir, elles se sont avérées être infructueuses.

Notre contribution essentielle dans le présent chapitre a donc été de proposer, et de mettre en œuvre, une adaptation du schéma de déconvolution de Chan et Wong, adapta-

1. Cf. Chapitre 2, Section 3.4.

tion permettant une déconvolution efficiente des images ne comportant pas nécessairement de fond noir, et donc applicable à des images naturelles pouvant rentrer dans notre champ d'application.

Nous allons, dans ce qui suit, tout d'abord donner - ou rappeler - les définitions des outils utilisés dans cette approche. Nous rappellerons des aspects mathématiques de la semi-norme TV, et comment l'appliquer au cas de données discrètes. Nous reviendrons alors sur l'approche telle que présentée par Chan et Wong, de même que nous donnerons des détails sur l'algorithme utilisé pour la minimisation de la fonctionnelle associée. Nous donnerons d'abord des éléments de discréétisation, avant de passer au schéma de minimisation proprement dit. Dans celui-ci, nous mettrons en exergue les points problématiques de la mise en œuvre de Chan et Wong, et proposerons des améliorations. Celles-ci concerteront entre autre les contraintes utilisées lors de la reconstruction itérative, de même que la façon de les traiter. Sur ce schéma amélioré, nous évaluerons l'importance de chacun des paramètres sous-jacents, et fournirons, en liaison avec les expérimentations, une approche de réglage. Ces expérimentations seront menées sur plusieurs images, avec différents noyaux de flou, et auront pour but d'être représentatives des cas de déconvolution pouvant survenir dans notre application. Nous présenterons tout d'abord des essais ayant pour but de vérifier le comportement intrinsèque de la méthode, puis des tests comparatifs visant à la confronter avec des techniques d'état de l'art.

2 Définition et principe de la régularisation TV

Beaucoup de méthodes de déconvolution classiques utilisant la régularisation à variation totale (TV) sont apparues depuis quelques années (par exemple [21, 37, 53, 166]). Leur intérêt, comme nous l'avons déjà dit, est de ne pas trop fortement pénaliser les sauts ou grandes variations de niveau de gris dans l'image régularisée reconstruite. En effet, une image - tout du moins une image naturelle - n'est en général pas totalement lisse, mais comporte de grandes zones uniformes (en intensité), séparées par de brusques discontinuités. L'utilisation de la variation totale, et de manière plus globale, de termes de régularisation non-quadratiques, permet d'éviter un lissage de ces discontinuités en même temps que le lissage du bruit à l'inversion de H . C'est le problème qui est rencontré lorsque l'on utilise la régularisation H^1 , qui introduit des contraintes trop fortes globalement sur l'image à restaurer, ceci résultant en une image jamais totalement déflouée, c'est-à-dire jamais totalement nette.

La fonctionnelle de variation totale est en fait une mesure générale de la taille accumulée des sauts dans une image. Considérons $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ un domaine borné et une fonction $f = f(x,y)$ appartenant à $L^1(\Omega)$. Si f est lisse, alors sa variation totale est définie par

$$\text{TV}(f) = \int_{\Omega} |\nabla f|. \quad (3.1)$$

Une image (et plus généralement une fonction) f , telle que $\text{TV}(f) < \infty$ est dite être de « variation bornée » (angl. *bounded variation* : BV). Par rapport au terme de régularisation en $\int_{\Omega} |\nabla f|^2$, on autorise ici implicitement les dérivées partielles du gradient à prendre des valeurs plus importantes dans certaines régions de l'image. Ceci permet donc de grandes valeurs de ces dérivées partielles typiquement près des bords et autres discontinuités de l'image. On peut donc obtenir des images reconstruites avec des bords mieux définis, car les grandes valeurs des dérivées partielles associées aux bords ont une contribution moins forte dans la fonctionnelle à minimiser.

La question qui se pose alors est de savoir à quelle point la fonction f considérée doit être lisse pour que la définition (3.1) soit valable. À première vue, il semble que f doive appartenir à l'espace de Sobolev $W^{1,1}(\Omega)$, c'est-à-dire à l'espace des fonctions dont les dérivées partielles au premier ordre sont intégrables. Mais toute la puissance de l'espace BV et de la semi-norme TV en traitement d'images provient en fait justement de la relaxation de ces contraintes. C'est-à-dire que l'espace $BV(\Omega)$ est en fait bien plus large que $W^{1,1}(\Omega)$.

Du point de vue mathématique, le gradient de l'image $|\nabla f|$ doit être considéré au sens des distributions. Une extension de la représentation (3.1), valable même quand f n'est pas lisse, est donnée par

$$\text{TV}(f) = \sup_{\vec{v} \in \mathcal{V}} \int_{\Omega} f \operatorname{div} \vec{v}, \quad (3.2)$$

où \mathcal{V} consiste en les fonctions à valeurs vectorielles $\vec{v} = (v_1(x,y), v_2(x,y))$ dont la norme euclidienne est bornée par 1 et dont les composantes v_i sont continûment différentiables et s'estompent à la frontière du domaine Ω :

$$\mathcal{V} = \left\{ \vec{v} \in C_0^1(\Omega; \mathbb{R}^d), |\vec{v}(x)| \leq 1, \forall x \in \Omega \right\}. \quad (3.3)$$

On pourra remarquer que la formulation (3.2) peut être vue comme une forme faible de (3.1). En effet, en utilisant la représentation duale de la norme euclidienne $|\mathbf{x}| = \sup_{|\mathbf{y}| \leq 1} \mathbf{x}^T \mathbf{y}$ et en appliquant formellement une intégration par parties, on a

$$\int_{\Omega} |\nabla f| dx dy = \int_{\Omega} \sup_{|\vec{v}| \leq 1} \nabla f^T \vec{v} dx dy \quad (3.4)$$

$$= \sup_{|\vec{v}| \leq 1} \left[\int_{\partial\Omega} f \vec{v}^T \bar{n} dS - \int_{\Omega} f \operatorname{div} \vec{v} dx dy \right], \quad (3.5)$$

où $\partial\Omega$ est la frontière de Ω et \bar{n} la normale unité extérieure à $\partial\Omega$. Si \vec{v} est compactement supporté dans Ω , alors le terme d'intégration sur la frontière disparaît. Notons de plus que $|\vec{v}| \leq 1$ si et seulement si $|-\vec{v}| \leq 1$, de telle sorte que l'on peut éliminer le signe moins pour obtenir la formulation (3.2).

On verra en Section 4 comment passer à la version discrète de l'opérateur de variation totale.

3 Déconvolution par double régularisation TV

Nous rappelons que le modèle générique de double régularisation s'écrit

$$\mathcal{J}(f,h) = \int_{\Omega} \Phi(h * f - g) + \alpha_1 \mathcal{R}_1(f) + \alpha_2 \mathcal{R}_2(h), \quad (3.6)$$

où \mathcal{R}_1 et \mathcal{R}_2 sont deux opérateurs de régularisation, portant respectivement sur l'image et sur le noyau de flou. Ces opérateurs sont contrôlés par deux paramètres de régularisation α_1 et α_2 . Afin de minimiser une telle fonctionnelle, on peut commencer par appliquer les conditions d'optimalité d'Euler², ce qui nous amène à deux équations à résoudre, sur f et sur h , comme nous le verrons un peu plus loin.

2. Dites aussi d'Euler-Lagrange, ou encore du premier ordre.

Alors que You et Kaveh avaient proposé le modèle³

$$\min_{f,h} \mathcal{J}(f,h) = \min_{f,h} \frac{1}{2} \|h * f - g\|_{L^2}^2 + \alpha_1 \int_{\Omega} |\nabla f|^2 + \alpha_2 \int_{\Omega} |\nabla h|^2, \quad (3.7)$$

où la régularisation sans préservation des discontinuités⁴ de l'image et du noyau de flou se fait par utilisation de la semi-norme H^1 , Chan et Wong [40] ont proposé un modèle basé sur l'utilisation de la variation totale à la fois pour le terme de régularisation sur l'image et sur le flou⁵ :

$$\min_{f,h} \mathcal{J}(f,h) = \min_{f,h} \frac{1}{2} \|h * f - g\|_{L^2}^2 + \alpha_1 \int_{\Omega} |\nabla f| + \alpha_2 \int_{\Omega} |\nabla h|. \quad (3.8)$$

Nous avons choisi de nous intéresser au traitement de cette fonctionnelle, et avons mis en œuvre un algorithme de minimisation optimisé, amélioré, par rapport à celui de Chan et Wong, bien que basé sur leurs propres travaux, de même que sur ceux de Vogel et Oman [195, 197], qui ont étudié la minimisation du problème de déconvolution simple (i.e. à flou h connu) avec régularisation TV⁶

$$\min_f \mathcal{J}(f) = \min_f \frac{1}{2} \|h * f - g\|_{L^2}^2 + \alpha_1 \int_{\Omega} |\nabla f|. \quad (3.9)$$

L'approche de Vogel et Oman s'est révélée être dans la littérature une solution rapide et efficace, basée sur un algorithme de minimisation de type quasi-Newton⁷, et nous a donc paru très pertinente.

Notons de nouveau qu'un tel modèle a également été envisagé par Money et Kang [135]⁸, avec un terme d'attache aux données soit en norme L^1 , soit en norme L^2 . Ces auteurs ont procédé de manière un peu différente dans leur approche, par rapport à ce qui était fait par Chan et Wong, non pas de manière itérative, mais en résolvant une unique fois les équations d'Euler associées au problème de minimisation

$$\min_{f,h} \mathcal{J}(f,h) = \min_{f,h} \frac{1}{p} \int_{\Omega} |h * f - g|^p + \alpha_1 \int_{\Omega} |\nabla f| + \alpha_2 \int_{\Omega} |\nabla h|, \quad (3.10)$$

dans lequel $p = 1$ ou $p = 2$. Ces équations issues des conditions d'optimalité d'Euler étant alors équivalentes à traiter les deux sous-problèmes

$$\min_h \mathcal{J}_1(h) = \min_h \frac{1}{p} \int_{\Omega} |h * f_r - g|^p + \alpha_2 \int_{\Omega} |\nabla h| \quad (3.11)$$

pour l'estimation du noyau h à partir d'une image de référence f_r , et ensuite

$$\min_f \mathcal{J}_2(f) = \min_f \frac{1}{p} \int_{\Omega} |h * f - g|^p + \alpha_1 \int_{\Omega} |\nabla f| \quad (3.12)$$

afin de reconstruire l'image nette à partir du flou h estimé.

Cette approche sera mise en concurrence avec notre schéma amélioré en fin de chapitre.

3. Équation (2.68), Chapitre 2, Section 3.4.1, p. 50.

4. Voir Chapitre 2, Section 2.2.1, et plus particulièrement le paragraphe « Méthodes avec prise en compte des discontinuités ».

5. Équation (2.69), Chapitre 2, Section 3.4.1, p. 50.

6. Initialement proposé par Rudin *et al.* [166, 167].

7. Cf. Annexe B.

8. Cf. Chapitre 2, Section 2.1.5, p. 31

4 Discrétisation de l'opérateur de régularisation TV

Nous avons utilisé une méthode de discrétisation du problème basée sur l'utilisation de différences finies, comme suggéré dans [197] et [195].

Considérons l'opérateur de régularisation TV sur l'image, que nous notons donc \mathcal{R}_1 . En variable continue, on a

$$\mathcal{R}_1(f) = \text{TV}(f) = \int_{\Omega} |\nabla f|. \quad (3.13)$$

Cette représentation n'étant pas adaptée pour une mise en œuvre avec des méthodes d'optimisation standards, en raison de la non-différentiabilité à l'origine de la norme euclidienne, nous utilisons l'approximation

$$\mathcal{R}_1^{\beta}(f) = \int_{\Omega} \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \beta^2}, \quad (3.14)$$

où β est une « petite » constante.

Nous montrons dans ce qui suit comment passer à une formulation discrète de cet opérateur de régularisation, de même que pour son gradient⁹. On suppose que $f = f_{i,j}$, qui est dorénavant une matrice de niveaux de gris, est définie sur une grille régulière en deux dimensions $\{(x_i, y_j) | x_i = i\Delta x, y_j = j\Delta y, i = 0, \dots, n_x, j = 0, \dots, n_y\}$. On définit la fonctionnelle de pénalisation discrète $\mathcal{R}_1 : \mathbb{R}^{(n_x+1) \times (n_y+1)} \mapsto \mathbb{R}$ par

$$\mathcal{R}_1(f) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n_x} \sum_{j=1}^{n_y} \psi \left((D_{ij}^x f)^2 + (D_{ij}^y f)^2 \right), \quad (3.15)$$

où

$$D_{ij}^x f = \frac{f_{i,j} - f_{i-1,j}}{\Delta x} \quad (3.16)$$

et

$$D_{ij}^y f = \frac{f_{i,j} - f_{i,j-1}}{\Delta y} \quad (3.17)$$

avec

$$\psi(t) = 2\sqrt{t + \beta^2}. \quad (3.18)$$

Pour simplifier les notations, nous n'avons pas noté le facteur $\Delta x \Delta y$ du membre de droite de (3.15). En effet, celui-ci peut être absorbé dans le paramètre de régularisation α_1 .

On peut également écrire, en utilisant une représentation matricielle des D_{ij}^x et D_{ij}^y , que

$$\mathcal{R}_1(f) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n_x} \sum_{j=1}^{n_y} \psi \left(\left(f D_{n_y}^T \right)_{ij}^2 + (D_{n_x} f)_{ij}^2 \right), \quad (3.19)$$

9. Précisons que la discrétisation du terme de régularisation \mathcal{R}_2 portant sur le noyau de flou est obtenue de manière équivalente.

où la matrice D_\bullet est l'opérateur linéaire de taille $\bullet \times \bullet$ correspondant aux différences finies horizontales et verticales du premier ordre. Si l'on considère des conditions de bords périodiques, alors

$$D_\bullet = \begin{pmatrix} -1 & 1 & & & 0 \\ 0 & -1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & -1 & 1 \\ 1 & & & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (3.20)$$

et pour des conditions réflexives (ou de Neumann)

$$D_\bullet = \begin{pmatrix} -1 & 1 & & & \\ -1 & 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 0 & 1 \\ & & & -1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.21)$$

Le calcul du gradient de la fonctionnelle $\mathcal{R}_1(f)$ est alors donné d'après (3.15) par :

$$\frac{d}{d\tau} \mathcal{R}_1(f + \tau v)|_{\tau=0} = \sum_{i=1}^{n_x} \sum_{j=1}^{n_y} \psi'_{ij} \left[(D_{ij}^x f) (D_{ij}^x v) + (D_{ij}^y f) (D_{ij}^y v) \right] \quad (3.22)$$

où

$$\psi'_{ij} = \psi' \left((D_{ij}^x f)^2 + (D_{ij}^y f)^2 \right). \quad (3.23)$$

Notons à présent \mathbf{f} et \mathbf{v} les représentations vectorielles (en colonnes) obtenues par ordonnancement lexicographique des coefficients des matrices f et h . Soit D_x et D_y les matrices résultantes de taille $n_x n_y \times (n_x + 1)(n_y + 1)$, correspondant aux opérateurs (3.16) et (3.17). Soit $\text{diag}(\psi'(\mathbf{f}))$ la matrice diagonale, de taille $n_x n_y \times n_x n_y$, dont les coefficients sur la diagonale sont les ψ'_{ij} . Enfin, notons par $\langle ., . \rangle$ le produit scalaire euclidien sur $\mathbb{R}^{(n_x+1) \times (n_y+1)}$. Alors, on peut écrire :

$$\frac{d}{d\tau} \mathcal{R}_1(f + \tau v)|_{\tau=0} = \langle \text{diag}(\psi'(\mathbf{f})) D_x \mathbf{f}, D_x \mathbf{v} \rangle + \langle \text{diag}(\psi'(\mathbf{f})) D_y \mathbf{f}, D_y \mathbf{v} \rangle. \quad (3.24)$$

De ceci se déduit finalement une représentation du gradient sous la forme

$$\text{grad } \mathcal{R}_1(\mathbf{f}) = L(\mathbf{f}) \mathbf{f}, \quad (3.25)$$

où

$$\begin{aligned} L(\mathbf{f}) &= D_x^T \text{diag}(\psi'(\mathbf{f})) D_x + D_y^T \text{diag}(\psi'(\mathbf{f})) D_y \\ &= [D_x^T D_y^T] \begin{bmatrix} \text{diag}(\psi'(\mathbf{f})) & 0 \\ 0 & \text{diag}(\psi'(\mathbf{f})) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_x \\ D_y \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Comme nous l'avons dit, il en est exactement de même pour la discréttisation de l'opérateur de régularisation $\mathcal{R}_2(h)$ portant sur le noyau de flou.

5 Algorithme de minimisation

L'application des conditions d'optimalité de premier ordre à la fonctionnelle (3.8) donne¹⁰

$$\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial f} = \partial_f = (h * f - g) * h^* - \alpha_1 \operatorname{div} \left(\frac{\nabla f}{|\nabla f|} \right) = 0 \quad (3.27)$$

$$\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial h} = \partial_h = (h * f - g) * f^* - \alpha_2 \operatorname{div} \left(\frac{\nabla h}{|\nabla h|} \right) = 0. \quad (3.28)$$

Un schéma de minimisation alternée est ensuite utilisé : à chaque étape de l'algorithme, on minimise par rapport à une variable, en résolvant une des deux équations ci-dessus et en gardant l'autre variable fixée. Ceci en raison du fait que la fonctionnelle (3.8) n'est pas convexe de manière jointe par rapport à h et f , alors qu'elle l'est par rapport à chaque variable lorsque l'autre est fixée. L'algorithme général permettant de minimiser la fonctionnelle considérée est alors :

```

Initialiser  $f^0$  avec  $g$ , et  $h^0$  avec une impulsion de Dirac.
Pour  $n = 1$  à  $n = n_{\max}$  (indice de nombre d'itérations de minimisation alternée) :
    1. Résoudre (3.27) pour  $f$  (avec  $h$  fixe)
    2. Résoudre (3.28) pour  $h$  (avec  $f$  fixe)
Fin

```

Puisque la fonctionnelle en (3.8) est non-convexe, elle possède en théorie plus d'un minimiseur. La convergence de l'algorithme de minimisation alternée est donc très délicate. Celle-ci a été examinée, également par Chan et Wong, dans [41]. Les auteurs prouvent que l'algorithme discret converge vers un minimum local, et ce quelque soit la valeur initiale donnée. Cependant, seul le cas de la minimisation alternée avec contrainte de régularisation H^1 a été examiné. Ceci en raison de la forte non-linéarité de la semi-norme TV, avec laquelle l'analyse est beaucoup plus délicate. La question de la convergence du schéma alterné avec régularisation TV reste donc théoriquement ouverte, bien qu'en pratique, on ait constaté que l'algorithme converge toujours vers quelque chose, mais qui n'est cependant pas toujours l'image nette recherchée.

5.1 Algorithme de linéarisation de gradient par itération de point fixe

Les équations (3.27) et (3.28) sont toutes deux des équations aux dérivées partielles non-linéaires, en respectivement f et h . Nous les résolvons en utilisant une méthode itérative : le schéma de point fixe de Vogel et Oman [195–197]. L'idée derrière cet algorithme est de linéariser ces équations par point fixe, en utilisant une valeur « décalée », « en retard » d'une itération, des coefficients $\frac{1}{\nabla f}$ et $\frac{1}{\nabla h}$ dans le terme de divergence, par rapport aux autres évaluations courantes de f , resp. h , et de ∇f , resp. ∇h . Ce schéma peut être vu comme un cas particulier des approches semi-quadratiques [44, 74], couramment utilisées dans les techniques actuelles de restauration d'images, ce que nous montrerons dans la section suivante.

À chaque itération n du schéma de minimisation alternée sur f et h , l'itération de point fixe consiste à résoudre, respectivement en f^{n+1} et h^{n+1} , en itérant sur l , chacune des deux équations à une inconnue provenant de (3.27) et (3.28) :

¹⁰ Voir Annexe B, Section 4, p. 263 pour les détails du calcul.

$$(h^n * f_{l+1}^{n+1} - g) * h^{n\circledast} - \alpha_1 \operatorname{div} \left(\frac{\nabla f_{l+1}^{n+1}}{|\nabla f_l^{n+1}|} \right) = 0 \quad (3.29)$$

$$(h_{l+1}^{n+1} * f^{n+1} - g) * f^{n+1\circledast} - \alpha_2 \operatorname{div} \left(\frac{\nabla h_{l+1}^{n+1}}{|\nabla h_l^{n+1}|} \right) = 0. \quad (3.30)$$

On peut bien constater le « décalage » entre le dénominateur en l dans les termes de divergence, par rapport aux autres évaluations en $l+1$ des variables, d'où la dénomination de « point fixe à diffusivité décalée » (angl. *lagged diffusivity fixed point*) utilisée pour cet algorithme.

Jusqu'ici, nous travaillions avec f et h représentant l'image et le flou continus, ou leurs discrétilisations matricielles immédiates. Nous choisissons maintenant une autre représentation, permettant de nous affranchir de l'opération de convolution entre f et h , et de disposer d'un produit matrice vecteur plus simple à manipuler. Celle-ci s'obtient en utilisant un ordonnancement lexicographique des coefficients de f et h . Nous notons pour cela \mathbf{f} et \mathbf{h} les vecteurs contenant les coefficients de f et h ordonnancés de manière lexicographique, et H et F les matrices par blocs telles que l'on puisse écrire que

$$\mathbf{g} = H\mathbf{f} \quad \text{ou} \quad \mathbf{g} = F\mathbf{h}. \quad (3.31)$$

Nous notons alors par L_o l'opérateur différentiel que l'on va qualifier d'« original », appliqué à la variable factice \mathbf{w} , et tel que

$$L_o(\mathbf{f})\mathbf{w} = -\operatorname{div} \left(\frac{\nabla \mathbf{w}}{|\nabla \mathbf{f}|} \right). \quad (3.32)$$

Comme nous l'avons dit avant, cet opérateur n'est pas différentiable en zéro. Afin d'éviter ce problème, il a été proposé par Vogel d'utiliser un opérateur modifié L , permettant d'approximer le régularisateur TV de la façon dont nous l'avons montrée en Section 4 :

$$L(\mathbf{f})\mathbf{w} = -\operatorname{div} \left(\frac{1}{\sqrt{|\nabla \mathbf{f}|^2 + \beta^2}} \nabla \mathbf{w} \right), \quad (3.33)$$

où β doit être choisi proche de zéro. Il en résulte que le fait de parler ici de modèle à régularisation TV est un peu un abus de langage, puisqu'il faut alors ne pas perdre de vue que la fonctionnelle que l'on cherche à minimiser est en fait

$$\mathcal{J}(f,h) = \frac{1}{2} \|h * f - g\|_{L^2}^2 + \alpha_1 \int_{\Omega} \sqrt{|\nabla f|^2 + \beta^2} + \alpha_2 \int_{\Omega} \sqrt{|\nabla h|^2 + \beta^2}. \quad (3.34)$$

On pourrait en théorie choisir des valeurs de β différentes pour chacun des termes de régularisation sur f et h , mais ce paramètre influe en pratique très peu sur la reconstruction de ces deux variables [197]. Vogel et Oman conseillent de le fixer à $\beta = 1$, ce que nous avons suivi, après avoir vérifié que modifier cette valeur n'apportait rien de significatif. Dans [215], il est cependant proposé de prendre un β qui soit le plus petit possible en précision machine acceptable ; les auteurs y ont alors considéré $\beta = 10^{-32}$ pour leurs propres expérimentations.

En utilisant l'opérateur L défini en (3.33), les équations (3.27) et (3.28) peuvent alors être écrites sous les formes (approximées) $P(\mathbf{f})$ et $Q(\mathbf{h})$ telles que

$$P(\mathbf{f}) = H^*(H\mathbf{f} - \mathbf{g}) + \alpha_1 L(\mathbf{f})\mathbf{f} = 0 \quad (3.35)$$

$$Q(\mathbf{h}) = F^*(F\mathbf{h} - \mathbf{g}) + \alpha_2 L(\mathbf{h})\mathbf{h} = 0. \quad (3.36)$$

En outre, en posant comme variable duale pour l'image

$$\vec{v}_1 = \frac{\nabla \mathbf{f}}{\sqrt{|\nabla \mathbf{f}|^2 + \beta^2}} \quad (3.37)$$

et pour le flou

$$\vec{v}_2 = \frac{\nabla \mathbf{h}}{\sqrt{|\nabla \mathbf{h}|^2 + \beta^2}}, \quad (3.38)$$

on peut aussi arriver à une autre formulation compacte :

$$H^*H\mathbf{f} - \alpha_1 \operatorname{div} \vec{v}_1 = H^*\mathbf{g} \quad (3.39)$$

$$F^*F\mathbf{h} - \alpha_2 \operatorname{div} \vec{v}_2 = F^*\mathbf{g}. \quad (3.40)$$

On peut alors linéariser en posant $\mathbf{f} = \mathbf{f}_l$ dans le dénominateur de \vec{v}_1 et $\mathbf{h} = \mathbf{h}_l$ dans celui de \vec{v}_2 . Ceci mène alors à l'itération de point fixe pour les deux équations (3.27) et (3.28), et à l'écriture matricielle de (3.29) et (3.30) :

$$[H^*H + \alpha_1 L(\mathbf{f}_l)] \mathbf{f}_{l+1} = H^*\mathbf{g} \quad (3.41)$$

et

$$[F^*F + \alpha_2 L(\mathbf{h}_l)] \mathbf{h}_{l+1} = F^*\mathbf{g}. \quad (3.42)$$

Le nombre d'itérations de point fixe (i.e. sur l) à effectuer est une question ouverte, et ni Vogel et Oman, dans le cadre de la déconvolution classique, ni Chan et Wong, dans le cadre aveugle, n'y répondent de manière explicite. Nous verrons cependant plus loin (Section 5.5) que ce paramètre de nombre d'itérations joue un rôle relativement important en restauration aveugle, puisque, d'une part, il influe grandement sur la manière dont évolue l'algorithme alterné, et d'autre part, peut faire exploser les temps de calcul nécessaires à la minimisation de la fonctionnelle (3.8) considérée.

Les dernières expressions obtenues (3.41) et (3.42) peuvent alors être mises sous forme d'algorithme de type quasi-Newton¹¹, ce qui donne

$$\mathbf{f}_{l+1} = \mathbf{f}_l - A(\mathbf{f}_l)^{-1} P(\mathbf{f}_l) \quad (3.43)$$

et

$$\mathbf{h}_{l+1} = \mathbf{h}_l - B(\mathbf{h}_l)^{-1} Q(\mathbf{h}_l), \quad (3.44)$$

où P et Q sont données par les expressions (3.35) et (3.36), de même que $A(\mathbf{f}) = H^*H + \alpha_1 L(\mathbf{f})$ et $B(\mathbf{h}) = F^*F + \alpha_2 L(\mathbf{h})$ sont les approximations au premier ordre des dérivées secondees ∂_f^2 et ∂_h^2 de la fonctionnelle quadratique pénalisée (3.34) :

$$\partial_f^2 = H^*H + \alpha_1 L(\mathbf{f}) + \alpha_1 L'(\mathbf{f})\mathbf{f} \quad (3.45)$$

$$\partial_h^2 = F^*F + \alpha_2 L(\mathbf{h}) + \alpha_2 L'(\mathbf{h})\mathbf{h}. \quad (3.46)$$

11. Voir Annexe B.

Les formulations (3.43) et (3.44) mènent alors, pour chaque itération de point fixe, à la résolution de deux systèmes linéaires, correspondants à l'inversion des deux matrices $A(\mathbf{f}_l)$ et $B(\mathbf{h}_l)$. Cette résolution peut par exemple être effectuée par l'intermédiaire d'un algorithme de type gradient conjugué¹², ce que l'on choisira de faire tout au long de ce travail.

L'algorithme général de déconvolution aveugle correspondant à la minimisation de (3.8) (pour lequel nous évitons de noter l'indice n correspondant à l'itération courante de minimisation alternée, pour des raisons de clarté et de simplicité) est alors :

```

 $\tilde{f}_0 := f ; \tilde{h}_0 := \delta$  (Dirac)
Tant que critère d'arrêt  $\leq \epsilon$ 
 $l := 0$ 
Estimation de  $f$  : début des itérations de point fixe sur  $f$  (cf.
3.29)
Pour  $l = 1$  à  $l = l_{\max}$ :
•  $L_l := L(\mathbf{f}_l)$  opérateur de diffusion
•  $\partial_f^l = H^T(H\mathbf{f}_l - \mathbf{g}) + \alpha_1 L_l \mathbf{f}_l$  gradient
•  $\partial_f^2 = H^T H + \alpha_1 L_l$  approximation de la dérivée seconde
•  $\mathbf{s}_{l+1} = -(\partial_f^2)^{-1} \partial_f^l$  étape de quasi-Newton
•  $\mathbf{f}_{l+1} = \mathbf{f}_l + \mathbf{s}_{l+1}$  correction
•  $l = l + 1$ 
Fin des itérations de point fixe pour  $f$ 
Construire (éventuellement) l'estimation  $\tilde{f}$  obtenue
Estimation de  $h$  : début des itérations de point fixe pour  $h$  (cf.
3.30)
Pour  $l = 1$  à  $l = l_{\max}$ :
•  $L_l := L(\mathbf{h}_l)$ 
•  $\partial_h^l = F^T(F\mathbf{h}_l - \mathbf{g}) + \alpha_1 L_l \mathbf{h}_l$ 
•  $\partial_h^2 = F^T F + \alpha_2 L_l$ 
•  $\mathbf{s}_{l+1} = -(\partial_h^2)^{-1} \partial_h^l$ 
•  $\mathbf{h}_{l+1} = \mathbf{h}_l + \mathbf{s}_{l+1}$ 
•  $l = l + 1$ 
Fin des itérations de point fixe sur  $h$ 
Construire (éventuellement) l'estimation  $\tilde{h}$  obtenue
Fin

```

Pour ce qui est du critère d'arrêt à utiliser pour l'algorithme alterné, plusieurs possibilités sont envisageables : un critère portant sur l'évolution des estimées \tilde{h} ou \tilde{f} , ou encore des deux simultanément. On pourrait également envisager un critère portant sur l'évolution du gradient de ces variables, ou encore une adaptation de tout critère utilisé en restauration à noyau connu. Pour notre part, nous nous sommes intéressés à la première possibilité, et avons utilisé une procédure d'arrêt basée sur l'évolution normalisée de \tilde{f} ,

$$\frac{\|\tilde{f}^n - \tilde{f}^{n-1}\|}{\|\tilde{f}^{n-1}\|} \leq \epsilon, \quad (3.47)$$

dans laquelle n représente l'indice d'itération de l'algorithme alterné (à ne pas confondre avec l , qui est l'indice sur la boucle de point fixe).

12. Voir Annexe B.

Précisons enfin que l'on peut également concevoir le schéma de minimisation en commençant la résolution sur h et non sur f . Ceci ne change en pratique rien, comme cela est énoncé dans [41].

5.2 Lien entre l'itération de linéarisation de gradient et les approches semi-quadratiques

Le schéma de linéarisation par point fixe est un cas particulier des techniques de régularisation semi-quadratiques¹³ - couramment utilisées en restauration d'images - et en particulier de la forme multiplicative [197]. En effet, si nous définissons

$$\mathcal{T}^\triangleright(f,b) = \frac{1}{2}\|h * f - g\|^2 + \frac{\alpha}{2} \int_{\Omega} \left(b(|\nabla f|^2 + \beta^2) + \frac{1}{b} \right), \quad (3.48)$$

où \cdot^\triangleright symbolise une forme quadratique multiplicative, l'itération (3.41) est équivalente à une minimisation alternée de T^\triangleright sur f et b , de la manière qui suit :

$$b^{n+1} = \arg \min_b \mathcal{T}^\triangleright(f^n, b) = \frac{1}{\sqrt{|\nabla f^n|^2 + \beta^2}} \quad (3.49)$$

$$f^{n+1} = \arg \min_f \mathcal{T}^\triangleright(f, b^{n+1}) = \frac{1}{\sqrt{|\nabla f^n|^2 + \beta^2}} \quad (3.50)$$

$$= \arg \min_f \left\{ \frac{1}{2}\|h * f - g\|^2 + \frac{\alpha}{2} \int_{\Omega} \frac{|\nabla f|^2}{\sqrt{|\nabla f^n|^2 + \beta^2}} \right\}, \quad (3.51)$$

où n est l'indice d'itération.

On pourra noter que $\mathcal{T}^\triangleright$ est convexe de manière jointe. En outre, la variable auxiliaire b^{n+1} est le coefficient de diffusion pour l'opérateur L de (3.33), et (3.51) est la formulation variationnelle de l'équation intégro-différentielle linéaire (3.41). L'équivalence du schéma de point fixe avec d'autres approches (semi-quadratique, itération de Bregman, méthode de Weiszfeld généralisée) a également été pointée dans [215] et [145].

5.3 Réglage des paramètres de régularisation

Nous examinons dans cette section la manière dont doivent être réglés les paramètres de régularisation α_1 et α_2 , afin d'arriver à un schéma de minimisation convergent, ainsi qu'à une reconstruction efficace du flou et de l'image recherchés. De manière non surprenante, on montre que α_1 dépend directement du niveau de bruit présent dans l'image à déflouer. En effet, il en est de même dans le cas de la déconvolution à flou connu, à laquelle nous sommes ramenés si nous considérons la minimisation de (3.8) par rapport à f . Quant à α_2 , Chan et Wong ont montré que sa valeur contrôle le niveau d'étalement du flou, c'est-à-dire sa taille [40].

Afin d'argumenter leur propos, Chan et Wong ont proposé de considérer la minimisation sous contrainte de bruit de la fonctionnelle suivante :

$$\begin{aligned} & \min_{f,h} \int (|\nabla f| + \alpha |\nabla h|) \\ & \text{sous } \|h * f - g\|_{L^2}^2 = \sigma^2, \end{aligned} \quad (3.52)$$

13. Présentées au Chapitre 2, Section 2.2.1.

où σ représente l'écart-type du bruit présent dans l'image. La formulation du Lagrangien¹⁴ pour (3.52) est donnée par

$$\mathcal{L}(f,h) = \int (|\nabla f| + \alpha |\nabla h|) + \frac{\lambda}{2} (\|h * f - g\|_{L^2}^2 - \sigma^2) , \quad (3.53)$$

où λ est le multiplicateur de Lagrange. Il s'en suit que les problèmes de minimisation (3.8) et (3.52) sont identiques si $\alpha_1 = \frac{2}{\lambda}$ et $\alpha_2 = \frac{2\alpha}{\lambda}$.

En utilisant la formulation sous contrainte de bruit (3.52), les auteurs proposent quelques éléments guides pour la sélection des valeurs de réglage de α_1 et α_2 .

De manière claire, si le rapport signal/bruit de l'image g est faible (c'est-à-dire que σ est grand), alors λ devrait être petit pour que $\int_{\Omega} |\nabla f|$ soit suffisamment important afin de régulariser l'image reconstruite. D'où s'en déduit l'heuristique consistant à supposer que λ est proportionnel au SNR de l'image floue. Par conséquent, on s'attend à ce que $\alpha_1 = \frac{2}{\lambda}$ soit directement proportionnel au niveau de bruit σ .

Pour ce qui est du paramètre α_2 , quand sa valeur est réglée à un niveau plus important, l'opérateur de régularisation sur h , $\int_{\Omega} |\nabla h|$, doit être faible pour pouvoir minimiser (3.52). La valeur pic de h sera donc plus basse quand α_2 devient plus grand, ce qui, si l'on considère les contraintes physiques telles que la normalisation du noyau ($\int_{\Omega} h = 1$), fait que ce dernier doit s'étaler, s'élargir. D'où un choix de la valeur de α_2 proportionnel à l'intensité du floutage présent, ce qui, bien entendu, est dans une certaine mesure contraire au principe de la déconvolution « aveugle », puisque de toute évidence, on ne connaît pas a priori le niveau de flou présent dans l'image à traiter. Ceci oblige donc à procéder de manière heuristique, et met bien en évidence la limite du qualificatif d'aveugle appliquée à cette classe de problèmes.

Il convient de préciser certaines choses quant à la valeur de α_1 . Bien que son réglage optimal soit proportionnel au niveau de bruit présent dans l'image, il n'existe, selon nous, aucune relation explicite connue entre la valeur de α_1 et l'intensité du bruit contaminant l'image. On ne peut donc utiliser des techniques automatiques de mesure du bruit présent, pour escompter un réglage automatique de la régularisation. Quand bien même cela serait possible, il serait alors à craindre que l'incertitude d'estimation sur l'intensité du bruit mène à des erreurs importantes de réglage de α_1 . En outre, comme on le verra plus loin, le bruit n'est pas une problématique essentielle dans le cas de l'application pratique nous intéressant. En effet, les images acquises le sont dans de bonnes conditions de luminosité, et donc contaminées par un bruit de capteur optique de l'appareil qui s'avère alors faible. Ce qui ne serait pas le cas si les conditions de prise de vue impliquaient des images sombres, alors beaucoup plus affectées par le bruit du capteur.

Comme on le verra ci-après, la régularisation sur f servira ici essentiellement à « guider » l'algorithme vers l'image cible recherchée, en lui fournissant une information sur la structure de la variable bidimensionnelle f à reconstruire.

En ce qui concerne le réglage de α_2 , paramètre de régularisation sur le flou, on verra que celui-ci ne requerra pas une précision très importante. En effet, c'est essentiellement une contrainte que nous imposerons à la forme du noyau qui permettra d'arriver à une reconstruction efficace, et non une valeur très précise de α_2 . En outre, bien que des auteurs

14. Voir Annexe B.

comme You et Kaveh aient revendiqué un réglage automatique (de α_2 comme pour α_1), malgré des résultats très peu étayés, nous ne pensons pas que ceci soit réaliste, en l'absence d'indication a priori sur la taille du noyau recherché. Où prendre en effet une information suffisamment fiable dans un problème aveugle, sans données sur la dégradation ? De plus, You et Kaveh indiquent d'un autre côté que leurs « *simulations ont montré que la qualité de la restauration aveugle est habituellement peu sensible au réglage des paramètres de régularisation* » , ce qui met en évidence des avis assez variés dans la communauté scientifique à ce sujet. Ceci va donc bien dans le sens de que ce nous avançons : c'est davantage la façon dont l'évolution de la forme du noyau est contrainte qui est primordiale, par rapport au réglage de la valeur de son paramètre de contrôle.

5.4 Contraintes imposées dans la reconstruction et cas particulier des images à fond noir

Dans leurs approches respectives, autant You et Kaveh [213] que Chan et Wong [40] imposent des contraintes à leur reconstruction de f et h . Nous nous sommes aperçus que la manière - parfois plutôt basique - de traiter ces contraintes, ou de les mettre en œuvre, posait souvent plus de problèmes qu'elle n'apportait de réel avantage. Nous considérons ci-dessous l'approche de Chan et Wong, dans la mesure où celle-ci traite du modèle sur lequel nous nous basons (i.e. le problème de minimisation de la fonctionnelle (3.8)).

5.4.1 Contraintes sur l'image

À chaque itération alternée, les valeurs de niveaux de gris de l'image doivent être positives. Si l'image reconstruite présente des valeurs négatives, celles-ci sont mises à zéro. Ceci peut physiquement paraître une évidence, mais il convient de préciser que lors des traitements, le niveau de gris des pixels peut être déplacé sur une échelle partiellement négative. Cette contrainte de positivité est donnée par les auteurs comme :

$$f^n(x,y) = \begin{cases} f^n(x,y) & \text{si } f^n(x,y) > 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.54)$$

Dans nombre de cas que nous avons examinés, nous avons constaté qu'il était plus judicieux de ne pas procéder de la sorte, et de ne pas imposer de positivité aux niveaux de gris de l'image ; du moins pas de la façon proposée par Chan et Wong, en appliquant (3.54) après chaque estimation de f en sortie de la boucle de point fixe (3.43). Car il est apparu que cette contrainte n'était pas adaptée à notre champ d'application, et ne permettait pas d'arriver la plupart du temps à des reconstructions vraiment satisfaisantes.

En effet, on peut noter que dans leur article original, les auteurs utilisent une unique image à fond noir comme cas test : il s'agit de l'image *Satellite* présentée en Fig. 3.3. Ce type d'image exhibe des propriétés bien particulières, qui rendent le problème de « séparation » de la scène originale nette et du flou beaucoup plus aisé que sur des images ne présentant pas cette spécificité. Il a en effet été montré par Donoho *et al.* dans [59] que des problèmes inverses comme la déconvolution sont résolus par des méthodes de type moindres carrés régularisés de manière beaucoup plus efficace lorsque l'objet (ici l'image) considéré est à valeurs positives, mais surtout « presque noir » ; ce qui signifie concrètement que seule une zone centrale d'une image à déflouer contient des éléments non-nuls (le reste correspondant en fait à une zone noire). La restauration est donc simplifiée dans le cas des images à fond noir. Malgré cette situation favorable, les résultats de reconstruction obtenus par Chan et Wong ont été assez peu convaincants, dans la mesure où aucun détail du *Satellite* n'était récupéré, mais seulement sa structure globale.



FIGURE 3.1 – Essai de restauration aveugle avec la méthode de Chan et Wong de l'image *Lena*, défocalisée avec un noyau tel que $\rho = 5$, avec $\alpha_1 = 10^{-3}$ et $\alpha_2 = 10^{-5}$.

De même, les quelques publications s'étant basées sur le modèle de Chan et Wong pour effectuer des simulations sur des images sans fond noir, sont arrivées à des résultats plutôt très moyens (ex. [13, 135]). En effet, l'image « restaurée » était alors souvent de qualité visuelle aussi mauvaise que l'image floue. Ceci en raison du fait que l'algorithme ne parvenait pas à « séparer » le noyau de l'image nette à partir de l'image floue.

Considérons le cas de l'image *Lena* (Fig. 3.1). Celle-ci ne présente pas de fond noir, et on peut la caractériser comme étant composée de grandes zones homogènes séparées par des transitions marquées, de même que par quelques zones finement texturées. Elle a été dégradée pour l'occasion par un flou de défocalisation de rayon $\rho = 5$.

Nous présentons, également en Fig. 3.1, deux - rapides - tentatives de restauration : l'une obtenue en considérant la positivité telle qu'elle est suggérée par Chan et Wong (3.54), et l'autre en ne considérant aucune contrainte de ce type. On peut constater que, dans le premier cas (c), la méthode tend à progressivement ronger la dynamique de l'image reconstruite, ce qui mène à la non-convergence de l'algorithme (arrêté dans cet exemple de manière prématurée) vers une image plus nette. Ceci explique également pourquoi les auteurs n'ont pas considéré d'images autres que celles à fond noir dans leurs expérimentations. À l'inverse, ne pas utiliser cette contrainte de positivité permet d'éviter ce phénomène, et d'arriver à une reconstruction dans des conditions normales (d).

5.4.2 Contraintes sur le noyau

Une fois obtenue l'estimation h^n de h , à l'itération n de l'algorithme alterné, Chan et Wong proposent également d'y appliquer une contrainte de positivité, avec en sus une symétrisation centrale (i.e. $h(x,y) = [h(x,y) + h(-x, -y)]/2$), et une normalisation

$$\int_{\Omega} h = 1 . \quad (3.55)$$

Nous n'avons pas conservé la symétrisation, car cela était un a priori restrictif sur la forme du flou, a fortiori non pertinent pour des noyaux de mouvement généraux, mais nous avons conservé la normalisation.

La positivité est imposée de la même manière qu'à chaque estimée f^n de l'image, c'est-à-dire en mettant à zéro toutes les valeurs négatives, qui sont en pratique localisées en dehors de la zone centrale. Cette dernière contenant des éléments (fortement) positifs.

Étant donné que la majorité des flous (défocalisation, mouvements, gaussiens, etc.) sont des opérateurs compacts, nous avons choisi d'intégrer une contrainte supplémentaire sur ceux-ci à chaque étape n lors de leur reconstruction. Pour ce faire, à chaque pixel à la position (x,y) de $h^n(x,y)$, nous imposons le seuillage suivant,

$$h^n(x,y) = \begin{cases} h^n(x,y) & \text{si } h^n(x,y) > \zeta \max_{s,t} h^n(s,t) \\ 0 & \text{sinon ,} \end{cases} \quad (3.56)$$

où ζ doit être choisi entre 0 et 1. Ceci signifie que si le niveau de gris du pixel considéré est inférieur à un certain seuil, dépendant de $\max h^n$, et régulé par un paramètre ζ , alors cette valeur est vue comme étant une sorte d'artefact, et est mise à zéro. Comme on le verra dans la Section 6, ceci a permis d'arriver à des résultats parfois de grande qualité, pour lesquels le noyau avait été bien estimé - autant dans le cas des flous de défocalisation que de mouvement rectilignes - résultant en une déconvolution efficace de l'image dégradée.

Notons que cette approche de seuillage se rapproche de celle employée par You et Kaveh dans [213]. La différence majeure provenant alors du fait que ces auteurs supposent a priori une certaine taille maximale de support pour h , et tronquent systématiquement - en les mettant à zéro - tous les coefficients non-nuls se trouvant à l'extérieur de celui-ci, ce qui est une hypothèse plutôt forte sur la connaissance du noyau, hypothèse que nous ne faisons pas dans notre cas. D'autre part, leurs noyaux sont forcés à être rectangulaires, ce qui se révèle peu pertinent dans le cas d'opérateurs tels que des défocalisations.

En Fig. 3.2, nous présentons une illustration de notre approche de seuillage. Il s'agit de la forme typique d'un noyau de défocalisation¹⁵ en cours de reconstruction, après quelques itérations de la méthode de Chan et Wong appliquée à l'image floue *Lena* (de taille 256×256) que nous avions évoquée ci-haut ; ceci respectivement sans, et avec, procédure de seuillage. L'illustration représente un plan en coupe centrale, vue de profil, et montre la forte présence de bruit d'estimation quand aucun post-traitement n'est effectué. Bien qu'un pic soit effectivement présent au centre¹⁶, il est fortement contaminé par des artefacts tout autour. Ceci se produit typiquement lorsque que l'on traite d'images sans fond noir. À l'inverse, le seuillage adaptatif (3.56) permet une reconstruction bien plus proche du flou

¹⁵. Pour ce type de noyau, voir Chapitre 1, Section 1.6.1. Il s'agit d'un flou, qui, en trois dimensions, présente la forme d'un cylindre debout. Sa coupe de profil présente donc un rectangle.

¹⁶. Idéalement, il faudrait retrouver une section en forme de rectangle (coupe centrale d'un cylindre).

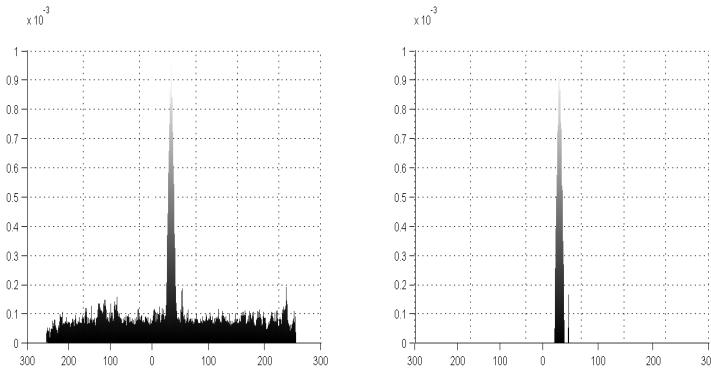


FIGURE 3.2 – Exemple de coupe de profil d'un noyau de défocalisation reconstruit avec la méthode de [40], à gauche sans seuillage, à droite avec.

original, reconstruction pour laquelle toutes les valeurs du flou inférieures à un certain niveau sont éliminées. Il en découle conséutivement un déflouage beaucoup plus performant.

Précisons que le fait de mettre en œuvre une telle contrainte de seuillage sur le flou h , contrainte ayant un effet très fort sur sa reconstruction, nous permet alors de nous affranchir d'un nombre d'itérations de point fixe sur l élevé dans (3.44), pour la résolution de l'équation non-linéaire (3.28). On reviendra sur ce point en Section 5.5.

5.4.3 Cas particulier des images à fond noir : exemple

Examinons plus en détails le cas bien particulier de la déconvolution aveugle d'images à fond noir, ou, plus mathématiquement, à support compact, par le schéma de déconvolution aveugle à double régularisation considéré. De telles images offrent, comme nous l'avons déjà évoqué, un cadre bien particulier, puisque toute l'information est concentrée en leur centre, et que le pourtour entier est de niveau de gris nul.

Pour illustrer cette particularité, et son lien avec les contraintes imposées, nous allons de nouveau considérer l'image *Satellite* présentée en Fig. 3.3. Celle-ci est très souvent utilisée comme référence dans la thématique de la déconvolution aveugle. Elle contient un certain nombre de détails fins pour lesquels il est intéressant d'observer l'efficacité des différentes reconstructions possibles. Elle a été en particulier utilisée comme unique scène test par Chan et Wong dans leur article sur la double régularisation TV. Malheureusement, il n'a pas été possible de reproduire exactement leur expérimentation, dans la mesure où le noyau qu'ils ont utilisé n'a pas été explicitement donné. Nous savons seulement qu'il s'agit d'un flou de défocalisation, mais son rayon n'est pas précisé. Nous allons pour notre part proposer un test se rapprochant du leur, en défocalisant l'image par un noyau de rayon $\rho = 5$.

Nous avons consciencieusement respecté leurs réglages de paramètres, du moins pour ceux qui étaient précisés, et effectué les trois itérations prescrites de minimisation alternée sur n , avec, à chaque fois, les dix itérations de point fixe sur l , où chaque inversion du système linéaire requis pour le calcul de la correction (cf. (3.43) et (3.44)) est effectuée par gradient conjugué, avec une valeur de tolérance résiduelle¹⁷ fixée à 10^{-1} . Nous avons considéré un réglage empirique des paramètres de régularisation à $\alpha_1 = 10^{-5}$ et $\alpha_2 = 10^{-5}$.

17. C'est-à-dire la valeur contrôlant l'arrêt de l'algorithme de gradient conjugué; cf. Annexe B.

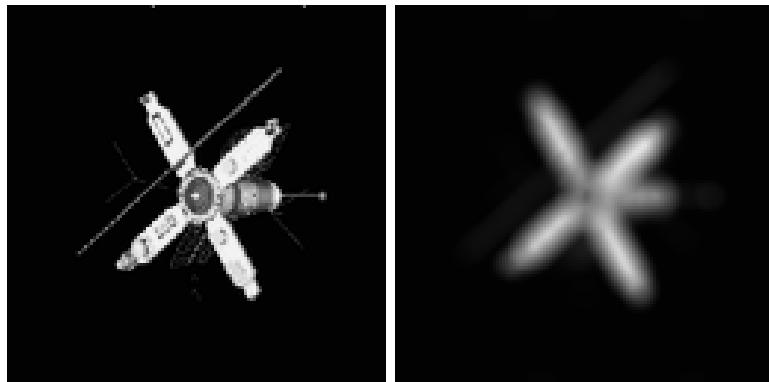


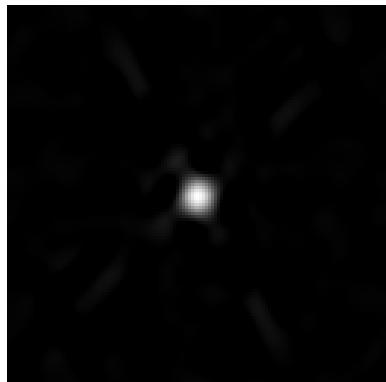
FIGURE 3.3 – Image *Satellite* utilisée par Chan et Wong, et image flouée par un noyau de défocalisation de rayon $\rho = 5$.

On montre tout d'abord les performances obtenues par le modèle double TV tel qu'il a été mis en œuvre par les auteurs, c'est-à-dire sans opération de seuillage sur le flou comme défini en (3.56), mais avec contrainte de positivité sur la luminance de l'image. On constate une reconstruction plutôt très grossière de l'image (Fig. 3.4), celle-ci étant due à la valeur très basse à laquelle est réglé le paramètre de tolérance résiduelle de l'algorithme de gradient conjugué évoqué plus haut. En effet, la correction calculée sur f est alors assez grossière. De même, la conjonction de ce réglage avec les trois itérations de minimisation alternée ne relève pas réellement d'un choix pertinent. En effet, dans le cas présent, effectuer d'avantage d'itérations alternées n'apporte rien, car le problème principal réside dans la mauvaise correction qui est calculée. L'algorithme (et le réglage) initial de Chan et Wong donne donc, même dans le cas plutôt favorable d'image à fond noir, un résultat plutôt mitigé. En revanche, on peut penser qu'une meilleure correction (qui requiert alors une tolérance résiduelle plus stricte, i.e. une valeur plus basse du paramètre), combinée avec davantage d'itérations de minimisation alternée, peut mener à des reconstructions plus satisfaisantes.

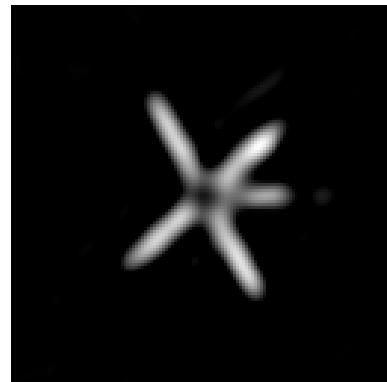
C'est ce que l'on a voulu voir, en réglant dorénavant ce paramètre de tolérance résiduelle à 10^{-5} . Trois itérations pour la minimisation alternée sont totalement insuffisantes, et nous avons dû aller jusqu'à 50 itérations pour obtenir un résultat qui soit convaincant. Celui-ci est visible en Fig. 3.5, où l'image reconstruite est bien plus proche de l'originale que pour le cas avec les réglages préconisés par Chan et Wong utilisés précédemment. Cependant, le gros défaut est que la contrainte de positivé imposée à l'image continue de ronger sa dynamique (soit le niveau de gris de ses pixels), et que l'on constate alors une perte de contraste relativement importante.

Fondamentalement, l'approche initiale préconisée par les auteurs, et surtout les contraintes imposées sur l'image et le flou¹⁸, fonctionnent relativement bien pour les images à fond noir, avec des réglages adéquats. Ceci dans le sens où, si ces réglages sont judicieux, l'algorithme semble converger vers une image qui soit plus nette. En revanche, le temps de calcul nécessaire pour obtenir une image déflouée avec une qualité suffisante est plutôt rédhibitoire en pratique, puisque se comptabilisant en (dizaines de) minutes, suivant le type d'ordinateur PC utilisé. Il faut de plus ajouter que les valeurs des paramètres de régularisation ne sont pas connues a priori, et que leur réglage nécessite donc plusieurs essais avant d'arriver à une reconstruction correcte. Il est donc difficile de

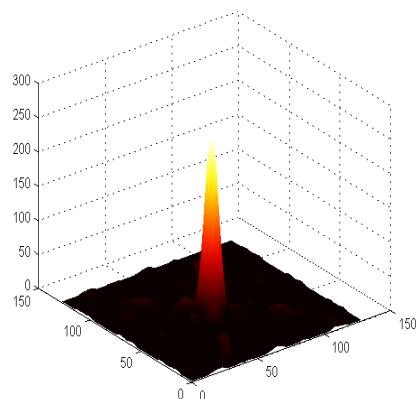
18. À savoir : respectivement, la positivité d'une part, et la positivité avec normalisation (3.55), et symétrisation, d'autre part.



(a) Flou identifié, vu de haut

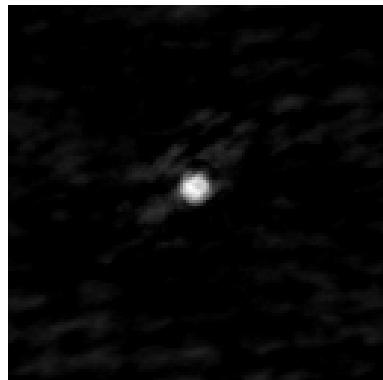


(b) Image déflouée

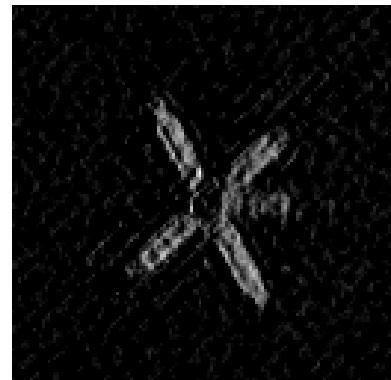


(c) Flou identifié, vu de $3/4$

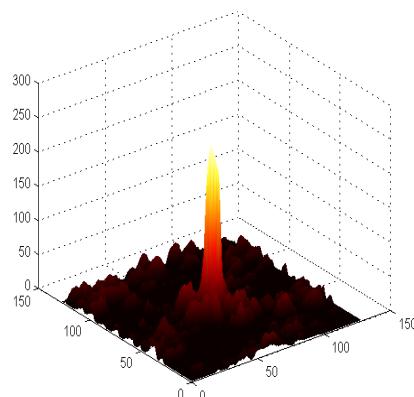
FIGURE 3.4 – Déconvolution aveugle de l'image *Satellite* défocalisée, avec l'algorithme de Chan et Wong (CW), d'après les réglages originaux de ces auteurs.



(a) Flou identifié, vu de haut



(b) Image déflouée



(c) Flou identifié, vu de 3/4

FIGURE 3.5 – Déconvolution aveugle de l'image *Satellite* défocalisée, avec l'algorithme de Chan et Wong (CW), avec nos réglages propres.

se permettre que chaque tentative prenne autant de temps.

À titre de comparaison, nous avons effectué le même test de déconvolution à l'aide du modèle de You et Kaveh [213], modèle sans prise en compte des discontinuités, car utilisant la régularisation H^1 sur l'image et le noyau de flou, comme nous l'avions évoqué en (3.7). Nous en avons mis en œuvre une minimisation par une approche très simple basée sur l'utilisation de la transformée de Fourier rapide (qui n'est pas la technique initialement choisie par les auteurs). Insistons donc bien sur le fait que nous traitons de leur modèle, c'est-à-dire du même type de fonctionnelle, et non de leur méthode à proprement parler, car (au moins) le schéma d'optimisation utilisé est différent, et que nous n'avons pas mis en œuvre leur contrainte sur le noyau (i.e. mise à zéro des coefficients hors d'un support prédéfini). C'est ici en effet principalement le temps de calcul et l'influence des opérateurs (et non des paramètres) de régularisation qui nous intéresse.

Pour cela, on commence par appliquer les conditions d'optimalité de premier ordre à (3.7), ce qui donne¹⁹ :

$$\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial f} = (h * f - g) * h^\circledast - \alpha_1 \operatorname{div}(\nabla f) = 0 \quad (3.57)$$

$$\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial h} = (h * f - g) * f^\circledast - \alpha_2 \operatorname{div}(\nabla h) = 0. \quad (3.58)$$

Nous effectuons alors, comme dans le cadre de la méthode de Chan et Wong avec régularisation TV, une minimisation alternée sur f et h , ce qui donne l'algorithme général :

Initialiser f^0 avec g et h^0 avec une impulsion de Dirac.
 Pour $n = 1$ à $n = n_{\max}$ (*indice de nombre d'itérations de minimisation alternée*) :
 1. Résoudre (3.57) pour f (avec h fixe)
 2. Résoudre (3.58) pour h (avec f fixe)
 Fin

Dans ce qui suit, d est la matrice issue de la discréétisation de $\operatorname{div}(\nabla f)$ dans (3.57), de telle sorte que cette équation s'écrive aussi

$$\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial f} = (h * f - g) * h^\circledast - \alpha_1 d * f = 0. \quad (3.59)$$

À chaque itération de la boucle ci-dessus, nous utilisons un schéma basé sur l'inversion de Fourier pour estimer f^n et h^n dans les deux équations. Ce schéma a été proposé dans [195] :

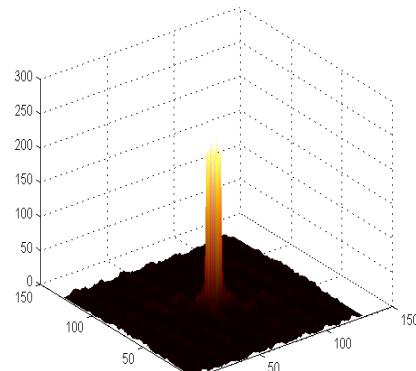
Initialiser f^0 avec g et h^0 avec une impulsion de Dirac.
 Pour $n = 1$ à $n = n_{\max}$:
 • $\hat{d} := \text{fft2}(d)$
 • $\hat{h} := \text{fft2}(h)$
 • $\hat{g} := \text{fft2}(g)$
 • $\hat{f} := \text{conj}\left(\hat{h} \frac{\hat{g}}{|\hat{h}|^2 + \alpha_1 \hat{d}}\right)$
 • $f = \text{ifft2}(\hat{f})$
 Fin

19. Voir Annexe B, Section 4.3 pour les détails des calculs.



(a) Flou identifié vu de haut

(b) Image déflouée



(c) Flou identifié, vu de 3/4

FIGURE 3.6 – Déconvolution aveugle de l'image *Satellite* défocalisée, avec le modèle de You et Kaveh (régularisation H^1).

Dans ceci, `fft2` dénote la transformée de Fourier rapide 2D, `ifft2` son inverse, et `conj` l'opérateur de conjugué. La même approche s'opère de manière symétrique pour l'estimation de h^n , et ceci de manière extrêmement rapide.

Nous avons alors reconsidéré le même cas test que celui présenté ci-haut avec l'image *Satellite*, en utilisant l'algorithme de déflouage à régularisation H^1 présenté ci-dessus. Le résultat obtenu est présenté en Fig. 3.6. Pour cela, les paramètres de régularisation ont été réglés à $\alpha_1 = 10^{-5}$ et $\alpha_2 = 10^5$. Ces valeurs ont été choisies de manière heuristique, car elles menaient à la convergence de l'approche. On constate au final une reconstruction de qualité bien supérieure à celle qui avait été obtenue précédemment avec la méthode à double régularisation TV de Chan et Wong, et ce d'autant plus que le déflouage a été bien plus rapide. Le seul inconvénient est alors que les contours de l'image déflouée n'apparaissent pas totalement nets, mais un peu lissés, ce qui n'est guère surprenant avec une régularisation quadratique.

Pour résumer sur cette thématique de l'influence du fond noir, nos investigations nous

amènent à affirmer que, certes, l'approche de Chan et Wong, si elle apparaît ne pas réellement fonctionner pour des images sans fond noir, permet somme toute des déflouages corrects dans le cas où les scènes à traiter comportent effectivement de tels fonds noirs. Néanmoins, même dans ce cas particulier favorable, ce schéma à prise en compte des discontinuités n'apporte pas systématiquement d'avantage par rapport à des techniques bien plus simples (et rapides) telles que le modèle double H^1 avec utilisation de la transformée de Fourier, comme l'a montré notre exemple. Et ce, bien que ce dernier modèle ne comprenne pas d'opérateurs de régularisation à préservation des discontinuités. Dans les cas généraux sans fond noir en revanche, outre le problème de la préservation des discontinuités, il nous a été impossible d'arriver à des reconstructions d'une image plus nette avec ce simple modèle H^1 , en raison de la reconstruction d'un noyau trop contaminé par des artefacts.

5.5 Influence du nombre d'itérations de point fixe

Nous allons dans cette section examiner l'influence du nombre d'itérations permis à l'algorithme de point fixe pour la résolution de (3.29).

Pour ce qui concerne l'estimation du noyau h , la calcul de h^{n+1} dans (3.30) peut simplement se faire par une unique itération (sur l), étant donné l'importance que prend notre contrainte (3.56) dans sa reconstruction. Il n'est en effet alors nul besoin de le traiter par régularisation de manière aussi intensive que l'image f , puisque sa forme, ses contours, sont alors essentiellement déterminés par le seuillage mis en œuvre.

Comme nous l'avons dit précédemment, ni Chan et Wong dans [40] ni Vogel dans [197] n'étudient la question du nombre d'itérations de point fixe. Dans leurs tests, Chan et Wong indiquent seulement qu'ils ont laissé itérer les boucles de point fixe 10 fois, sans justification ou indication du sens de ce réglage. Cependant, comme nous l'avons vu, et comme cela est visible sur leurs expérimentations, ce réglage ne mène pas à des résultats vraiment satisfaisants si le paramètre de tolérance résiduelle du gradient conjugué est réglé à une valeur trop importante de 10^{-1} . Si on réduit celle-ci, par exemple à 10^{-5} , alors la déconvolution se déroule de manière bien plus efficace, et les résultats sont bien plus convaincants. Le désavantage est cependant le coût de calcul nécessité, qui augmente fortement. On illustre ceci dans ce qui suit.

Prenons à titre d'exemple le cas de l'image en Fig. 3.13 (c) (p. 92), affectée par un flou de défocalisation ainsi que par un bruit gaussien d'écart type $\sigma = 3$. L'image dégradée résultante est présentée sur la même figure, en (e). Nous lui appliquons notre version de l'algorithme de déconvolution par double régularisation TV. Les paramètres de régularisation ont été fixés à $\alpha_1 = 20$ et $\alpha_2 = 9.10^7$: ce sont les paramètres optimaux des problèmes de déconvolution simples de l'image à partir du flou connu, et de reconstruction du noyau à partir de l'image nette (Cf. Annexe A), dans le cas d'un nombre d'itérations suivant critère d'arrêt, mais borné à 10, ceci afin de limiter le temps de calcul possible.

Notons que, à une étape n donnée de la reconstruction alternée, l'itération l de point fixe est arrêtée dès que

$$\frac{\|f_l^n - f_{l-1}^n\|}{\|f_{l-1}^n\|} \leq \epsilon. \quad (3.60)$$

Les résultats obtenus sont donnés en Fig. 3.7. De toute évidence, la restauration est de bonne qualité. Le flou est bien reconstruit, et l'image apparaît bien nette. Les indicateurs de PSNR et de SSIM sont utilisés pour mesurer la qualité des reconstructions ; ils présentent

des valeurs finales plutôt bonnes (resp. 21,7 dB et 0,65) par rapport à celles de l'image de départ. Cependant cette reconstruction présente deux défauts qui peuvent être relativement gênants. Le premier réside dans le fait que l'image déflouée apparaît assez synthétique, ceci en raison du lissage spécifique par variation totale, qui induit un effet particulier de « paliers », et résulte en la perte d'un certain nombre de détails fins présents dans l'image originale. L'autre problème majeur rencontré est un temps de calcul qui peut être très lourd²⁰. Cela peut être parfois tolérable, mais il faut comprendre que, face à une image dégradée inconnue, pour laquelle on n'a a priori pas la connaissance des caractéristiques du bruit, ni de la scène originale, le réglage des paramètres de régularisation α_1 et α_2 peut nécessiter plusieurs essais, ce que nous avions déjà évoqué en Section 5.3. On a donc tout intérêt à réduire au maximum le temps de calcul autorisé par essai. On donne également sur cette même figure les critères d'évolution d'estimation de f et h au fur et à mesure des itérations de l'algorithme de minimisation alternée :

$$\frac{\|f^n - f^{n-1}\|}{\|f^{n-1}\|} \quad \text{et} \quad \frac{\|h^n - h^{n-1}\|}{\|h^{n-1}\|}. \quad (3.61)$$

Rappelons que c'est le critère sur f qui contrôle l'arrêt de l'algorithme (cf. (3.47)).

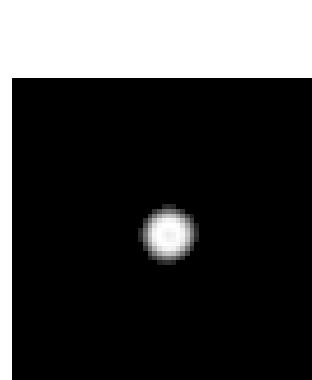
Afin de réduire le temps de calcul, nous refaisons alors le même test, mais en revanche en nous limitant à une seule itération de point fixe sur f , comme cela était déjà le cas pour la reconstruction du flou. On prend cette fois $\alpha_1 = 10^{-3}$ et toujours $\alpha_2 = 9.10^7$. Les résultats obtenus sont visibles en Fig. 3.8. Tout d'abord, précisons que le temps de calcul est ici approximativement divisé par un facteur dix, ce qui n'est pas négligeable. Cela n'a donc rien de commun avec ce qui était nécessaire dans le cas précédent. L'avantage est alors un réglage plus aisés des paramètres, dans le sens où chaque tentative de restauration est bien plus rapide, et que l'on peut donc se permettre plus facilement de tester différentes combinaisons de valeurs. Visuellement, l'image est également plutôt bien restaurée, bien qu'elle puisse apparaître légèrement moins nette que dans le cas précédent. De même, alors que l'image précédente était trop lissée, celle-ci pourrait l'être davantage dans ses zones homogènes. En revanche, elle ne présente plus ce côté d'image en « escalier ».

Nous donnons enfin également à titre illustratif en Fig. 3.9 la représentation tridimensionnelle des noyaux reconstruits dans les deux cas ci-dessus : une seule itération de point fixe, et itération libre à critère d'arrêt.

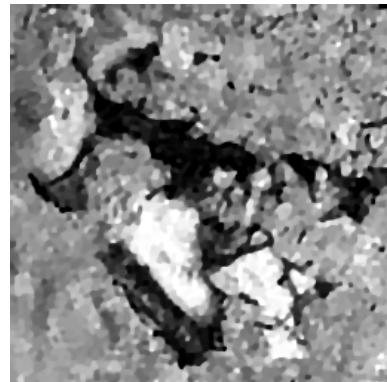
Le choix du nombre d'itérations de point fixe que l'on va permettre pour l'image repose donc sur un compromis ; un compromis portant essentiellement sur le temps de calcul que l'on voudra - ou pourra - autoriser, et sur la « qualité » de reconstruction que l'on cherche à obtenir. Qualité subjective cependant, car liée à ce que l'on voudra en priorité voir apparaître (ou pas) dans l'image (détails, textures, bords, etc.).

En revanche, on notera bien que, plus faible est le nombre d'itérations de point fixe autorisé, plus faible doit être réglé le paramètre de régularisation α_1 . Garder la valeur optimale déterminée dans le cas d'une déconvolution à noyau connu, avec un nombre d'itérations suivant critère d'arrêt, pour le problème aveugle à une seule itération de point fixe, ne mènera à rien, car cela résulte malheureusement en la divergence de l'algorithme, ou, pour être plus exact, en une convergence vers des données plates, hyperlissées, et non vers l'image nette recherchée. Ceci est illustré en Fig. 3.10. Il en est en fait de même si

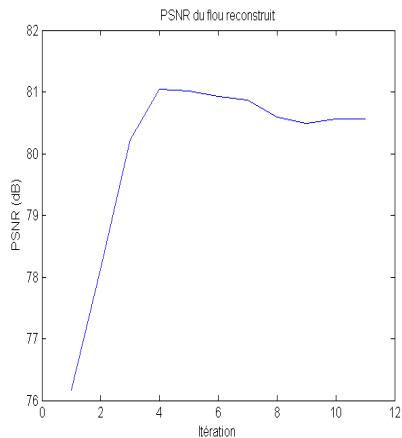
20. Puisqu'il est ici de plus d'une heure ($t > 4000$ sec) sur un ordinateur équipé d'un processeur de type Pentium® 4, cadencé à 3,2 GHz.



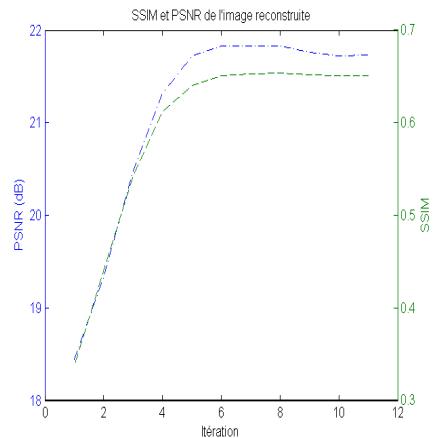
(a) Flou reconstruit



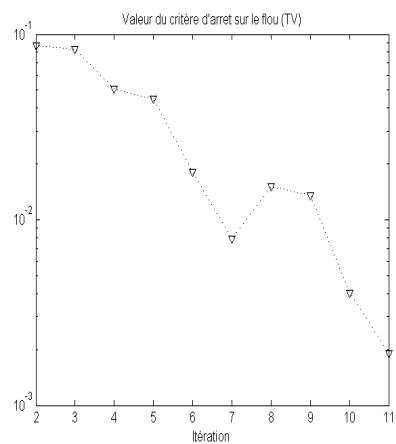
(b) Image reconstruite



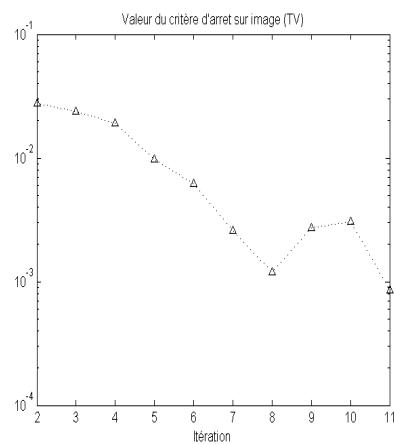
(c) Évolution du PSNR du flou



(d) Évolution du PSNR et SSIM de l'image

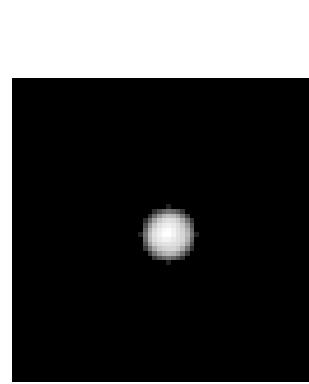


(e) Critère d'évolution sur le flou

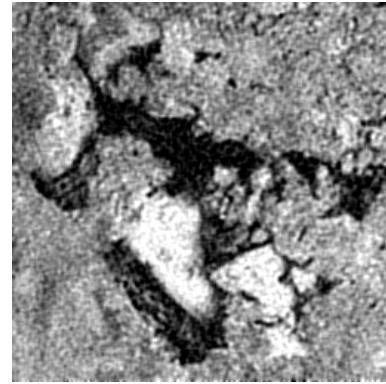


(f) Critère d'évolution sur l'image

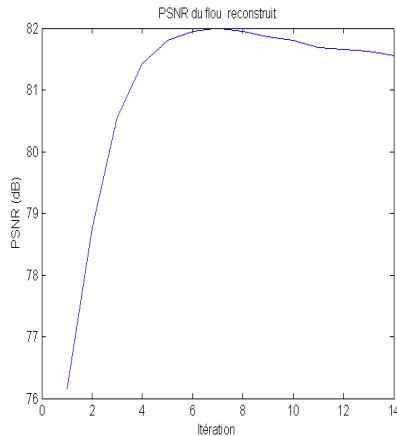
FIGURE 3.7 – Déconvolution aveugle de l'image *Nid de cailloux* défocalisée et bruitée ($\sigma = 3$), avec $\alpha_1 = 20$ et $\alpha_2 = 9 \cdot 10^7$ (itération de point fixe à critère d'arrêt).



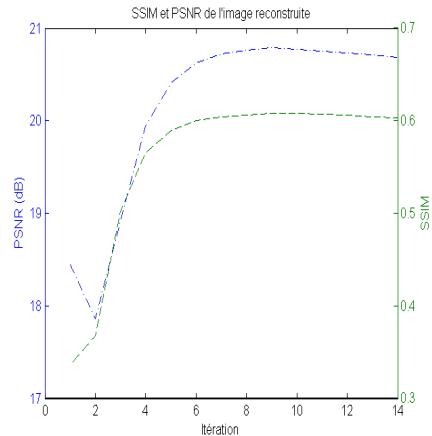
(a) Flou reconstruit



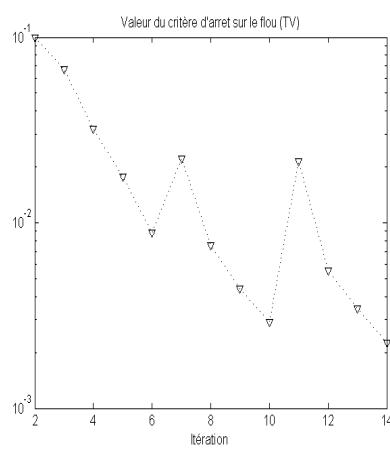
(b) Image reconstruite



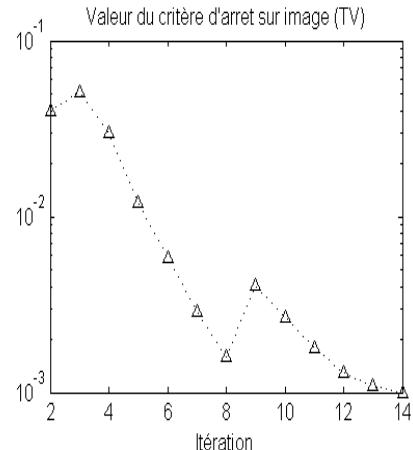
(c) Évolution du PSNR du flou



(d) Évolution du PSNR et SSIM de l'image

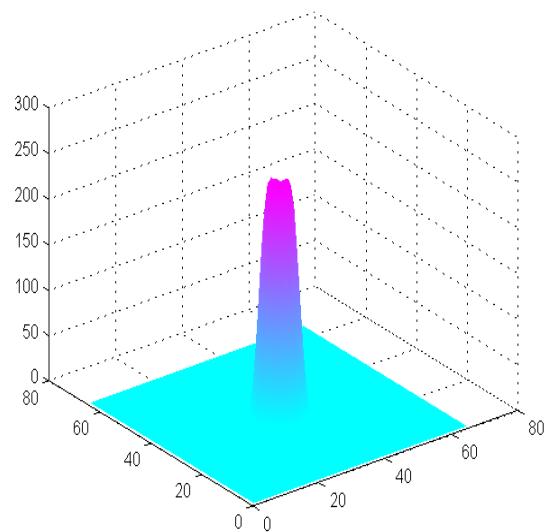


(e) Critère d'évolution sur le flou

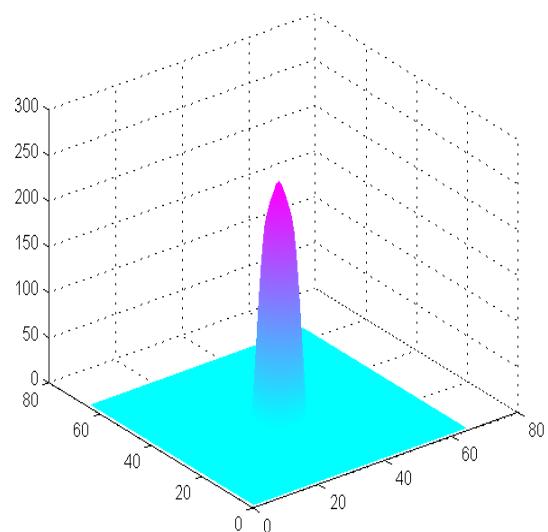


(f) Critère d'évolution sur l'image

 FIGURE 3.8 – Déconvolution aveugle de l'image *Nid de cailloux* défocalisée et bruitée ($\sigma = 3$), avec $\alpha_1 = 10^{-3}$ et $\alpha_2 = 9 \cdot 10^7$ (une seule itération de point fixe).



(a)



(b)

FIGURE 3.9 – Représentation 3D des flous reconstruits en (a) Fig. 3.7, et (b) Fig. 3.8.



FIGURE 3.10 – Flou et images « reconstruits » avec $\alpha_1 = 20$ et $\alpha_2 = 9.10^7$ (une seule itération de point fixe). La valeur de α_1 étant ici fortement surévaluée pour une reconstruction efficiente.

l'on souhaite déconvoluer une image floue avec la connaissance parfaite du noyau : le paramètre de régularisation sera alors fonction du nombre d'itérations de point fixe permis.

Un autre argument peut jouer en faveur d'un faible nombre de ces itérations. En effet, lors du processus d'estimation du noyau, tant que ce dernier n'a pas atteint sa taille définitive, effectuer beaucoup d'itérations de point fixe à l'étape d'estimation de l'image n'a en fait aucun effet réel sur sa qualité de reconstruction à ce moment. Ceci car un nombre important d'itérations n'a pour but que d'arriver à une très bonne reconstruction finale, ce qui est évidemment totalement impossible avec un noyau qui n'a pas encore atteint sa forme définitive, et est donc inadéquat. Par contre, si la reconstruction du noyau est (quasi-) parfaite, ce que l'on escompte évidemment à la fin du processus de minimisation alternée, alors seulement à ce moment là un nombre d'itérations élevé peut se révéler vraiment pertinent.

5.6 Influence du nombre d'itérations de l'algorithme de gradient conjugué

On s'intéresse ici à l'influence de la façon dont est utilisé l'algorithme de gradient conjugué²¹ dans l'étape de quasi-Newton en (3.43) et (3.44), pour l'inversion de $A(\mathbf{f}_l)$ et $B(\mathbf{h}_l)$ (cf. p. 69). Nous souhaitons examiner pratiquement une possibilité de réduction du temps de calcul, autre qu'en jouant sur le nombre d'itérations de point fixe. On envisage donc de limiter cette fois le nombre d'itérations du gradient conjugué (qu'on notera en abrégé ci-après NCG) appelé à chaque itération l de point fixe.

Pour cela, nous considérons de nouveau le cas expérimental de la Section 5.5. Dans celui-ci, on autorisait alors l'algorithme de gradient conjugué à effectuer jusqu'à NCG = 500 itérations à chaque étape de point fixe sur l ; bien qu'en pratique, ce nombre ne soit que rarement atteint dans des cas de déconvolution « se déroulant bien ». On envisage maintenant un nombre d'itérations de gradient conjugué drastiquement réduit, puisque limité à NCG = 20. Le nombre d'itérations de point fixe demeure lui basé sur le critère d'arrêt (3.60), et bridé à 10.

Les résultats de déconvolution sont donnés en Fig. 3.11, ainsi que les indicateurs de qualité de reconstruction et les critères d'évolution des estimées \tilde{f} et \tilde{h} . Ils sont à mettre en rapport avec ceux qui étaient obtenus en Fig. 3.7, pour lesquels nous considérons, on

21. Cf. Annexe B, Section 1, pour les détails de son fonctionnement.

le rappelle, NCG = 500.

Comme on peut le constater, bien que le flou soit plutôt bien reconstruit, l'image restaurée est moins bien déflouée que pour ce dernier cas. Sa qualité visuelle est assez moyenne. Cette possibilité de jouer sur le nombre d'itérations de gradient conjugué semble donc à éviter. C'est pourquoi dans la suite de ce mémoire, à chaque fois que cela ne sera pas précisé, on conservera dans nos expérimentations une valeur limite de NCG = 500.

L'applicabilité des résultats obtenus par Labat dans [110], suggérant qu'un nombre élevé d'itérations de gradient conjugué est inutile en restauration classique à flou connu, n'est donc pas vérifiée a priori dans le cadre aveugle ici envisagé.

6 Expérimentations non-comparatives

Nous allons ici effectuer un jeu complet de simulations avec des dégradations d'image variées, sur deux images différentes exhibant des défauts structurels types susceptibles d'apparaître sur des ouvrages de génie civil.

Les tests expérimentaux menés dans cette section serviront à examiner précisément le comportement de la méthode développée, sur des cas de plus en plus délicats. Ils nous permettront de déterminer les limites pratiques d'utilisation de celle-ci, de même qu'ils nous fourniront des indications précises quant à ses capacités effectives de restauration.

Il ne s'agira donc pas ici de comparer cette technique avec d'autres méthodes, mais davantage d'étudier ses performances dans l'absolu. D'autres expérimentations, comparatives cette fois-là, seront présentées dans la section suivante.

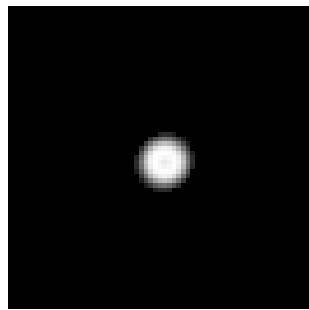
6.1 Descriptif des images et scenarii de test

Les images utilisées pour les tests que nous menons sont présentées dans leur format original en Fig. 3.12. Elles représentent pour chacune des défauts typiques pouvant se faire jour sur des structures de génie civil : il s'agit pour la première de ce qu'on appelle un « nid de cailloux », et pour la seconde de ce qui est qualifié de « reprise de bétonnage »²². Ces images de départ ont été acquises manuellement avec un appareil photographique numérique usuel, n'ayant donc pas de caractéristiques particulières. Étant donné leur taille initiale, nous en avons extrait des zones particulières d'intérêt, visibles en Fig. 3.13 (a) et (b).

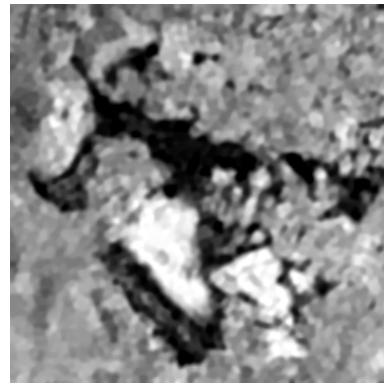
Ces zones d'intérêt ont été dans un premier temps converties sur une échelle de gris (cf. Fig. 3.13 (c) et (d)), et présentent une résolution de 256×256 pixels. D'autre part, elles sont complémentaires en ce qui concerne leurs caractéristiques d'un point de vue du traitement des images : alors que la première comprend des zones texturées avec des structures grossières, la deuxième est caractérisée par une structure fine orientée, avec un fond homogène.

Nous précisons que, dans cette section, nous ne traiterons donc que du cas d'images flouées synthétiquement. Des images affectées par des flous réels seront examinées dans le Chapitre 5, traitant de l'extension de l'approche ici présentée aux images en couleurs.

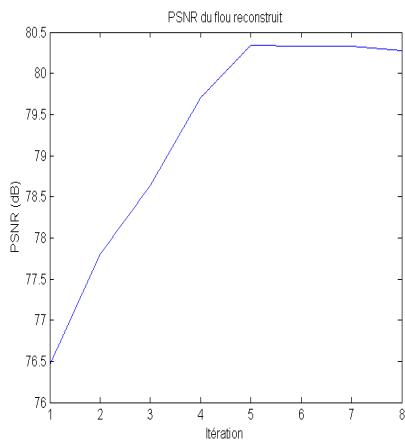
22. Images mises à disposition par la Laboratoire Central des Ponts et Chaussées, France.



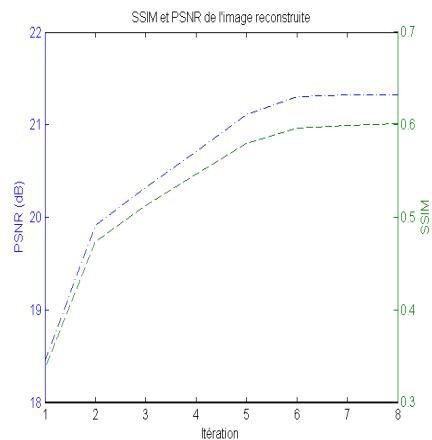
(a) Flou reconstruit



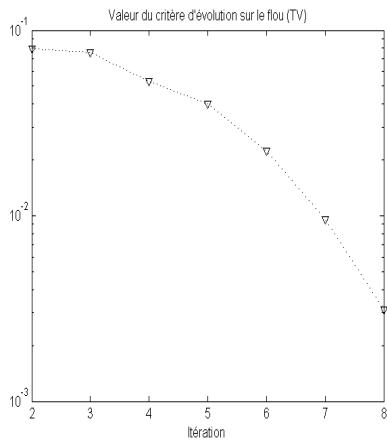
(b) Image reconstruite



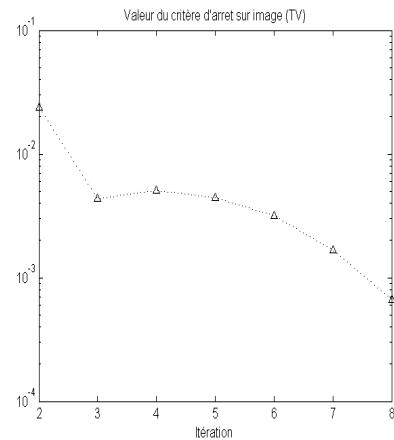
(c) Évolution du PSNR du flou



(d) Évolution du PSNR et SSIM de l'image



(e) Critère d'évolution sur le flou



(f) Critère d'évolution sur l'image

FIGURE 3.11 – Influence du NCG pour la restauration de l'image *Nid de cailloux* défocalisée et bruitée ($\sigma = 3$), avec $\alpha_1 = 20$, $\alpha_2 = 9.10^7$ et NCG = 20 (itération de point fixe à critère d'arrêt).



(a) Image originale (*Nid de cailloux*)



(b) Image originale (*Reprise de béton*)

FIGURE 3.12 – Les deux images originales principalement utilisées dans les tests non-comparatifs.

Nous allons considérer deux types de flous pour ce qui est des dégradations envisagées : flou de défocalisation, et flou de mouvement (ou de bougé) uniforme. Pour le premier, nous utiliserons un noyau relativement important de rayon $\rho = 5$. Pour le second, nous travaillerons avec un noyau d'orientation $\theta = 45^\circ$ et de longueur de support $l = 11$. Les images flouées séparément par les deux noyaux sont données en Fig. 3.13 (e) et (f). Dans chacun des deux cas, nous souhaitons également observer l'influence de l'ajout de bruit blanc gaussien, type de bruit modélisant bien les phénomènes inhérents aux capteurs électroniques. Nous traiterons donc ces images avec 4 niveaux d'écart-type de bruit : $\sigma = 0, 3, 6$ et 9 .

Insistons sur le fait que ces images contiennent déjà par défaut un certain bruit présent, ne serait-ce que celui dû aux composants électroniques de l'appareil photo, et/ou aux effets de la quantification des images. Le fait de flouer manuellement les zones d'intérêt retenues va donc amener à amoindrir le bruit présent, puisque la convolution va avoir un effet lissant, mais une partie de ce bruit restera malgré tout toujours présente.

Nous utilisons les indicateurs de PSNR et SSIM pour mesurer la fidélité de la reconstruction de l'image après déconvolution. En revanche, le noyau de flou sera seulement évalué avec le PSNR, car sa zone centrale à coefficients non nuls étant minoritaire par rapport à la taille de l'image, le SSIM mesuré sur une surface équivalente à celle de l'image est très souvent (quasi-)égal à 1. On n'arrive alors pas à mesurer de réelles différences de fidélité de reconstruction par rapport au noyau réel.

Notons que dans les tests suivants, nous allons mettre en œuvre notre algorithme de deux manières en ce qui concerne l'estimation de f : avec une seule itération de point fixe d'une part, ceci permettant de conserver un temps de calcul relativement rapide, et d'arriver malgré tout à des reconstructions très satisfaisantes, puis avec un nombre d'itérations libre (borné à 10), défini automatiquement jusqu'à convergence suivant le critère d'arrêt

$$\frac{\|f_l - f_{l-1}\|}{\|f_{l-1}\|} \leq \epsilon. \quad (3.62)$$

L'analyse des paramètres α_1 et α_2 pour les problèmes de déconvolution « simples » (au sens de non-aveugles) associés à la minimisation de (3.8)²³, nous permet d'en retirer des valeurs optimales. On va alors vérifier la validité de leur application au problème aveugle. On peut en effet penser que, pour un cas de flou particulier, avec un niveau de bruit spécifique, les valeurs optimales des paramètres obtenues pour les problèmes disjoints²⁴ seront également optimales pour le problème joint, en aveugle. Notons que, chaque fois que cela n'est pas précisé, la valeur du paramètre ζ de seuillage du flou est fixée à $\zeta = 1/10$, et celle du paramètre ϵ dans le critère d'arrêt (3.62) à $\epsilon = 10^{-3}$.

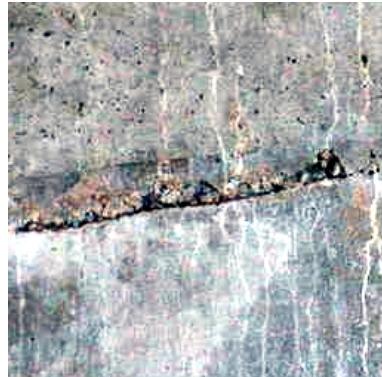
Précisons en outre que, pour chaque test effectué sans ajout de bruit, nous n'effectuons qu'une seule itération de point fixe, et n'envisageons pas le cas avec nombre d'itérations à critère d'arrêt. Ceci étant dû au fait que la régularisation sert dans ce cas exclusivement de « guide » à la convergence de l'algorithme, à l'évolution du noyau et image recherchés, et n'est pas là pour pallier une amplification du bruit, puisque celui-ci se révèle alors extrêmement faible (seul du bruit électronique et/ou de quantification est en effet alors présent). Une itération de point fixe est alors - comme on le verra - suffisante pour arriver à une déconvolution relativement efficace.

23. Voir Annexe A pour plus de détails sur ces problèmes simples.

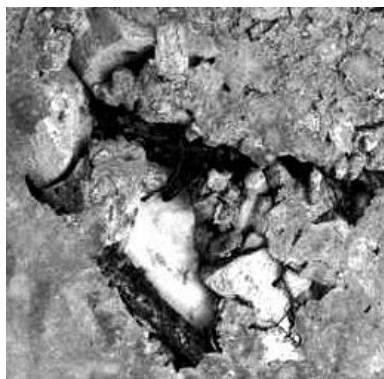
24. C'est-à-dire les deux problèmes d'estimation du noyau de flou à partir de l'image nette, et réciproquement.



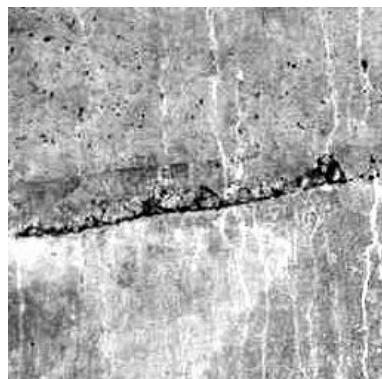
(a) Image *Nid de cailloux* couleur originale



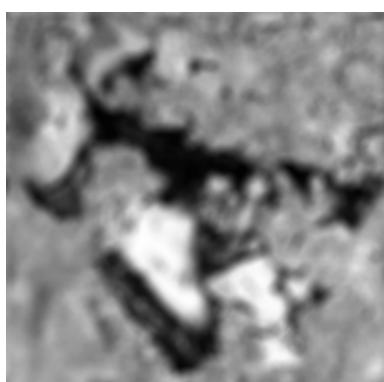
(b) Image *Reprise de béton* couleur originale



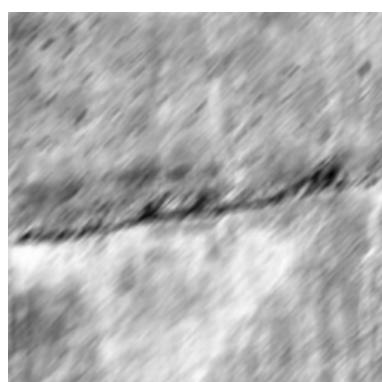
(c) Image *Nid de cailloux* monochrome



(d) Image *Reprise de béton* monochrome



(e) Image *Nid de cailloux* monochrome flouée par le noyau de défocalisation



(f) Image *Reprise de béton* monochrome flouée par le noyau de mouvement

FIGURE 3.13 – Images principales utilisées pour les tests non-comparatifs.

6.2 Tests sur images affectées par un flou de défocalisation

Nous allons commencer par considérer ici le cas des images défocalisées. Contrairement à ce qui est généralement présenté dans la littérature, nous avons envisagé un noyau relativement large, et dont la discréétisation mène à un opérateur qui est donc réellement mal conditionné. Ce qui rend la sensibilité au bruit présent d'autant plus grande, et implique un problème de déconvolution délicat. En général, la littérature sur le sujet a plutôt tendance à utiliser de petits flous gaussiens, menant à des opérateurs incomparablement mieux conditionnés.

Nous allons effectuer tout d'abord, et principalement, nos tests sur l'image de la Fig. 3.13 (e), à laquelle on ajoutera trois niveaux croissants de bruit : $\sigma = 3$, $\sigma = 6$, et $\sigma = 9$. Les Tab. 3.1 et Tab. 3.2 synthétisent l'ensemble des résultats de restauration obtenus pour cette image, suivant les différentes variations de réglage des variables du modèle de déconvolution utilisé. Y sont donnés pour chaque cas, respectivement les PSNR et SSIM de l'image reconstruite, la valeur des paramètres de régularisation, le PSNR du flou reconstruit, et la référence de la figure présentant le résultat.

Cas sans ajout de bruit. On considère ici l'image flouée telle quelle, sans ajout de bruit. On peut voir en Annexe A que les paramètre optimaux de régularisation pour le problème de reconstruction de l'image nette à partir de la connaissance du flou, et de reconstruction du noyau à partir de la connaissance de l'image nette, est obtenu pour une valeur « proche de zéro », ce qui est logique puisque que le niveau global de bruit ici présent est très faible. On rappelle qu'on n'effectue qu'une seule itération de point fixe pour f pour ces cas sans ajout de bruit.

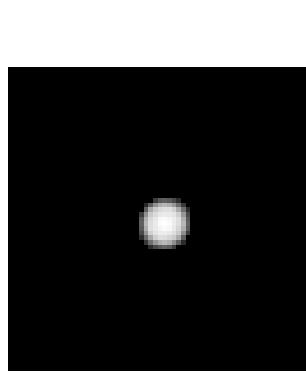
On pose donc $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, puisque ces valeurs sont (parmi les valeurs) optimales pour la restauration à flou connu dans le cas où l'on ne rajoute pas de bruit. La régularisation est ainsi ici nulle. Le flou et l'image reconstruits sont donnés en Fig. 3.14 (a) et (b). On constate que ce réglage donne des résultats corrects, dans le sens où l'image restaurée possède des contours bien plus nets, et que le flou reconstruit est proche du noyau réel effectif. En revanche, cette image est affectée par des artefacts, et l'on peut penser qu'elle n'est donc pas suffisamment régularisée, bien que, dans le cas du test avec flou connu, une valeur de α_1 fixée à zéro soit satisfaisante. Les indicateurs de qualité en Fig. 3.14 (b) et (c) montrent en effet une valeur de PSNR et de SSIM assez faible. Nous présentons également en Fig. 3.14 (d) et (e) les critères d'évolution sur l'image et le flou reconstruits. Représons que c'est celui sur f qui est utilisé pour l'arrêt de l'algorithme.

Ce test nous amène donc à penser que, en déconvolution aveugle, le paramètre de régularisation sur l'image doit être strictement positif (non nul), même quand l'image n'est affectée que par un très faible bruit, ou pas de bruit du tout.

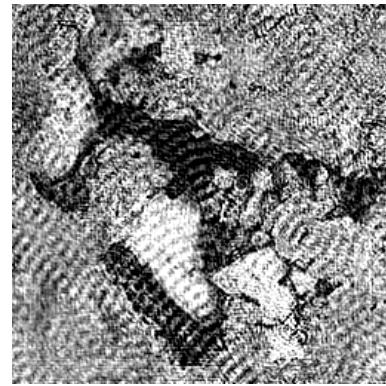
On va maintenant montrer comment un réglage à une valeur légèrement plus élevée des paramètres de régularisation permet d'arriver à une image beaucoup plus lisse, et d'une bien meilleure qualité. Nous posons alors $\alpha_1 = 10^{-4}$ et $\alpha_2 = 10^{-5}$. On s'aperçoit (cf. Fig. 3.15, que, pour une qualité de reconstruction du flou mesurée à peu près équivalente (à 1 dB près), l'image obtenue est nettement plus agréable visuellement, ce que confirme l'indice SSIM, à plus de 0,75 ici, contre 0,4 pour le cas précédent. L'autre point positif est que l'algorithme converge bien plus rapidement, avec un nombre d'itérations alternées deux fois moindre. Les courbes lisses d'évolution des critères et de mesure des indicateurs qualitatifs illustrent typiquement une reconstruction « qui se déroule bien ».

		Niveaux de bruit		
		$\sigma = 0$	$\sigma = 3$	$\sigma = 6$
		18,48 / 0,3445	18,44 / 0,3371	18,32 / 0,3170
Image dégradée g				
Essai 1	\tilde{f}	14,25 / 0,3905	17,18 / 0,2260	16,34 / 0,3875
	\tilde{h}	82,1 dB	58,3 dB	78,7 dB
Paramètres	$\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0$	$\alpha_1 = 10^{-4}, \alpha_2 = 10^{-5}$	$\alpha_1 = 10^{-3}, \alpha_2 = 3.10^8$	$\alpha_1 = 10^{-2}, \alpha_2 = 5.10^8$
	Figure	Fig. 3.14	Fig. 3.16	Fig. 3.19
Essai 2	\tilde{f}	23,10 / 0,7850	12,08 / 0,2293	20,38 / 0,5623
	\tilde{h}	82,3 dB	78,7 dB	79 dB
Paramètres	$\alpha_1 = 10^{-4}, \alpha_2 = 10^{-5}$	$\alpha_1 = 10^{-4}, \alpha_2 = 9.10^7$	$\alpha_1 = 5.10^{-3}, \alpha_2 = 3.10^8$	
	Figure	Fig. 3.15	Fig. 3.17	Fig. 3.20
Essai 3	\tilde{f}			20,70 / 0,5647
	\tilde{h}			78,8 dB
Paramètres			$\alpha_1 = 10^{-2}, \alpha_2 = 3.10^8$	
	Figure		Fig. 3.21	
Essai 4	\tilde{f}			15,13 / 0,3154
	\tilde{h}			77,5 dB
Paramètres			$\alpha_1 = 10^{-3}, \alpha_2 = 9.10^7$	
	Figure		Fig. 3.18	

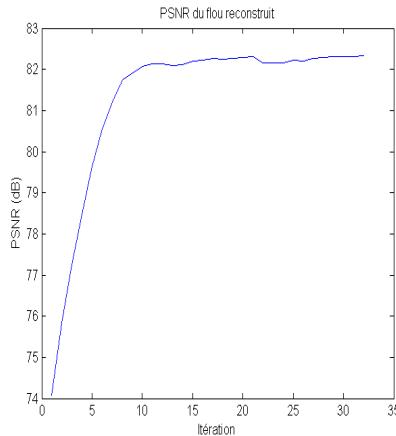
 TABLEAU 3.1 – Résultats de déconvolution aveugle de l'image *Nid de cailloux* défocalisée (PSNR (dB) et SSIM pour les images et PSNR pour les flous) suivant les différents niveaux de bruit et les paramètres utilisés (une seule itération de point fixe).



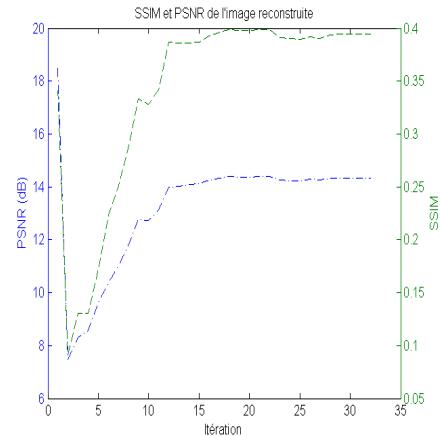
(a) Flou reconstruit



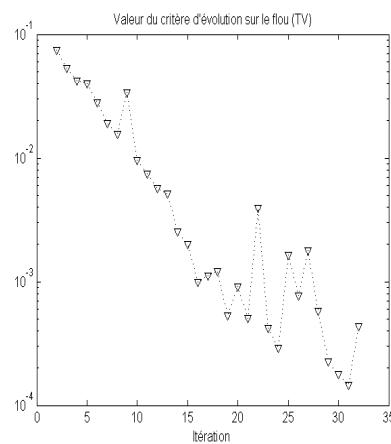
(b) Image reconstruite



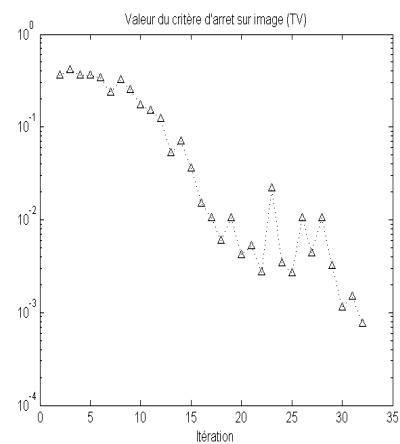
(c) Évolution du PSNR du flou



(d) Évolution du PSNR et SSIM de l'image



(e) Critère d'évolution sur le flou



(f) Critère d'évolution sur l'image

FIGURE 3.14 – Déconvolution de l'image *Nid de cailloux* défocalisée, sans bruit ajouté, avec $\alpha_1 = 0$ et $\alpha_2 = 0$ (une seule itération de point fixe).

		Niveaux de bruit		
		$\sigma = 3$	$\sigma = 6$	$\sigma = 9$
Image dégradée g	$PSNR (dB) / SSIM$	18,44 / 0,3371	18,32 / 0,3170	18,1 / 0,2926
Essai 1	\tilde{f}	21,73 / 0,6481	20,81 / 0,5561	19,77 / 0,4859
	\tilde{h}	80,79 dB	81,59 dB	78,54 dB
	Paramètres	$\alpha_1 = 20, \alpha_2 = 9 \cdot 10^7$	$\alpha_1 = 60, \alpha_2 = 9 \cdot 10^7$	$\alpha_1 = 100, \alpha_2 = 9 \cdot 10^7$
	Figure	Fig. 3.10	Fig. 3.22	Fig. 3.24

TABLEAU 3.2 – Résultats de déconvolution aveugle de l'image *Nid de cailloux* défocalisée (PSNR (dB) et SSIM pour les images et PSNR pour les flous) suivant les différents niveaux de bruit et les paramètres utilisés (itération de point fixe à critère d'arrêt).

On peut donc constater ici que la régularisation n'agit pas seulement comme un « stabilisateur » à l'amplification du bruit²⁵, mais également comme une contrainte sur le modèle d'image recherché, permettant de faire office de « rail guide » à la technique de déconvolution.

Cas avec ajout de bruit, $\sigma=3$. Nous considérons maintenant la même image, mais à laquelle a été ajouté un bruit blanc gaussien d'écart-type $\sigma = 3$. On se place tout d'abord dans le cas à une seule itération de point fixe pour f . Les mêmes derniers paramètres de régularisation $\alpha_1 = 10^{-4}$ et $\alpha_2 = 10^{-5}$ ont tout d'abord été essayés, afin de corroborer le fait que la valeur de α_1 doit être proportionnelle à σ , et que celle que nous avions utilisée dans le cas sans bruit ne peut donc se révéler valable ici.

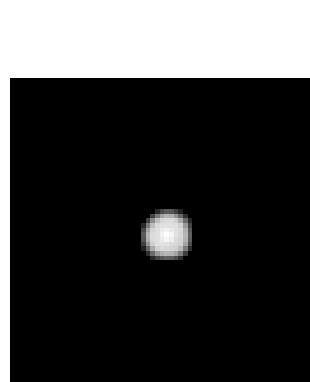
Le flou reconstruit reste de rayon trop petit pour restaurer efficacement l'image, de même que le grain dû au bruit n'est pas lissé, comme visible en Fig. 3.16. Le résultat médiocre est à mettre en rapport avec la valeur beaucoup trop faible du paramètre α_2 utilisé pour le noyau, de même que pour α_1 , pas assez important pour lisser le bruit amplifié à l'inversion.

Si nous prenons alors comme paramètre pour le flou, la valeur optimale du problème simple à image connue²⁶, soit $\alpha_2 = 9 \cdot 10^7$, et conservons $\alpha_1 = 10^{-4}$ pour l'image, nous arrivons aux résultats présentés en Fig. 3.17. L'image reconstruite est de nouveau trop bruitée, soit pas assez lissée par la régularisation. Un relevement de α_1 apparaît donc encore nécessaire. En revanche, le flou semble cette fois bien reconstruit, ce que confirment les bords bien nets présents dans l'image reconstruite. En présence de bruit, un paramètre fort pour le réglage de α_2 semble donc être requis, ce qui est à mettre en rapport avec la problématique du conditionnement dont nous parlions en introduction.

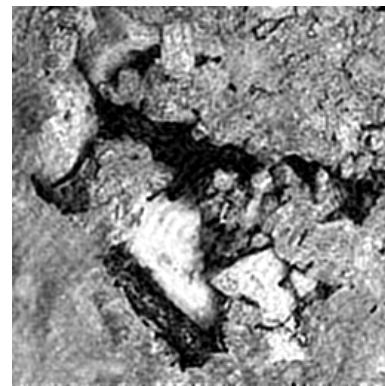
Si nous prenons $\alpha_1 = 10^{-3}$, comme nous l'avions présenté dans la Section 5.5 pour illustrer l'influence du nombre d'itérations de point fixe, alors le résultat est bien plus satisfaisant (cf. Fig. 3.8, p. 85). En effet, on observe des courbes d'évolution de PSNR et

25. On peut en effet voir en Annexe A que les paramètres de régularisation optimaux pour les problèmes « simples » (A.2) et (A.3) sont dans ce cas nuls (cf. p. 247).

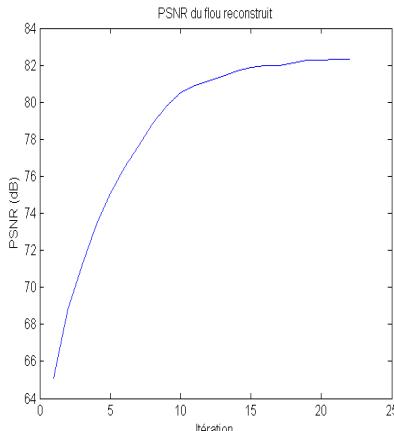
26. Cf. Tab. A.3, p. 256.



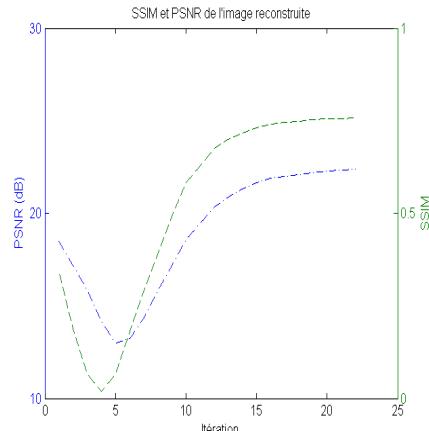
(a) Flou reconstruit



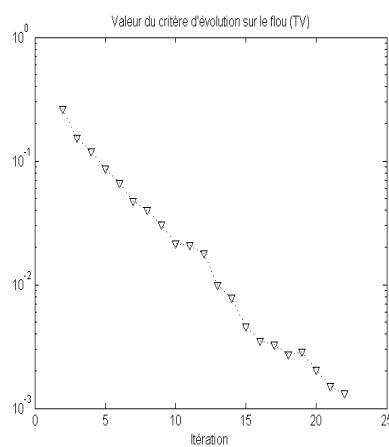
(b) Image reconstruite



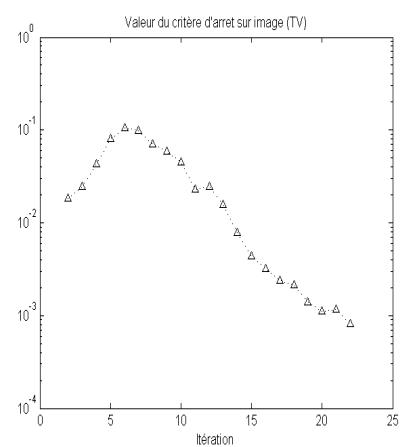
(c) Évolution du PSNR du flou



(d) Évolution du PSNR et SSIM de l'image



(e) Critère d'évolution sur le flou



(f) Critère d'évolution sur l'image

 FIGURE 3.15 – Déconvolution de l'image *Nid de cailloux* défocalisée, sans ajout de bruit, avec $\alpha_1 = 10^{-4}$ et $\alpha_2 = 10^{-5}$ (une seule itération de point fixe).

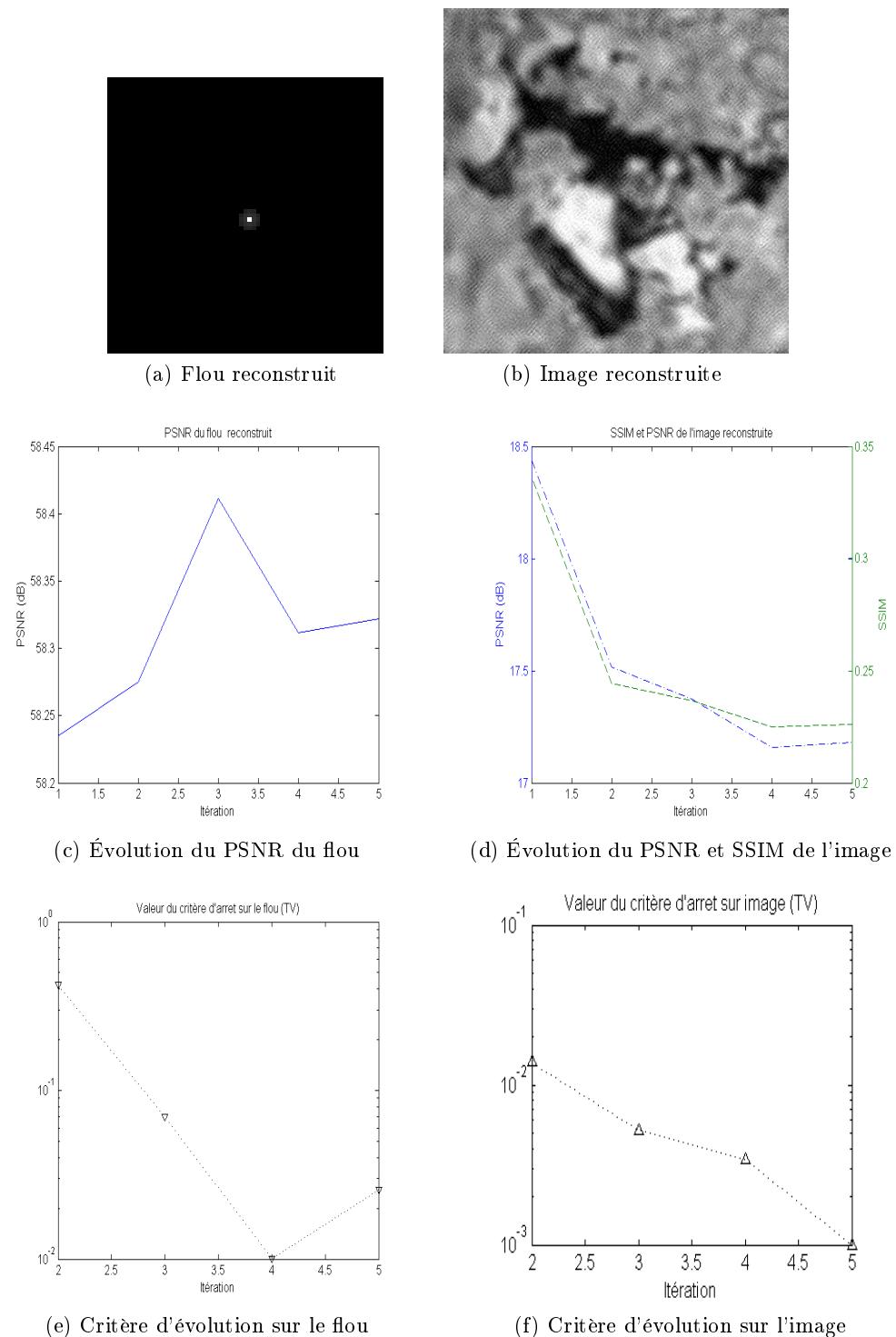
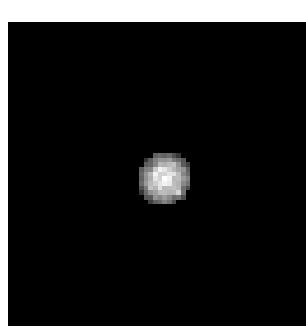
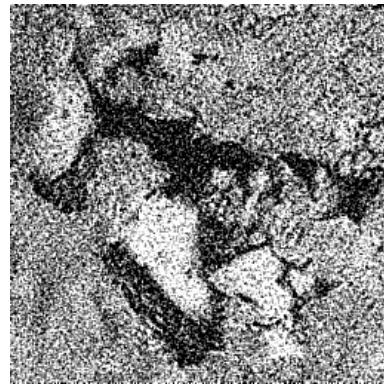


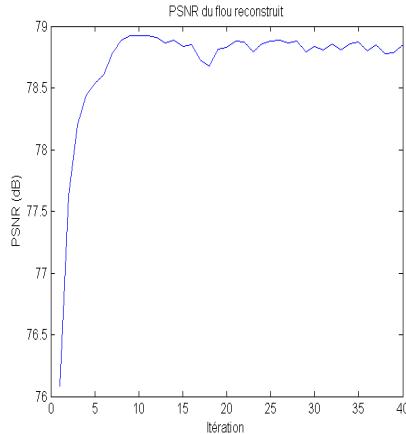
FIGURE 3.16 – Déconvolution de l'image *Nid de cailloux* défocalisée et bruitée ($\sigma = 3$), avec $\alpha_1 = 10^{-4}$ et $\alpha_2 = 10^{-5}$ (une seule itération de point fixe).



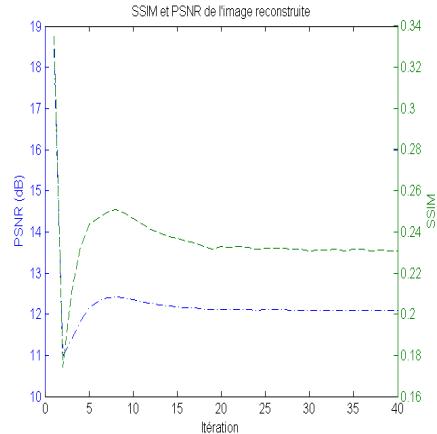
(a) Flou reconstruit



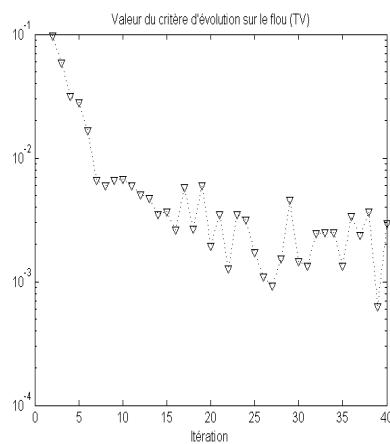
(b) Image reconstruite



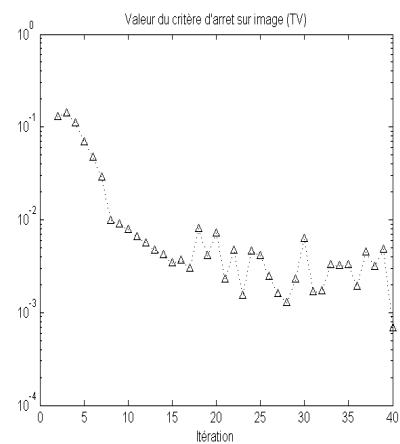
(c) Évolution du PSNR du flou



(d) Évolution du PSNR et SSIM de l'image



(e) Critère d'évolution sur le flou



(f) Critère d'évolution sur l'image

 FIGURE 3.17 – Déconvolution aveugle de l'image *Nid de cailloux* défocalisée et bruitée ($\sigma = 3$), avec $\alpha_1 = 10^{-4}$ et $\alpha_2 = 9 \cdot 10^7$ (une seule itération de point fixe).

SSIM à croissance presque monotone, ce qui est un bon indice de ce que l'on a appelé une reconstruction « se déroulant bien ».

Le cas avec nombre d'itération de point fixe libre, basé sur critère d'arrêt, a également déjà été présenté auparavant (cf. Fig. 3.7, p. 84). La valeur de α_1 avait alors été choisie conformément à la valeur optimal du problème à flou connu, comme donné dans le Tab. A.1. Les données \tilde{h} et \tilde{f} s'en étaient alors trouvées de qualité très satisfaisante.

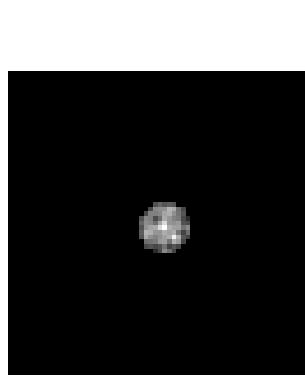
Cas avec ajout de bruit, $\sigma=6$. Comme dans le cas précédent avec bruit d'écart-type $\sigma = 3$, nous reprenons ici tout d'abord les valeurs optimales des paramètres à $\alpha_1 = 10^{-3}$ et $\alpha_2 = 9.10^7$. Ceci pour un premier essai de restauration avec une seule itération de point fixe. Les image et noyau reconstruits sont indiqués en Fig. 3.18. Encore une fois, et de manière non surprenante étant donnée la présence d'un bruit plus important, l'image est déflouée (au sens où les bords sont plutôt nets et l'image bien plus claire et agréable visuellement), mais de nouveau trop bruitée. La valeur α_1 nécessite donc d'être réglée plus haute.

Avant de considérer une valeur plus importante pour α_1 , et afin de constater l'effet d'un réglage sensiblement différent de α_2 , nous allons prendre comme valeur pour ce dernier paramètre celle qui est optimale dans le problème simple avec $\sigma = 6$, et qui se trouve être légèrement plus grande : $\alpha_2 = 3.10^8$ (cf. Tab. A.3, p. 256). Le réglage de $\alpha_1 = 10^{-3}$ ne change, lui, pas pour le moment. On constate évidemment que l'image obtenue n'est toujours pas assez lisse. Le flou reconstruit présente lui une forme assez similaire, plus lissée, avec un PSNR légèrement supérieur au cas précédent (cf. Fig. 3.19). Le choix de la valeur de α_2 suivant le problème non-aveugle à image connue, se trouve alors une fois de plus confirmé dans sa validité.

On prend maintenant une valeur légèrement supérieure pour le paramètre de régularisation sur f , à savoir $\alpha_1 = 5.10^{-3}$, de même que nous conservons $\alpha_2 = 3.10^8$, puisque celle-ci donnait de bons résultats, et est optimal pour ce niveau de bruit. On lisse alors un peu plus l'image. La Fig. 3.20 montre les résultats obtenus. Ceux-ci s'avèrent bien meilleurs (quoique très probablement encore améliorables) que pour les cas précédents avec $\alpha_1 = 10^{-3}$, autant visuellement que qualitativement. En outre la vitesse de convergence est bien meilleure, puisque seulement 9 itérations de minimisation alternée sont requises pour arriver à convergence. Le flou est toujours bien reconstruit, et c'est la valeur de α_1 qui n'est toujours pas optimale.

Si l'on choisit une valeur toujours plus élevée pour α_1 , par exemple $\alpha_1 = 10^{-2}$, afin de lisser davantage l'image, toujours avec $\alpha_2 = 3.10^8$, on observe les résultats de la Fig. 3.21. Ceux-ci sont mesurés par les indicateurs PSNR et SSIM à des niveaux très légèrement supérieurs, même si visuellement cette amélioration ne saute pas aux yeux par rapport au cas ci-avant. On semble en fait avoir atteint un palier dans la qualité de restauration que l'on peut escompter sur cette image, avec une seule itération de point fixe pour l'estimation de $\text{TV}(f)$. Ceci semble être confirmé car la croissance monotone des courbes PSNR et SSIM, en conjonction avec la décroissance quasi monotone des critères d'évolution.

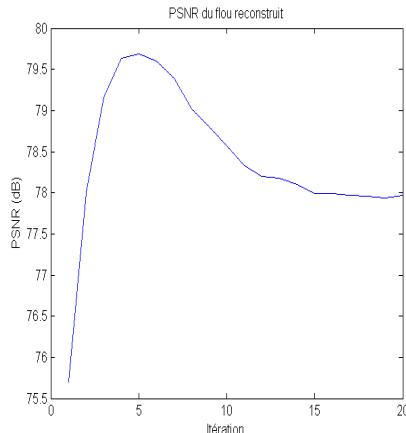
On effectue maintenant une restauration non plus en considérant une seule itération de point fixe pour l'estimation de l'image f , mais en utilisant un nombre déterminé par le critère d'arrêt. On considère alors $\alpha_1 = 60$ et $\alpha_2 = 9.10^7$. Cette première valeur correspondant à celle maximisant le SSIM de l'image restaurée lors du problème de déconvolution avec h connu (cf. Tab. A.1). Les résultats alors obtenus sont présentés en Fig. 3.22. On



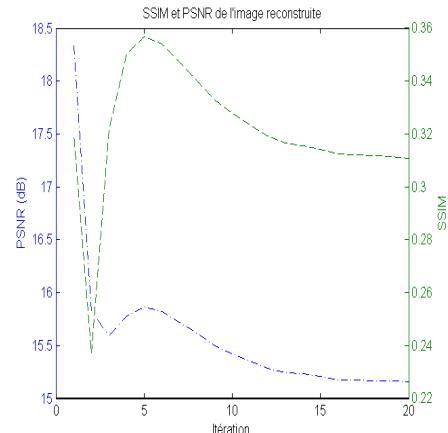
(a) Flou reconstruit



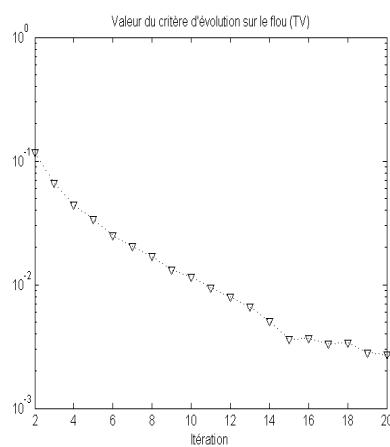
(b) Image reconstruite



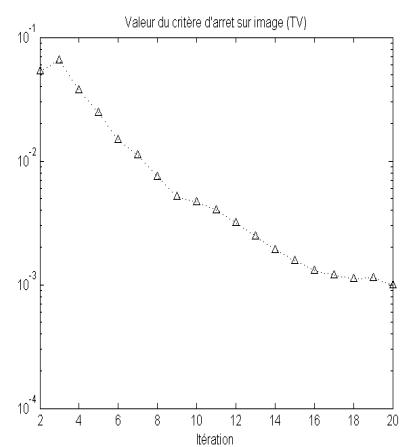
(c) Évolution du PSNR du flou



(d) Évolution du PSNR et SSIM de l'image



(e) Critère d'évolution sur le flou



(f) Critère d'évolution sur l'image

FIGURE 3.18 – Déconvolution aveugle de l'image *Nid de cailloux* défocalisée et bruitée ($\sigma = 6$), avec $\alpha_1 = 10^{-3}$ et $\alpha_2 = 9.10^7$ (une seule itération de point fixe).

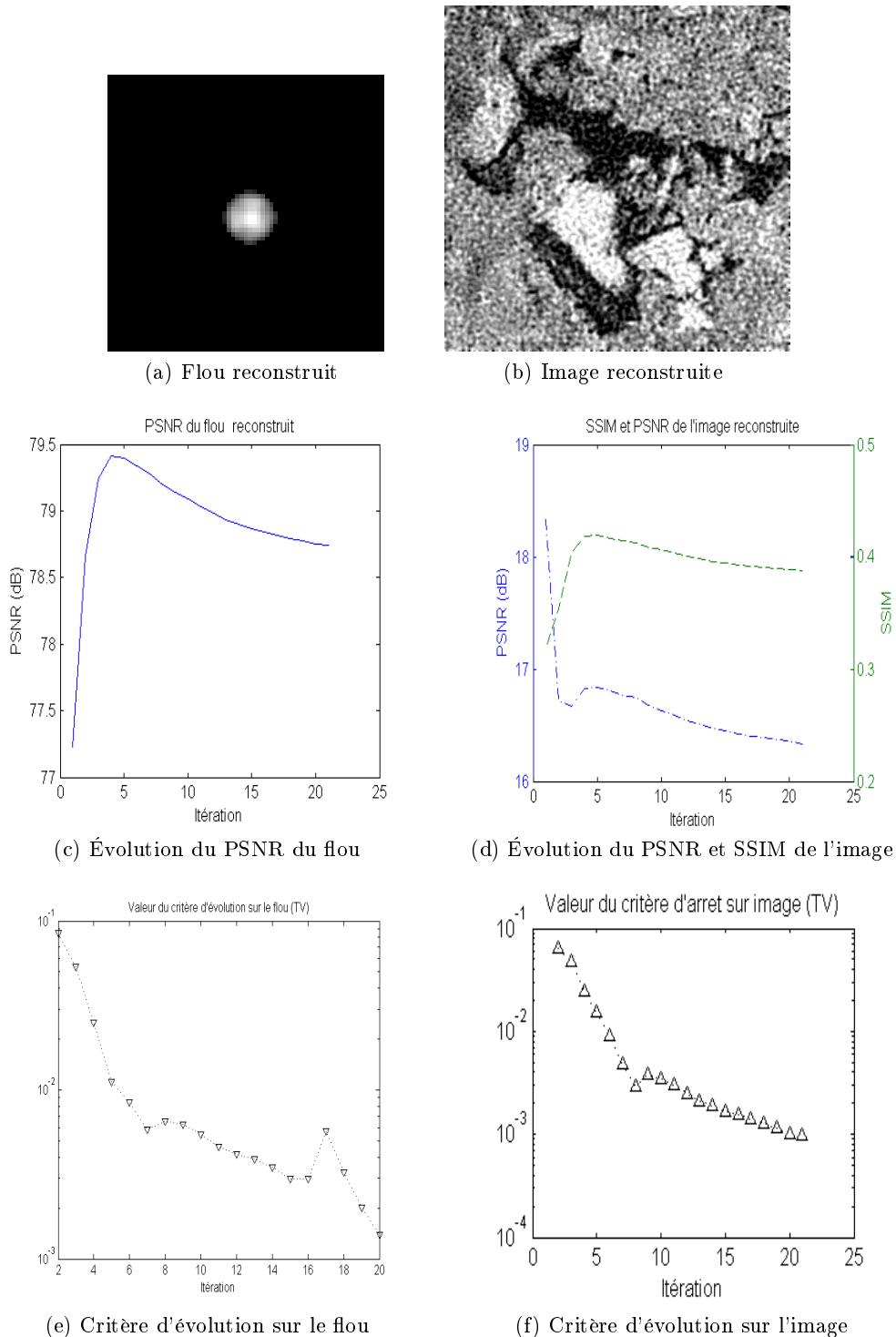
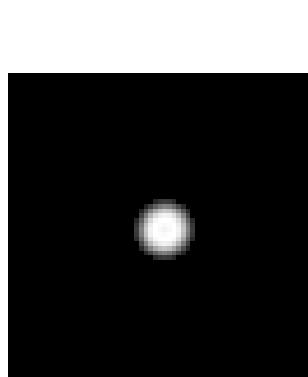
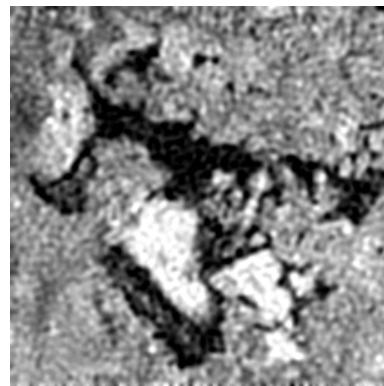


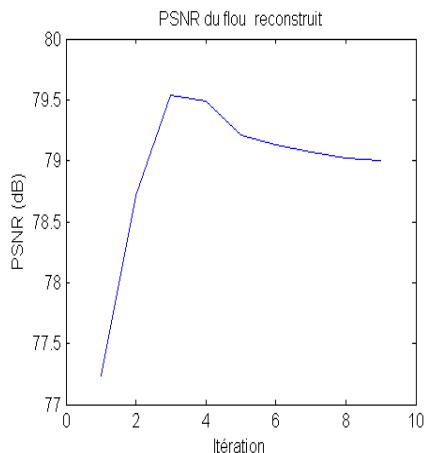
FIGURE 3.19 – Déconvolution aveugle de l'image *Nid de cailloux* défocalisée et bruitée ($\sigma = 6$), avec $\alpha_1 = 10^{-3}$ et $\alpha_2 = 3.10^8$ (une seule itération de point fixe).



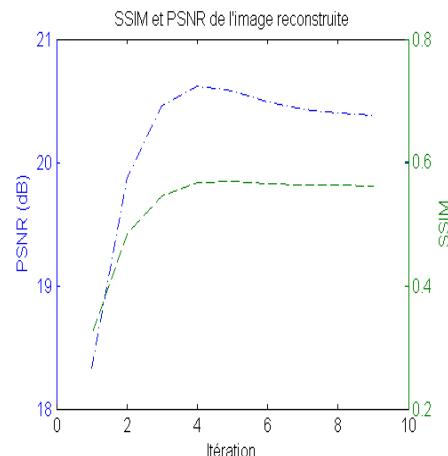
(a) Flou reconstruit



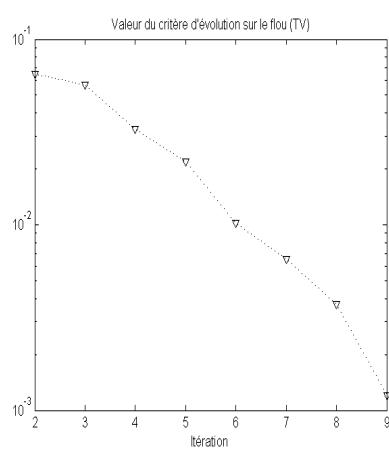
(b) Image reconstruite



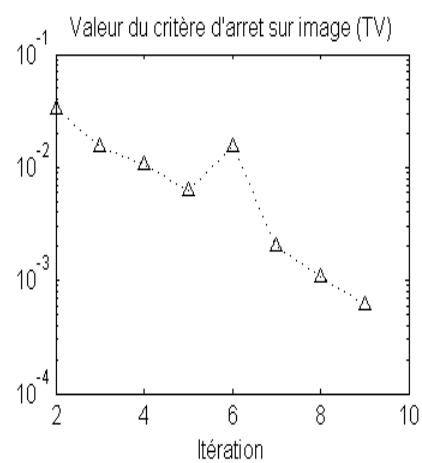
(c) Évolution du PSNR du flou



(d) Évolution du PSNR et SSIM de l'image



(e) Critère d'évolution sur le flou



(f) Critère d'évolution sur l'image

 FIGURE 3.20 – Déconvolution aveugle de l'image *Nid de cailloux* défocalisée et bruitée ($\sigma = 6$), avec $\alpha_1 = 5.10^{-3}$ et $\alpha_2 = 3.10^8$ (une seule itération de point fixe).

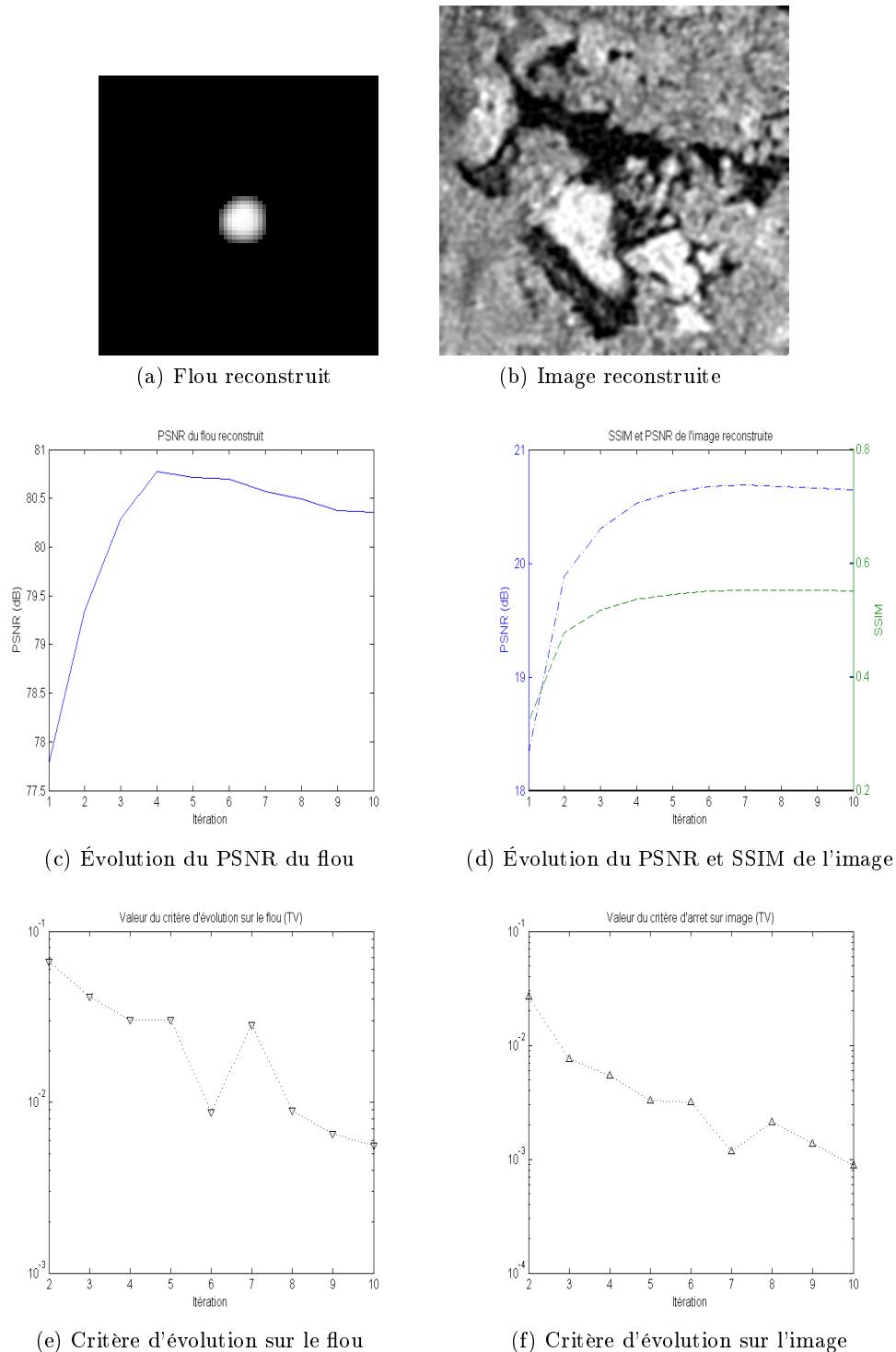


FIGURE 3.21 – Déconvolution aveugle de l'image *Nid de cailloux* défocalisée et bruitée ($\sigma = 6$), avec $\alpha_1 = 10^{-2}$ et $\alpha_2 = 3.10^8$ (une seule itération de point fixe).

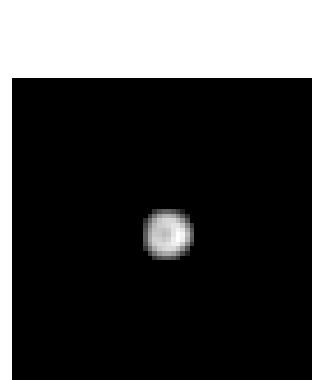
constate ici que l'image restaurée est bien nette, mais qu'elle présente des caractéristiques plus synthétiques, qu'elle est plus lissée. Ceci est en fait tout à fait en accord avec les caractéristiques des images résultant des lissages TV, semi-norme plus fidèlement approximée ici du fait de l'augmentation du nombre d'itérations de point fixe autorisé. Il est intéressant de voir que les indicateurs de mesure utilisés affichent ici des valeurs assez similaires aux cas précédents, quand une seule itération était considérée. Globalement, l'image est de même « qualité », mais fait simplement ressortir des éléments différents.

Cas avec ajout de bruit, $\sigma=9$. Nous considérons maintenant un dernier niveau de bruit, et le plus important, pour ces tests de défocalisation. Nous repassons au cas d'une seule itération de point fixe, et réglons les valeurs des paramètres de régularisation à $\alpha_1 = 10^{-2}$ et $\alpha_2 = 5 \cdot 10^8$, cette dernière valeur de α_2 correspondant à la valeur optimale obtenue pour cette intensité de bruit dans le problème de restauration simple avec f connue. Les résultats sont présentés en Fig. 3.23. Ceux-ci sont convenables, bien que forcément moins bons qu'avec $\sigma = 6$, vu le niveau de bruit présent relativement fort et le faible PSNR de l'image dégradée. Le flou est cependant bien reconstruit, et l'image correctement déflouée, dans la mesure de ce qui est possible en présence d'un tel niveau de bruit.

Terminons avec le cas utilisant un nombre d'itérations de point fixe suivant critère d'arrêt. On considère ici, pour les paramètres de régularisation, $\alpha_1 = 10^2$ et $\alpha_2 = 5 \cdot 10^8$, toujours suivant le principe de sélection d'après les valeurs optimales des problèmes de restauration simples associés. Les résultats obtenus sont donnés en Fig. 3.24. Alors que les PSNR et SSIM obtenus sont à peu de chose près équivalents à ceux observés dans le cas précédent avec une seule itération de point fixe, on constate une reconstruction assez différente de l'image : les bords sont mieux définis, mais l'image semble moins naturelle, avec des textures fortement lissées. Au final, le choix de l'une ou de l'autre possibilité d'itération de point fixe devra être laissé au choix de l'utilisateur, suivant ce qu'il cherche à observer dans la scène.

Test sur une autre image. Pour conclure nos expérimentations concernant les images défocalisées, et afin d'illustrer le fait que notre approche n'est pas limitée à l'image qui a été traitée jusqu'à présent, nous effectuons une expérimentation sur l'image *Reprise de béton*, qui sera affectée par le même noyau que celui considéré jusqu'à présent ($\rho = 5$), avec en sus un bruit blanc gaussien d'écart-type $\sigma = 3$.

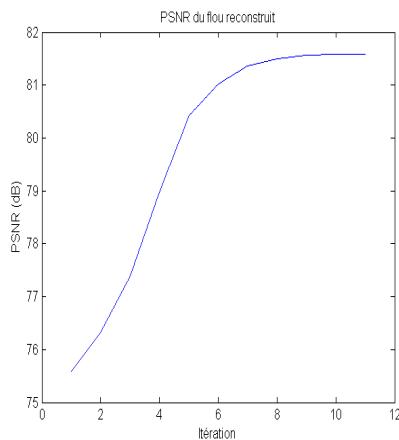
Afin de ne pas reprendre toute une batterie de tests, nous avons directement considéré le cas à itération de point fixe suivant critère d'arrêt, et avons fixé la valeur des paramètres de régularisation à $\alpha_1 = 10$, et deux niveaux de régularisation sur h , avec premièrement $\alpha_2 = 1$ (valeur volontairement trop faible), puis $\alpha_2 = 10^8$, qui est la valeur optimale du problème simple associé. L'image et le flou reconstruits suivant ces différentes combinaisons de paramètres sont données en Fig. 3.25 (a) et (b). Sans surprise, et conformément à ce qu'on avait observé jusqu'à présent, le noyau n'est dans le premier cas pas suffisamment bien estimé pour pouvoir engendrer un déflouage satisfaisant de l'image. Bien que sa forme se devine déjà, ses coefficients ne sont pas uniformément répartis sur un disque. En revanche, le deuxième cas est beaucoup plus probant, et permet d'arriver à une restauration certaine, toujours au prix d'un aspect légèrement synthétique dû au lissage TV. En Fig. 3.25 (c), nous avons réalisé une coupe de l'image en son niveau horizontal milieu, qui permet de visualiser différemment l'effet de l'algorithme de déconvolution. Par rapport à l'image floue, celle qui est obtenue en sortie présente alors des bords autrement plus francs.



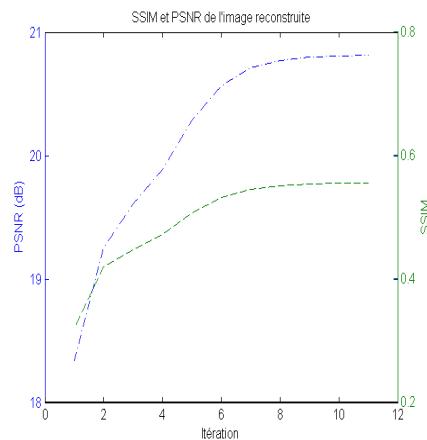
(a) Flou reconstruit



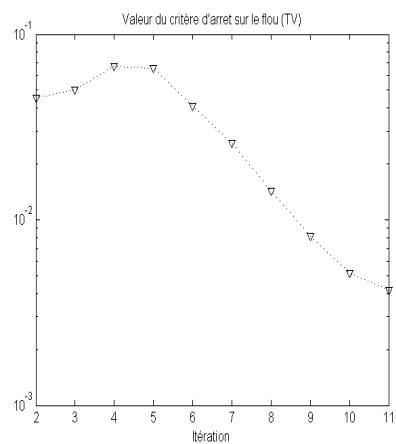
(b) Image reconstruite



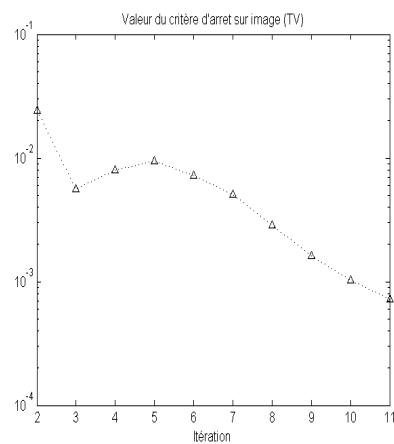
(c) Évolution du PSNR du flou



(d) Évolution du PSNR et SSIM de l'image

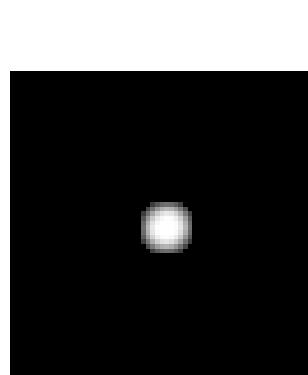


(e) Critère d'évolution sur le flou

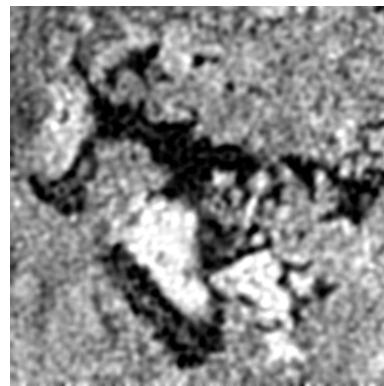


(f) Critère d'évolution sur l'image

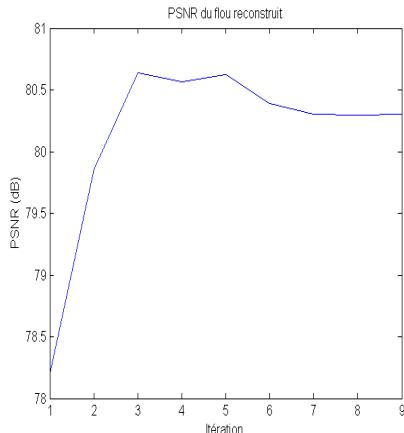
FIGURE 3.22 – Déconvolution aveugle de l'image *Nid de cailloux* défocalisée et bruitée ($\sigma = 6$), avec $\alpha_1 = 60$ et $\alpha_2 = 9.10^7$ (itération de point fixe à critère d'arrêt).



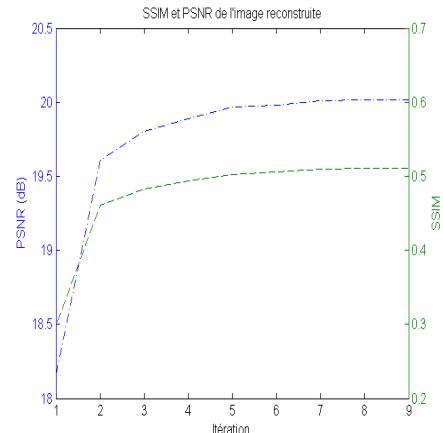
(a) Flou reconstruit



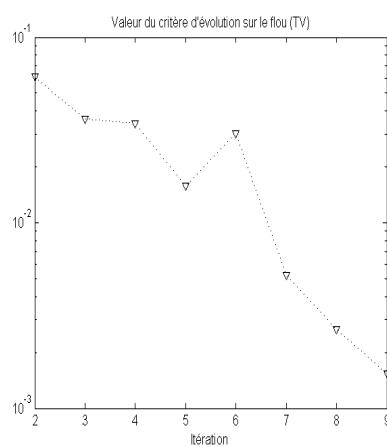
(b) Image reconstruite



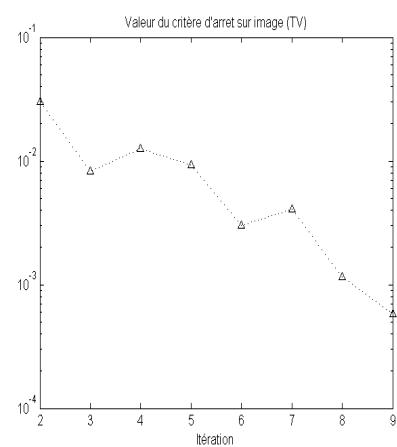
(c) Évolution du PSNR du flou



(d) Évolution du PSNR et SSIM de l'image

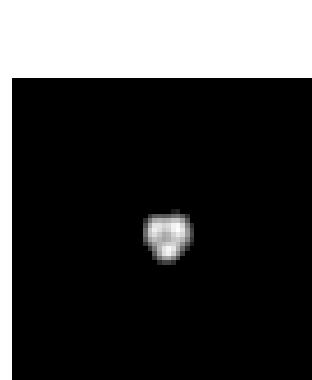


(e) Critère d'évolution sur le flou

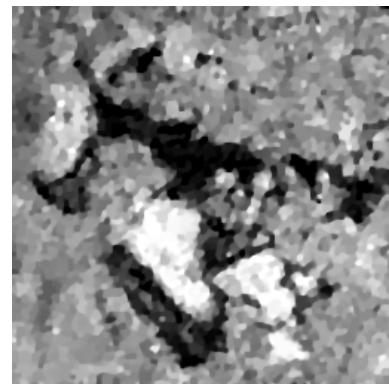


(f) Critère d'évolution sur l'image

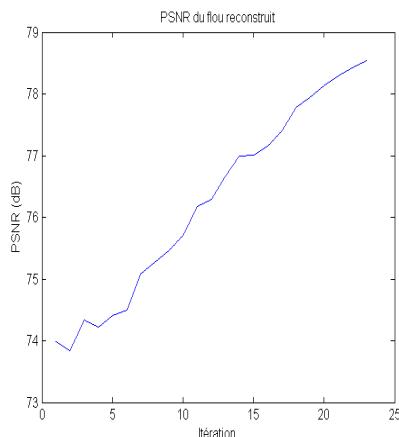
 FIGURE 3.23 – Déconvolution aveugle de l'image *Nid de cailloux* défocalisée et bruitée ($\sigma = 9$), avec $\alpha_1 = 10^{-2}$ et $\alpha_2 = 5.10^8$ (une seule itération de point fixe).



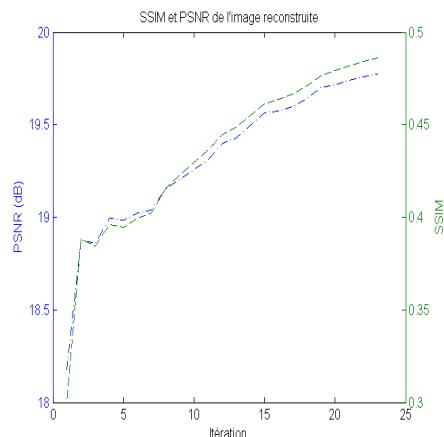
(a) Flou reconstruit



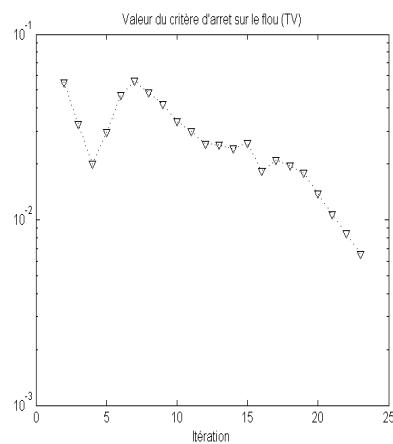
(b) Image reconstruite



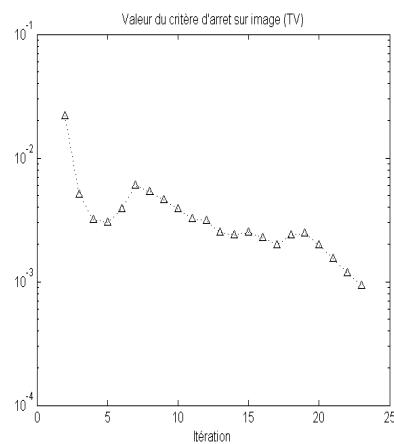
(c) Évolution du PSNR du flou



(d) Évolution du PSNR et SSIM de l'image

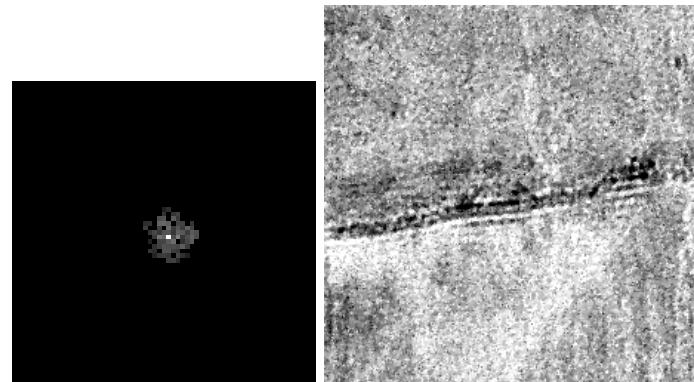


(e) Critère d'évolution sur le flou

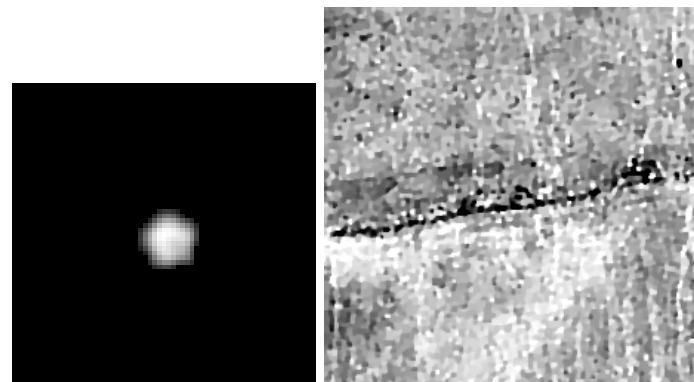


(f) Critère d'évolution sur l'image

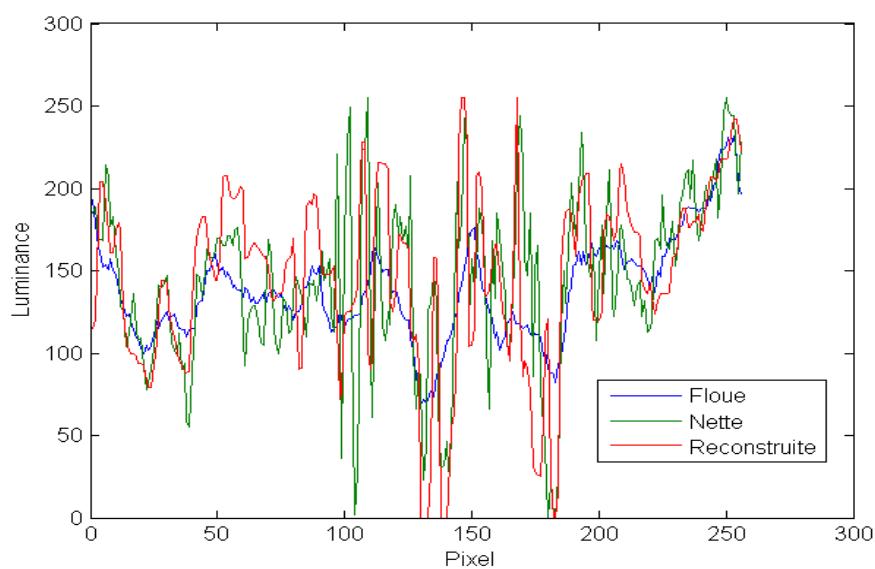
FIGURE 3.24 – Déconvolution aveugle de l'image *Nid de cailloux* défocalisée et bruitée ($\sigma = 9$), avec $\alpha_1 = 10^2$ et $\alpha_2 = 5.10^8$ (itération de point fixe à critère d'arrêt).



(a) Flou et image reconstruits avec $\alpha_2 = 1$



(b) Flou et image reconstruits avec $\alpha_2 = 10^8$



(c) Vue en coupe de l'image nette originale, de l'image floue et de l'image reconstruite

FIGURE 3.25 – Déconvolution aveugle de l'image *Reprise de béton* défocalisée et bruitée ($\sigma = 3$), avec $\alpha_1 = 10$ (itération de point fixe à critère d'arrêt).

6.2.1 Synthèse sur les tests avec défocalisation

Après cet ensemble de tests se rapportant à la défocalisation, on peut tirer quelques conclusions quant au réglage des paramètres de régularisation.

Concernant α_1 , paramètre de régularisation sur l'image, sa valeur doit effectivement être réglée proportionnellement au bruit présent dans l'image, ce qui vérifie bien l'assertion de Chan et Wong présentée en Section 5.3. Suivant le nombre d'itérations de point fixe considéré, la plage de valeur de α_1 peut être assez grande. Néanmoins, ce qui apparaît clairement est que la valeur optimale de α_1 dans de tels problèmes aveugles semble être identique à celle à considérer pour le problème de restauration simple, dans lequel on chercherait à déflouer l'image à partir de la connaissance exacte du noyau de défocalisation. Sur le cas d'images contenant très peu ou pas de bruit, une valeur faible de α_1 , de l'ordre de 10^{-5} , suffira à « guider » l'algorithme vers une solution acceptable.

Quant à α_2 , paramètre de régularisation sur le flou, bien que nous n'ayons effectué qu'une seule itération de point fixe dans tous les cas afin de l'estimer, sa valeur optimale semble correspondre également à celle étant optimale pour le problème simple associé, soit d'estimation du noyau à partir de la connaissance de l'image nette. Ce problème simple étant cependant considéré avec itération de point fixe suivant critère d'arrêt. En effet, le seuillage que nous mettons en œuvre sur l'estimée de h après une seule itération, en aveugle, joue en quelque sorte un effet comparable à des itérations supplémentaires.

Heuristiquement, on a pu voir que les cas de déconvolution « se déroulant bien » présentaient des courbes de PSNR et SSIM à croissance monotone, en conjonction avec une décroissance monotone des évolution des reconstruction de l'image et du flou.

Pour terminer, complétons en disant qu'il n'a pas été nécessaire ici de modifier à aucun moment la valeur empirique de $\zeta = 1/10$ utilisée dans l'approche de seuillage.

6.3 Tests sur images affectées par un flou de mouvement

Nous allons maintenant effectuer le même type de tests que pour la défocalisation, sur l'image de la Fig. 3.13 (d), affectée par un flou de mouvement, de longueur $l = 11$ et d'orientation $\theta = 45^\circ$. Ceci donne alors l'image flouée de la Fig. 3.13 (f). Notre algorithme sera utilisé, comme pour les tests avec défocalisation, en présence des trois niveaux de bruit : $\sigma = 3$, $\sigma = 6$ et $\sigma = 9$.

Comme pour la section précédente, nous présentons la synthèse de l'ensemble des résultats obtenus dans les Tab. 3.3 et Tab. 3.4, concernant respectivement la restauration avec une seule itération de point fixe, et avec un nombre d'itérations suivant critère d'arrêt.

Cas sans ajout de bruit. On considère tout d'abord l'image uniquement flouée, sans lui ajouter de bruit. Si l'on fixe $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, on peut (re)montrer que ces valeurs, bien qu'optimales pour les problèmes de restauration à flou ou à image connus (cela ramène alors à une absence de régularisation, soit au filtrage inverse) ne le sont plus en aveugle. Le résultat de restauration n'est alors, comme pour le cas de la défocalisation sans ajout de bruit, pas assez lissé.

		Niveaux de bruit			
		$\sigma = 0$	$\sigma = 3$	$\sigma = 6$	$\sigma = 9$
Image dégradée g $PSNR$ (dB) / $SSIM$	20,38 / 0,393	20,32 / 0,3851	20,13 / 0,3622	19,81 / 0,332	
	\tilde{f}	22,99 / 0,7617	15,93 / 0,3702	21,49 / 0,5877	16,92 / 0,2858
Essai 1 Paramètres	\tilde{h}	66 dB	63 dB	64,7 dB	62 dB
	$\alpha_1 = 10^{-4}$, $\alpha_2 = 10^{-5}$	$\alpha_1 = 10^{-3}$, $\alpha_2 = 10^8$	$\alpha_1 = 10^{-2}$, $\alpha_2 = 10^8$	$\alpha_1 = 10^{-2}$, $\alpha_2 = 10^9$	
Seuillage Figure	$\zeta = 1/10$	$\zeta = 1/10$	$\zeta = 1/5$	$\zeta = 1/5$	$\zeta = 1/5$
	Fig. 3.26	Fig. 3.27	Fig. 3.30	Fig. 3.34	Fig. 3.34
Essai 2 Paramètres	\tilde{f}	21,18 / 0,601	21,44 / 0,5842	19,19 / 0,4232	
	\tilde{h}	63,9 dB	64,65 dB	63	
Seuillage Figure	$\alpha_1 = 10^{-2}$, $\alpha_2 = 10^8$	$\alpha_1 = 10^{-2}$, $\alpha_2 = 3.10^3$	$\alpha_1 = 10^{-2}$, $\alpha_2 = 10^9$	$\alpha_1 = 10^{-2}$, $\alpha_2 = 10^9$	
	$\zeta = 1/5$	$\zeta = 1/10$	$\zeta = 1/10$	$\zeta = 1/3$	Fig. 3.35
		Fig. 3.28	Fig. 3.31	Fig. 3.31	Fig. 3.35

TABLEAU 3.3 – Résultats de déconvolution aveugle de l'image *Reprise de béton* avec mouvement (PSNR (dB) et SSIM pour les images et PSNR pour les flous) suivant les différents niveaux de bruit et les paramètres utilisés (une seule itération de point fixe).

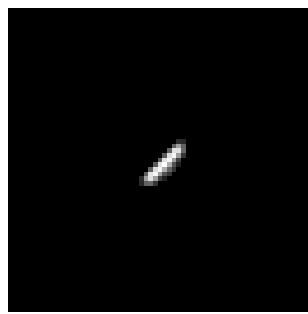
		Niveaux de bruit		
		$\sigma = 3$	$\sigma = 6$	$\sigma = 9$
Image dégradée g	$PSNR (dB) / SSIM$	20,31 / 0,3851	20,13 / 0,3622	19,81 / 0,332
Essai 1	\tilde{f}	19,74 / 0,5091	19 / 0,4428	19,89 / 0,3865
	\tilde{h}	65,6 dB	63,9 dB	63,9 dB
	Paramètres	$\alpha_1 = 30, \alpha_2 = 5 \cdot 10^6$	$\alpha_1 = 90, \alpha_2 = 8 \cdot 10^7$	$\alpha_1 = 200, \alpha_2 = 10^8$
	Seuillage	$\zeta = 1/10$	$\zeta = 1/10$	$\zeta = 1/3$
	Figure	Fig. 3.29	Fig. 3.32	Fig. 3.36
Essai 2	\tilde{f}		21,23 / 0,5668	
	\tilde{h}		64,9 dB	
	Paramètres		$\alpha_1 = 90, \alpha_2 = 8 \cdot 10^7$	
	Seuillage		$\zeta = 1/5$	
	Figure		Fig. 3.33	

TABLEAU 3.4 – Résultats de déconvolution aveugle de l'image *Reprise de béton* avec mouvement (PSNR (dB) et SSIM pour les images et PSNR pour les flous) suivant les différents niveaux de bruit et les paramètres utilisés (itération de point fixe à critère d'arrêt).

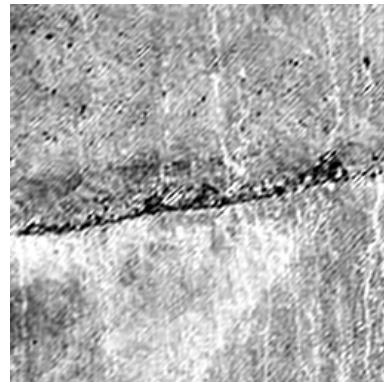
Un réglage (empirique) satisfaisant pour les paramètres de régularisation est obtenu avec $\alpha_1 = 10^{-3}$ et $\alpha_2 = 10^{-5}$. En effet, on peut constater de par la Fig. 3.26 que la déconvolution est de bonne qualité, bien que le noyau reconstruit ait une forme se rapprochant davantage d'une rectangle très étalé que d'un segment. Néanmoins, son orientation est bien estimée, de même que la longueur de son support, d'où une restauration efficiente.

Cas avec ajout de bruit, $\sigma=3$. Nous examinons maintenant l'image flouée contaminée par un bruit blanc gaussien d'écart-type $\sigma = 3$. Nous choisissons de fixer les paramètres de régularisation à $\alpha_1 = 10^{-3}$ et $\alpha_2 = 10^8$. Ce réglage de α_1 est pris à la même valeur que pour le cas sans ajout de bruit, et on doit alors s'attendre à une reconstruction de l'image qui ne soit pas suffisamment lisse. En revanche, α_2 est fixé comme approximativement égal à ce qui était nécessaire pour les cas de défocalisation avec le même niveau de bruit, mais supérieur à la valeur optimale pour le problème de déconvolution à image nette connue (A.3) (cf. p. 247). Ceci vu les constatations précédentes d'après lesquelles le paramètre α_2 doit être choisi à une valeur forte en présence de bruit, et afin de nous placer dans un contexte où nous ne connaîtrions pas cette valeur optimale. La Fig. 3.27 nous montre une reconstruction du flou et de l'image moyennement bonne. En effet la forme du flou est assez épaisse, parallélépipédique, et son PSNR se dégrade à chaque itération de l'algorithme. De plus, sa reconstruction présente une difformité. Conséutivement, l'image reconstruite ne peut être parfaitement déflouée, et, en outre, exhibe un grain trop fort. Cependant, elle est clairement déjà plus nette que l'image de départ. Les indicateurs de PSNR et SSIM sont médiocres, ce qui tend à confirmer que la valeur de α_1 doit obligatoirement être augmentée proportionnellement à σ .

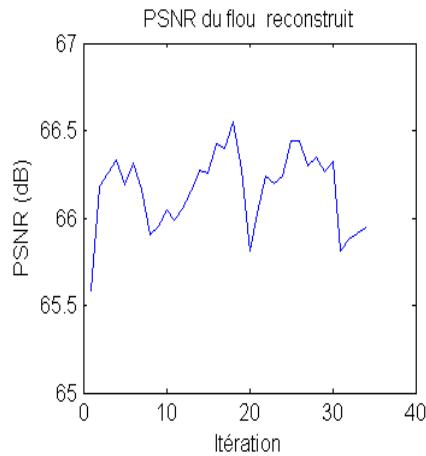
On réeffectue alors une démarche empirique en réhaussant α_1 , afin d'augmenter le lissage de f , toujours dans un schéma à une seule itération de point fixe. On prend



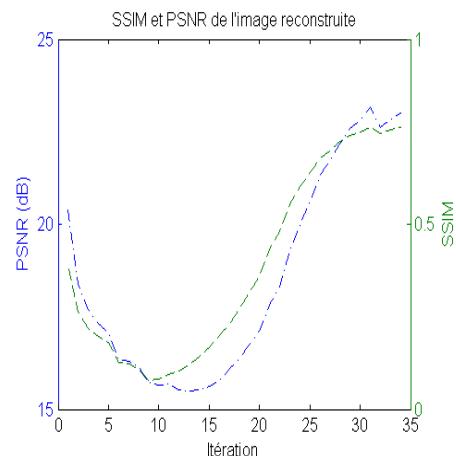
(a) Flou reconstruit



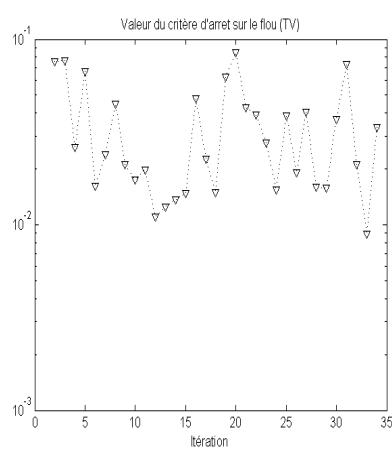
(b) Image reconstruite



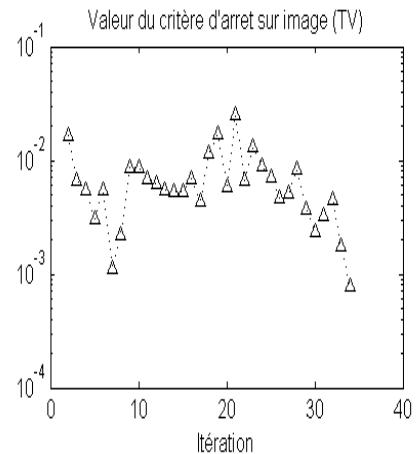
(c) Évolution du PSNR du flou



(d) Évolution du PSNR et SSIM de l'image



(e) Critère d'évolution sur le flou



(f) Critère d'évolution sur l'image

FIGURE 3.26 – Déconvolution aveugle de l'image *Reprise de béton* avec mouvement, sans bruit ajouté, avec $\alpha_1 = 10^{-3}$ et $\alpha_2 = 10^{-5}$ (une seule itération de point fixe).

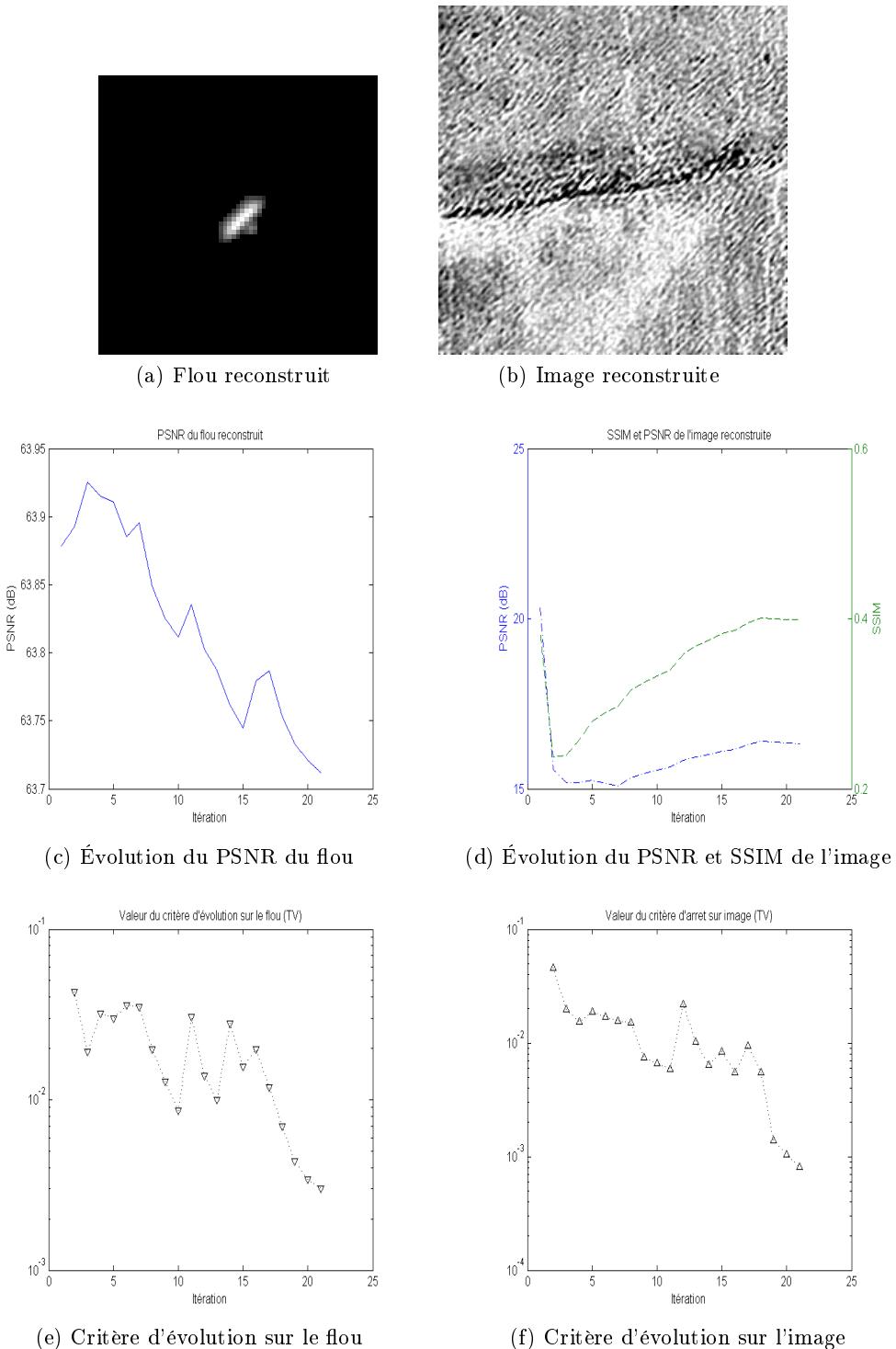


FIGURE 3.27 – Déconvolution aveugle de l'image *Reprise de béton* avec mouvement et bruitée ($\sigma = 3$), avec $\alpha_1 = 10^{-3}$ et $\alpha_2 = 10^8$ (une seule itération de point fixe).

comme valeur des paramètres $\alpha_1 = 10^{-2}$ et le même $\alpha_2 = 10^8$. L'image déflouée doit donc normalement être davantage régularisée. Et c'est bien ce qui se produit (cf. Fig. 3.28), peut-être même légèrement trop, visuellement parlant. En effet, les bords semblent moins francs ; l'approximation TV avec une itération de point fixe est donc insuffisante. Cependant, la mesure des indices de PSNR et SSIM plaide largement en faveur de ce réglage et non du précédent, avec des valeurs bien plus élevées ici. La convergence est également bien plus rapide, avec un nombre d'itérations requises pour arriver à la précision souhaitée divisé par deux.

Dans le cas d'un nombre d'itérations de point fixe suivant critère d'arrêt, on choisit $\alpha_1 = 30$ et $\alpha_2 = 5 \cdot 10^{-6}$, soit les valeurs optimales pour les problèmes simples associés²⁷, nous obtenons les résultats présentés en Fig. 3.29. On constate des reconstructions assez différentes du cas à une seule itération de point fixe : l'image est mieux déflouée, le noyau plus réaliste. Comme dans les tests avec défocalisation, les indicateurs qualitatifs ne reflètent cependant pas ceci, et exhibent ici globalement des niveaux équivalents, voir inférieurs aux cas de reconstruction avec une seule itération de point fixe ! Le désavantage majeur présent est alors la durée du processus, puisque près de 45 itérations alternées sont effectuées (et à mettre en rapport avec le nombre d'itérations de point fixe à chaque boucle), contre seulement 17 dans le cas précédent. Des avantages et des inconvénients sont donc présents pour les deux approches d'itération de point fixe.

Cas avec ajout de bruit, $\sigma=6$. Examinons maintenant le cas de l'image à laquelle a été ajouté un bruit blanc gaussien d'écart-type $\sigma = 6$. Si nous commençons par « naïvement » appliquer les paramètres optimaux issus du cas ci-dessus, à une seule itération de point fixe ($\alpha_1 = 10^{-2}$ et $\alpha_2 = 10^8$), nous arriverions alors à une reconstruction de h trop étalée, trop épaisse, pour être assimilable au segment caractéristique du flou de mouvement. Le résultat n'est pas présenté ici en raison de sa médiocrité trop grande.

On va alors pour la première fois modifier la valeur de ζ , en la relevant sensiblement, ce qui va résulter en un seuillage plus important, et donc une reconstruction du noyau plus affinée. On fixe donc $\zeta = 1/5$, soit une valeur deux fois plus importante que précédemment.

Le flou reconstruit et l'image déflouée sont donnés en Fig. 3.30. Par rapport à l'image floue de départ, l'amélioration est incontestable, de même que la convergence est plutôt rapide (9 itérations). En outre, on s'aperçoit que si l'on compare la reconstruction du noyau avec celle de la Fig. 3.28 ou même de la Fig. 3.27, celui obtenu ici est bien plus fin, malgré le niveau de bruit présent plus important, grâce à l'effet du ζ modifié. On peut également remarquer la croissance presque monotone des courbes de PSNR et SSIM, et la décroissance des critères d'évolution, ce qui est un bon signe de comportement de la méthode.

Il est intéressant de voir ce qui se passe si le paramètre ϵ - portant sur le critère d'arrêt de l'algorithme alterné - est réglé à une valeur plus faible, telle que $\epsilon = 10^{-4}$, pour la même configuration. Les paramètres de régularisation sont donc réglés de la même façon que ci-dessus à $\alpha_1 = 10^{-2}$ et $\alpha_2 = 10^8$. Le seuillage du flou est également pris au même niveau ($\zeta = 1/5$). Le nombre d'itérations du cas précédent ayant été très limité, va-t-il augmenter ici, ou la restauration « optimale » a-t-elle déjà été atteinte pour le cas précédent avec $\epsilon = 10^{-3}$? Force est de constater que les indicateurs de PSNR et SSIM (cf. Fig. 3.31) sont stables au-delà de la dixième itération environ. On n'a donc pas d'amélioration mesurée,

27. Cf. Tab. A.2 et Tab. A.4.

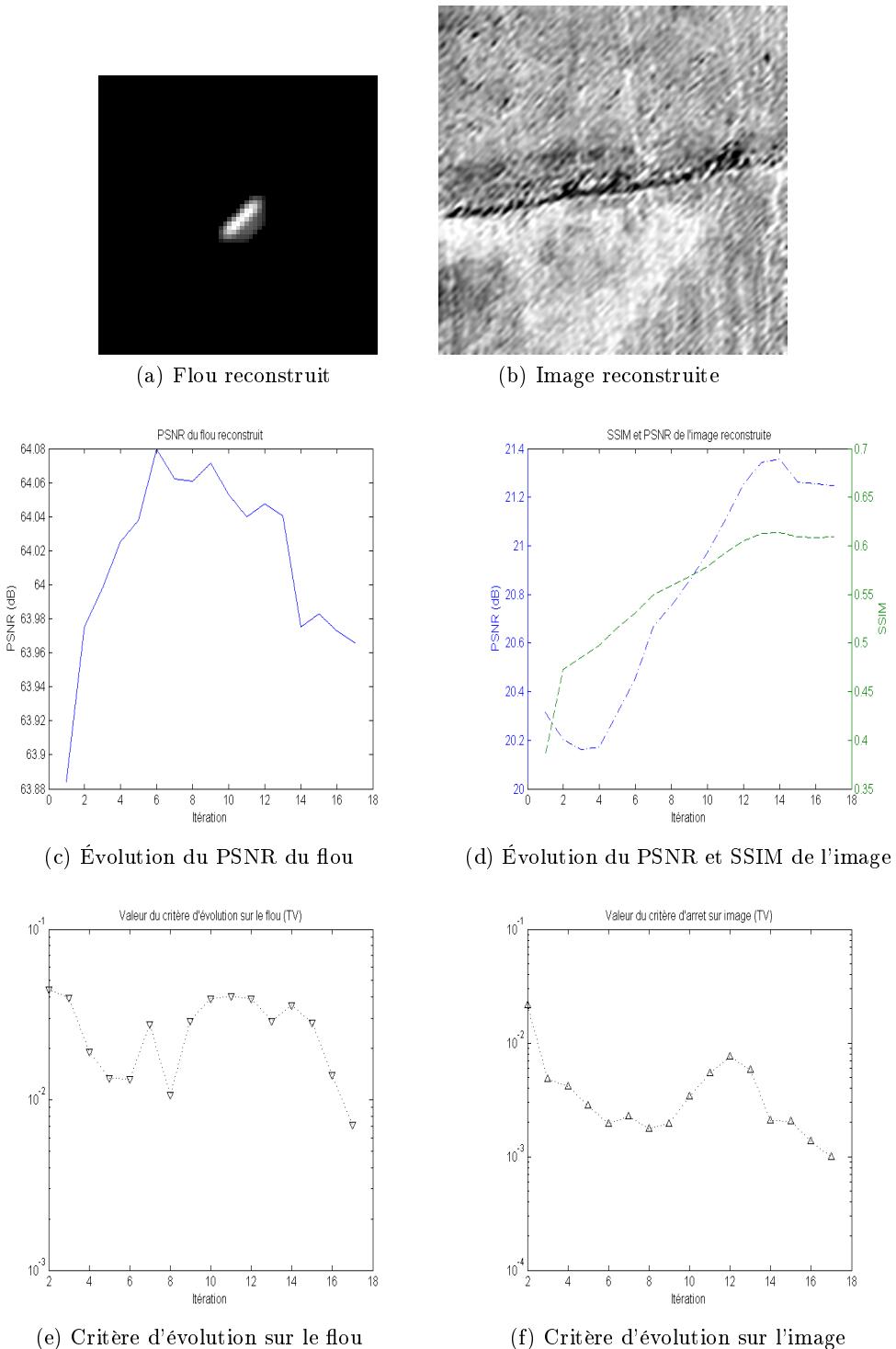
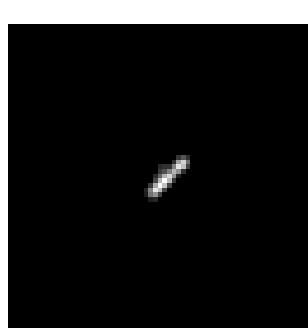


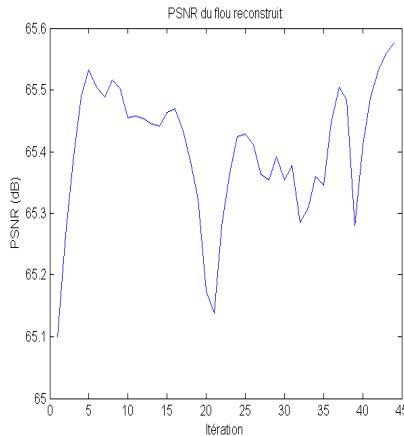
FIGURE 3.28 – Déconvolution aveugle de l'image *Reprise de béton* avec mouvement et bruitée ($\sigma = 3$), avec $\alpha_1 = 10^{-2}$ et $\alpha_2 = 10^8$ (une seule itération de point fixe).



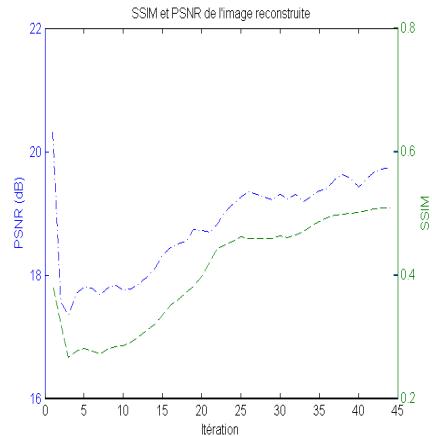
(a) Flou reconstruit



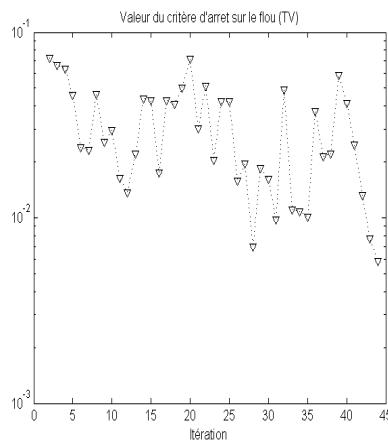
(b) Image reconstruite



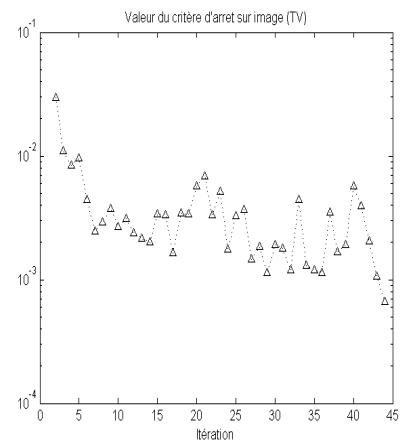
(c) Évolution du PSNR du flou



(d) Évolution du PSNR et SSIM de l'image



(e) Critère d'évolution sur le flou



(f) Critère d'évolution sur l'image

 FIGURE 3.29 – Déconvolution aveugle de l'image *Reprise de béton* avec mouvement et bruitée ($\sigma = 3$), avec $\alpha_1 = 30$ et $\alpha_2 = 5 \cdot 10^6$ (itération de point fixe à critère d'arrêt).

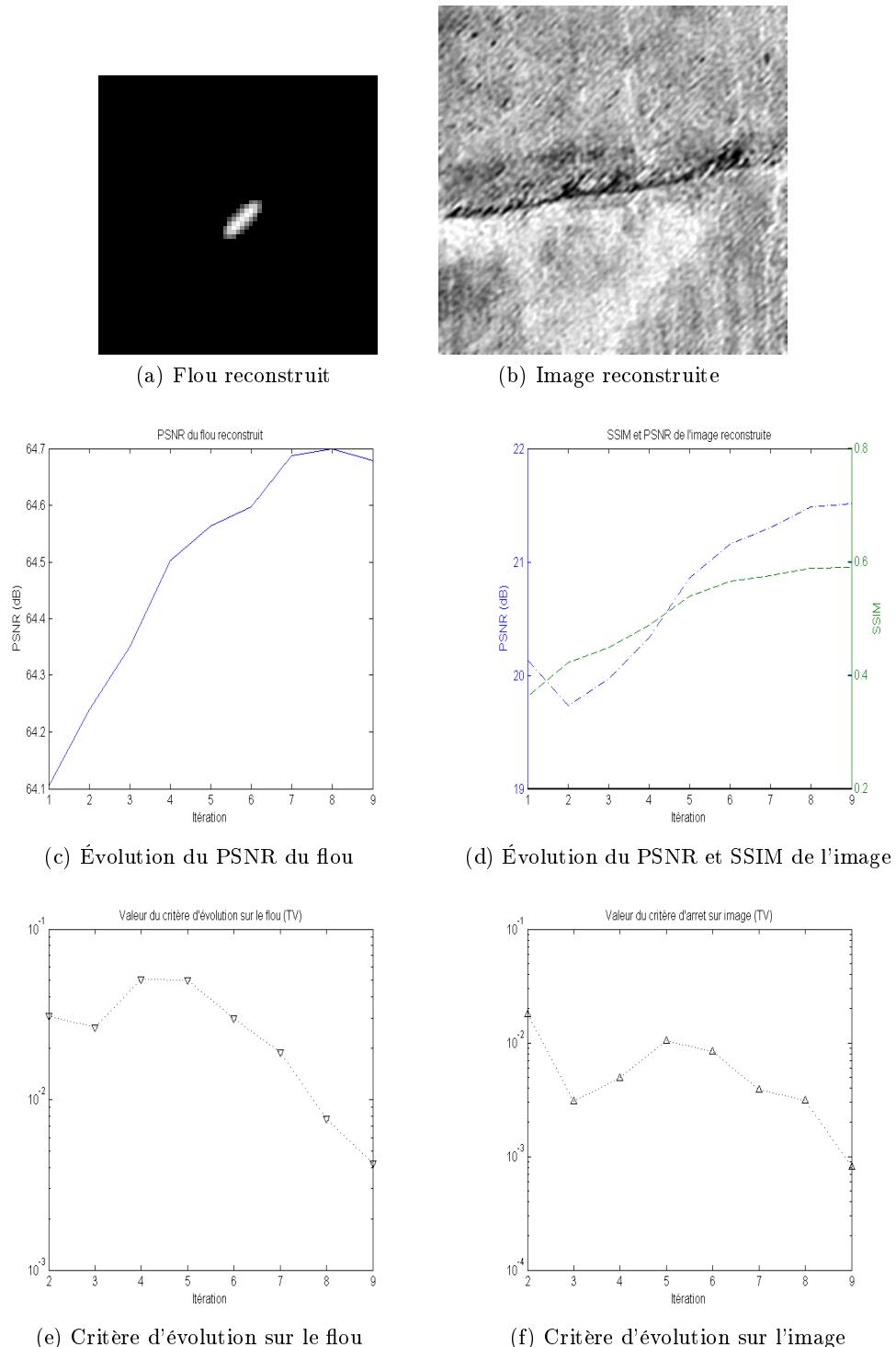


FIGURE 3.30 – Déconvolution aveugle de l'image *Reprise de béton* avec mouvement et bruitée ($\sigma = 6$), avec $\alpha_1 = 10^{-2}$, $\alpha_2 = 10^8$, $\zeta = 1/5$ (une seule itération de point fixe).

ni visible. Il n'est donc nul besoin a priori de fixer ϵ à une valeur si basse.

On teste maintenant une restauration avec l'itération de point fixe suivant critère d'arrêt. On considère ici $\alpha_1 = 90$ et $\alpha_2 = 8 \cdot 10^7$ (cf. Tab. A.2 et Tab. A.4), et la valeur « habituelle » $\epsilon = 10^{-3}$. De même, nous reconsidérons $\zeta = 1/10$. Les résultats de déconvolution sont donnés en Fig. 3.32. L'image semble alors légèrement trop lissée, synthétique, et beaucoup de ses détails fins ont été perdus. Les indicateurs ne sont pas non plus en faveur de ce réglage, qui n'apporte au final aucun avantage par rapport à l'homologue avec une itération de point fixe. Ceci semble cependant fortement provenir de la valeur de ζ , inappropriée pour ce niveau de bruit. Rappelons en effet que pour les cas à une seule itération de point fixe, celle-ci avait été rehaussée à 1/5 en raison de l'impossibilité d'obtenir une reconstruction correcte avec un réglage à $\zeta = 1/10$.

Afin de nous affranchir du défaut observable sur le noyau reconstruit, nous considérons alors la même configuration, mais avec un paramètre de seuillage du noyau semblant plus performant pour ce niveau de bruit, à $\zeta = 1/5$. Nous présentons les résultats en Fig. 3.33. Ils sont, autant pour le flou que pour l'image, visuellement supérieurs à ceux obtenus avec $\zeta = 1/10$. Les indicateurs de PSNR et SSIM sont proches de ceux observés avec une seule itération de point fixe, bien que non supérieurs. Encore une fois, les images reconstruites exhibent des propriétés différentes dans les deux cas, et le choix de ce réglage du nombre d'itération devra être laissé à l'utilisateur, suivant la manière dont il souhaite voir son image reconstruite.

Cas avec ajout de bruit, $\sigma=9$. Nous terminons ces tests avec flou de mouvement par le cas le plus bruité. On doit ici effectuer un réglage des paramètres suivant ce qui apparaît le plus important à reconstruire : soit la netteté des contours, ou bien le caractère globalement lisse de l'image restaurée. Bien évidemment, le bruit présent étant élevé, cela rend d'autant plus délicat le compromis à trouver. On fixe pour commencer $\alpha_1 = 10^{-2}$ (étant donné que cette valeur était légèrement trop forte pour le cas avec bruit d'écart-type $\sigma = 6$; elle est donc susceptible d'être bonne ici) et $\alpha_2 = 10^9$. De même, on conserve la valeur de seuillage à $\zeta = 1/5$ (on a vu qu'il fallait au moins ceci pour le cas précédent). Nous sommes là dans une configuration à une seule itération de point fixe. Les image et flou reconstruits sont montrés en Fig. 3.34. Sans surprise, la qualité de restauration se dégrade, en comparaison des résultats obtenus avec des niveaux de bruit plus faibles. Néanmoins, l'amélioration de la netteté est visible par rapport à l'image de départ g . Cependant, la forme quasi hemi-discoïdale du flou reconstruit, qui ressemble presque davantage à un noyau de défocalisation que de mouvement, fait penser qu'une valeur encore plus élevée de ζ pourrait être judicieuse.

On règle alors les paramètres de régularisation aux mêmes valeurs, et choisissons comme niveau de seuillage $\zeta = 1/3$. Les résultats obtenus, présentés en Fig. 3.35, sont en effet meilleurs à tout point de vue : PSNR du noyau reconstruit, SSIM de l'image déflouée, et nombre d'itérations bien inférieur (5), exhibant une convergence se déroulant de manière plus satisfaisante. C'est d'ailleurs le meilleur résultat que nous ayons pu obtenir en présence de ce niveau de bruit et dans cette configuration de restauration (i.e. à une seule itération de point fixe).

Pour le cas avec itération de point fixe suivant critère d'arrêt, on considère $\alpha_1 = 2 \cdot 10^2$, $\alpha_2 = 10^8$ et $\zeta = 1/3$, soit les valeurs des paramètres de régularisation optimales pour les problèmes simple (cf. Tab. A.2 et Tab. A.4). Les résultats sont présentés en Fig. 3.36.

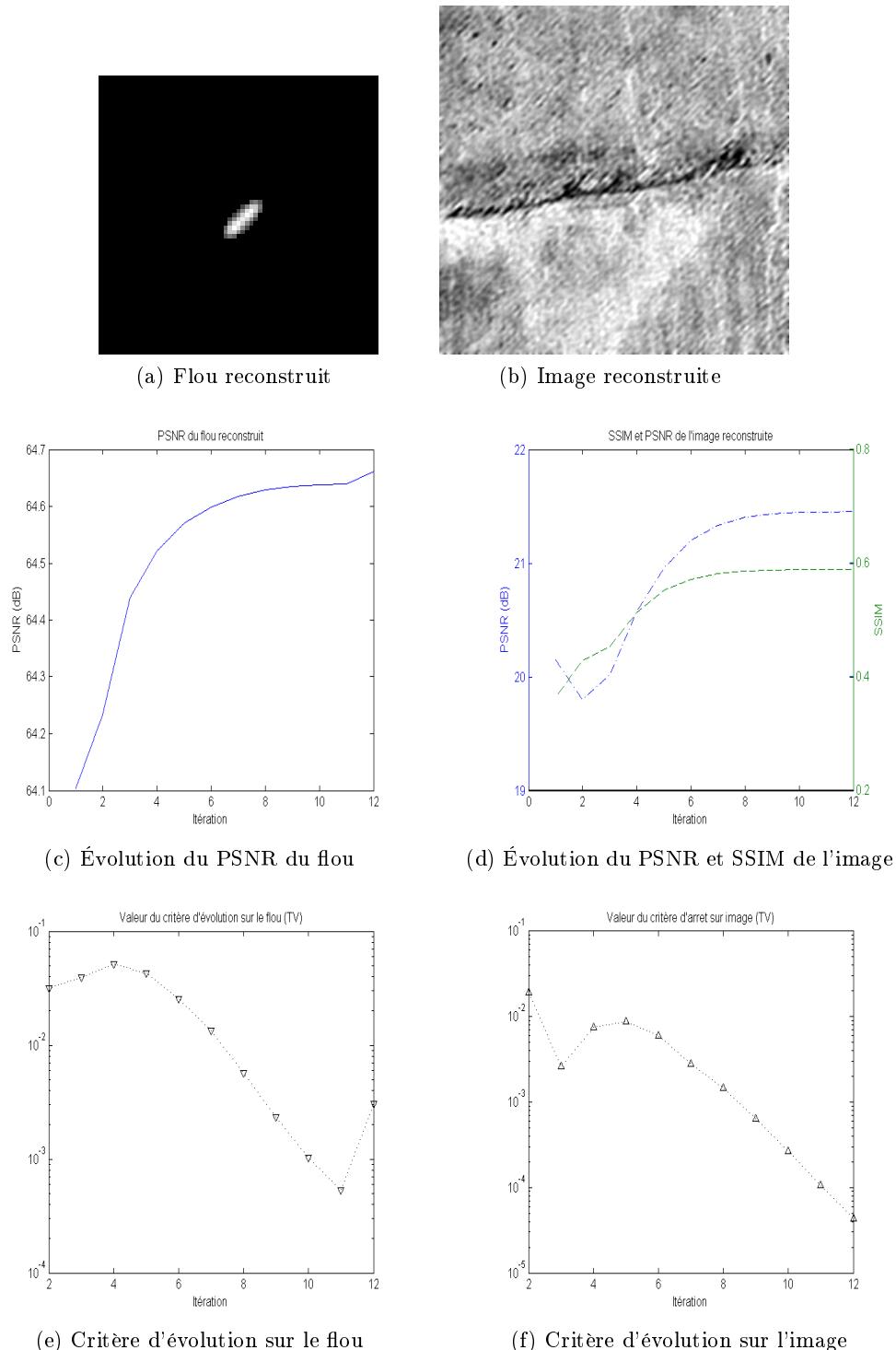
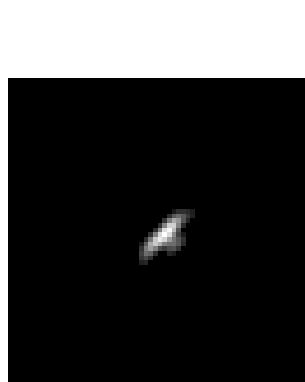
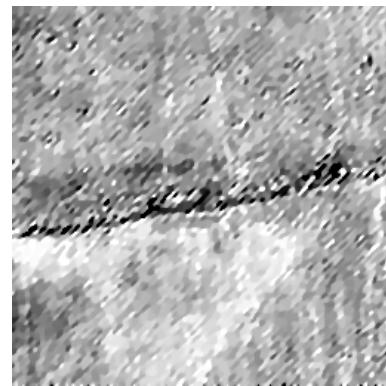


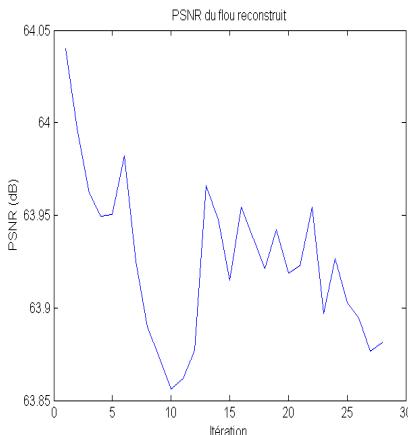
FIGURE 3.31 – Déconvolution aveugle de l'image *Reprise de béton* avec mouvement et bruitée ($\sigma = 6$), avec $\alpha_1 = 10^{-2}$, $\alpha_2 = 10^8$, $\zeta = 1/5$ et $\epsilon = 10^{-4}$ (une seule itération de point fixe).



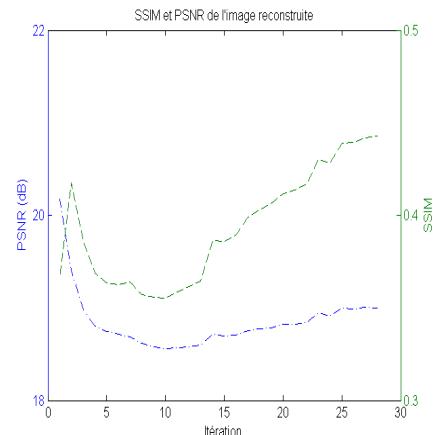
(a) Flou reconstruit



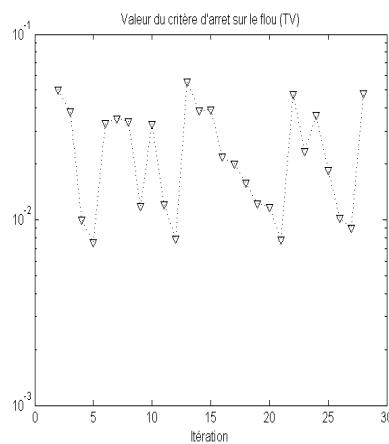
(b) Image reconstruite



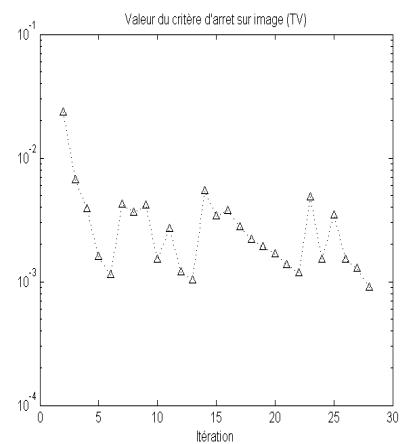
(c) Évolution du PSNR du flou



(d) Évolution du PSNR et SSIM de l'image



(e) Critère d'évolution sur le flou



(f) Critère d'évolution sur l'image

FIGURE 3.32 – Déconvolution aveugle de l'image *Reprise de béton* avec mouvement et bruitée ($\sigma = 6$), avec $\alpha_1 = 90$ et $\alpha_2 = 8.10^7$ (itération de point fixe à critère d'arrêt).

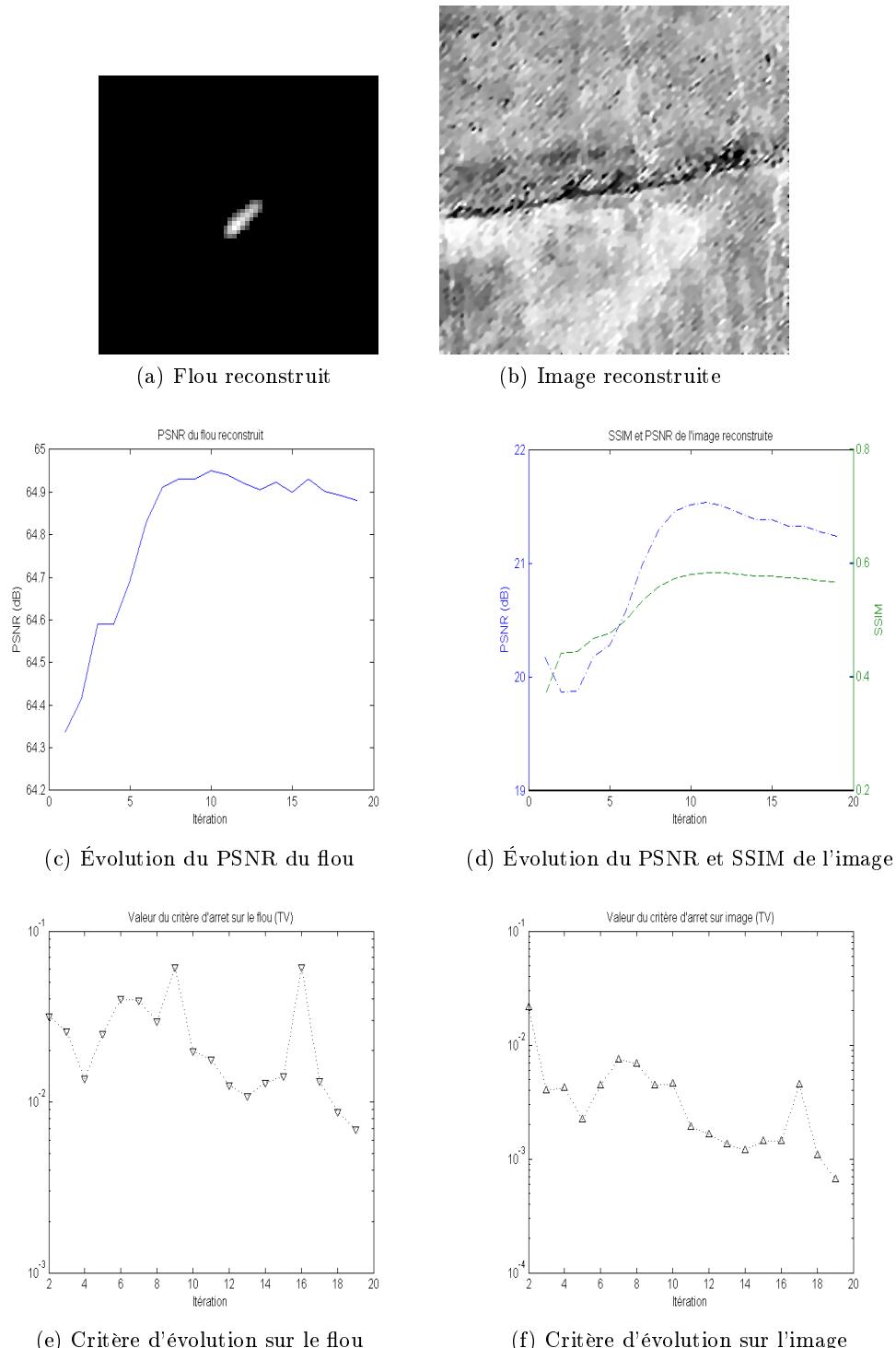
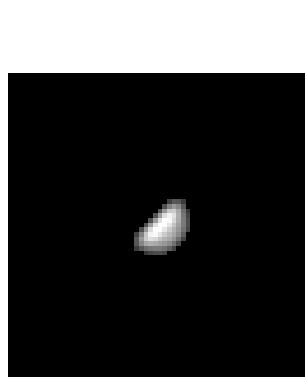
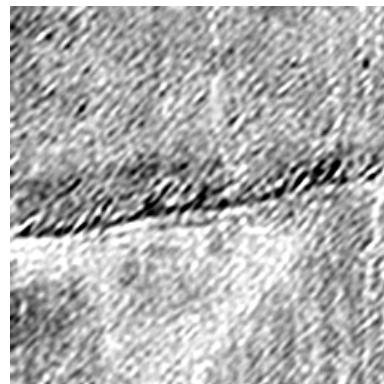


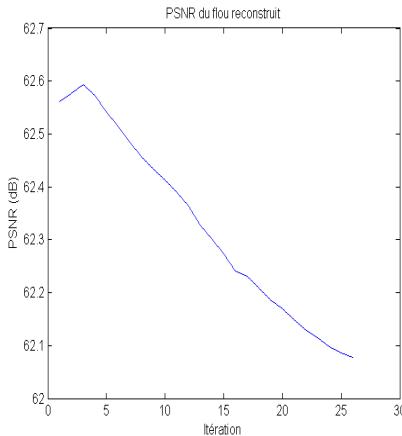
FIGURE 3.33 – Déconvolution aveugle de l'image *Reprise de béton* avec mouvement et bruitée ($\sigma = 6$), avec $\alpha_1 = 90$, $\alpha_2 = 8 \cdot 10^7$ et $\zeta = 1/5$ (itération de point fixe à critère d'arrêt).



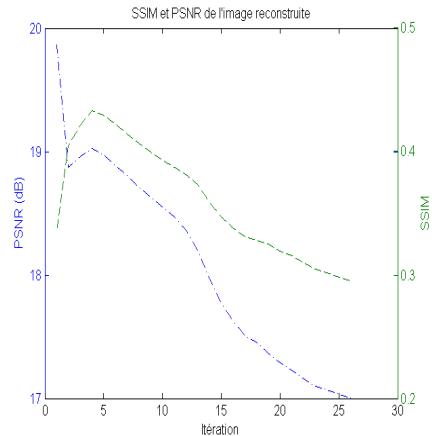
(a) Flou reconstruit



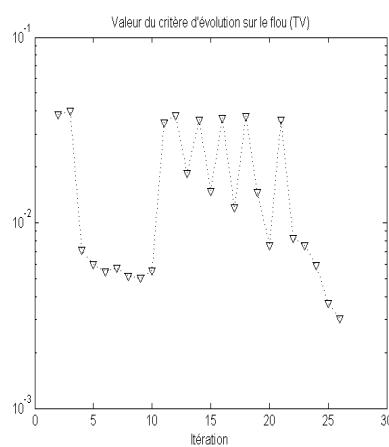
(b) Image reconstruite



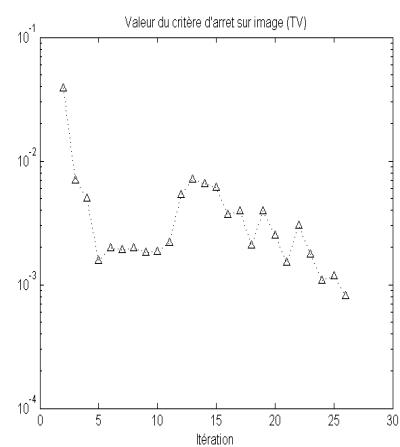
(c) Évolution du PSNR du flou



(d) Évolution du PSNR et SSIM de l'image



(e) Critère d'évolution sur le flou



(f) Critère d'évolution sur l'image

 FIGURE 3.34 – Déconvolution aveugle de l'image *Reprise de béton* avec mouvement et bruitée ($\sigma = 9$), avec $\alpha_1 = 10^{-2}$, $\alpha_2 = 10^9$ et $\zeta = 1/5$ (une seule itération de point fixe).

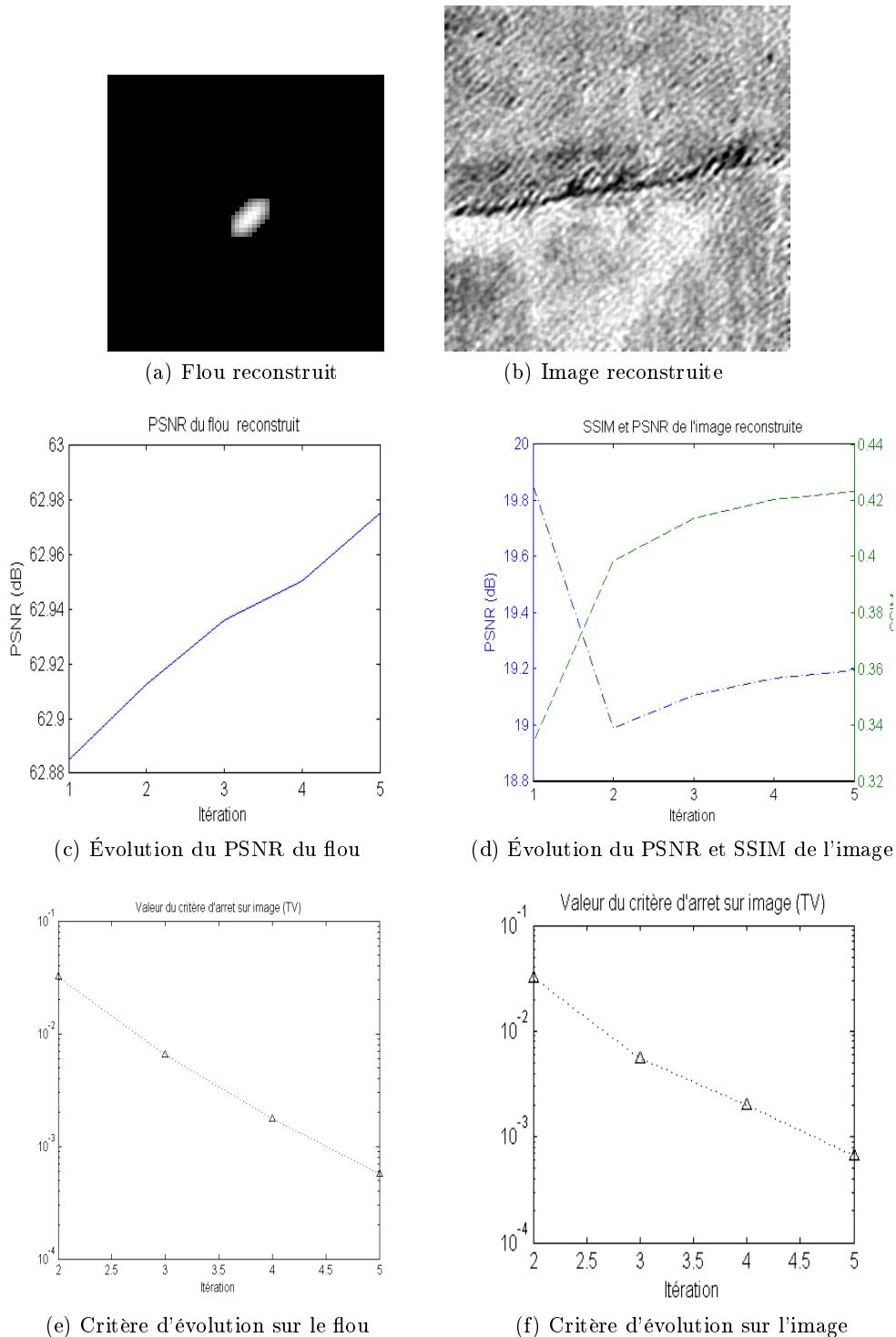


FIGURE 3.35 – Déconvolution aveugle de l'image *Reprise de béton* avec mouvement et bruitée ($\sigma = 9$), avec $\alpha_1 = 10^{-2}$, $\alpha_2 = 10^9$ et $\zeta = 1/3$ (une seule itération de point fixe).

Ce nombre d’itérations plus élevé ne permet pas à proprement d’améliorer la qualité du déflouage, et on peut penser que le niveau de bruit ajouté est alors trop important pour qu’un déflouage efficient puisse être envisagé. Bien que le noyau reconstruit soit plus semblable à un segment, l’image restaurée présente un aspect hyper régularisé, et certains de ses éléments (petites zones noires) montrent qu’elle n’est pas bien déconvoluée.

Rappelons qu’on a constaté en Section 4 du Chapitre 1 que le noyau de mouvement est en effet davantage mal conditionné que celui de défocalisation. Ceci expliquant sûrement en partie pourquoi, à bruit équivalent, la reconstruction est plus performante en présence du noyau de défocalisation que de mouvement.

Test sur une autre image. Pour conclure nos expérimentations concernant les images avec flou de mouvement rectiligne, et afin d’illustrer le fait que notre approche n’est pas limitée à l’image *Reprise de béton* qui a été traitée jusqu’à présent, nous allons effectuer une expérimentation sur l’image *Nid de cailloux* utilisée dans nos tests de restauration avec défocalisation, et qui sera affectée par le même noyau de mouvement que celui considéré dans ce qui précède ($l = 11$ et $\theta = 45^\circ$), avec en sus un bruit blanc gaussien d’écart-type $\sigma = 3$.

Nous avons directement considéré le cas à itération de point fixe à critère d’arrêt (comme pour le test homologue avec la défocalisation), et avons fixé la valeur des paramètres de régularisation à $\alpha_1 = 10^2$, et deux niveaux de régularisation sur h , avec premièrement $\alpha_2 = 10^{-3}$ (valeur volontairement trop faible), puis $\alpha_2 = 10^7$, qui est la valeur optimale du problème simple associé. L’image et le flou reconstruits suivant ces différentes combinaisons de paramètres sont donnés en Fig. 3.37 (a) et (b). Le noyau n’est dans le premier cas pas suffisamment bien estimé pour pouvoir engendrer un déflouage satisfaisant de l’image, très probablement en raison de la valeur trop faible de α_2 . Bien que le segment de droite le caractérisant se devine déjà, ses coefficients ne sont pas uniformément répartis, comme pour le test homologue que nous avions effectué dans le cas de la défocalisation. La deuxième expérimentation est elle beaucoup plus probante, et permet d’arriver à une restauration correcte, malgré un noyau reconstruit toujours pas parfaitement uniforme, et un aspect légèrement synthétique de l’image déflouée. En Fig. 3.37 (c), nous présentons une coupe en le niveau horizontal milieu de l’image, qui permet de visualiser différemment l’effet de l’algorithme de restauration aveugle. On peut y remarquer des transitions de l’image restaurée bien plus en accord avec l’image originale que ne l’est celle floue.

6.3.1 Synthèse sur les tests avec flou de mouvement

Après cet ensemble de tests se rapportant au flou de mouvement rectiligne, on peut tirer quelques conclusions, entre autre quant au réglage des paramètres de régularisation.

Tout d’abord, les résultats présentés laissent à penser, que, pour des images présentant un bruit blanc gaussien jusqu’à un écart-type de $\sigma = 6$, on peut escompter pouvoir améliorer l’image floue donnée, pour ce niveau de flou. Néanmoins, ceci reste à confirmer par des expérimentations sur tout un ensemble d’images.

Concernant α_1 , paramètre de régularisation sur l’image f , sa valeur doit, comme pour le cas de la défocalisation, être réglée proportionnellement au bruit présent dans l’image. Nous avons également observé dans cette configuration que la valeur optimale de α_1 dans de tels problèmes aveugles semble être identique à celle à considérer pour le

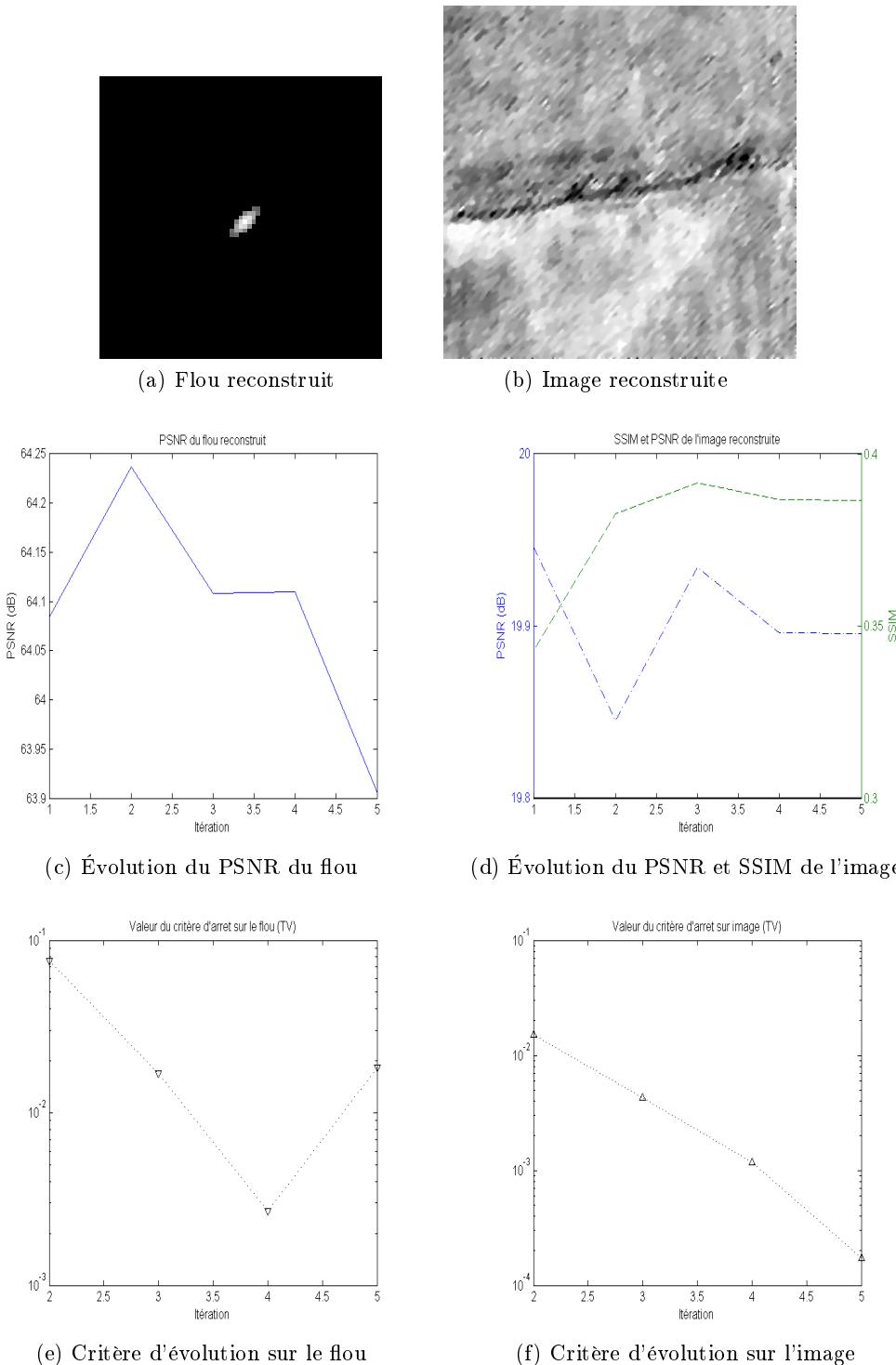
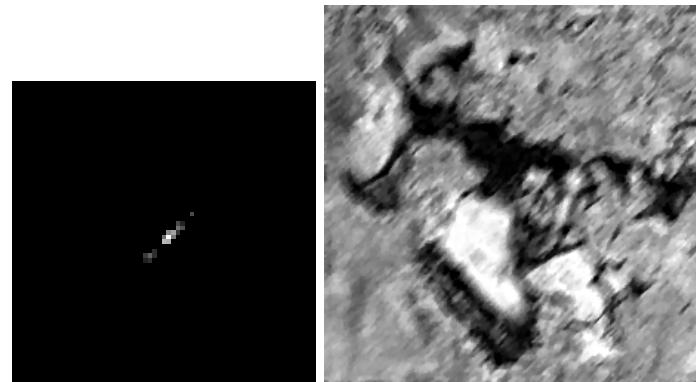
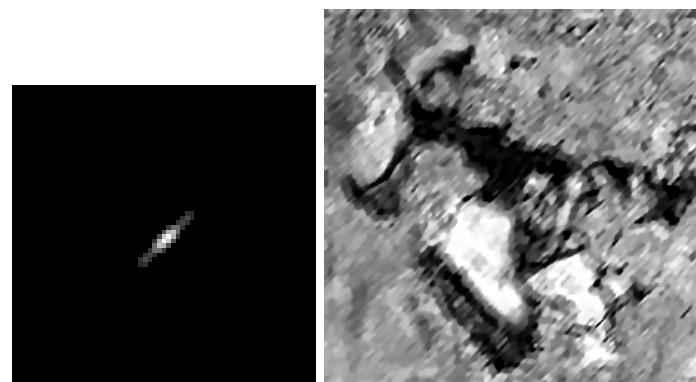


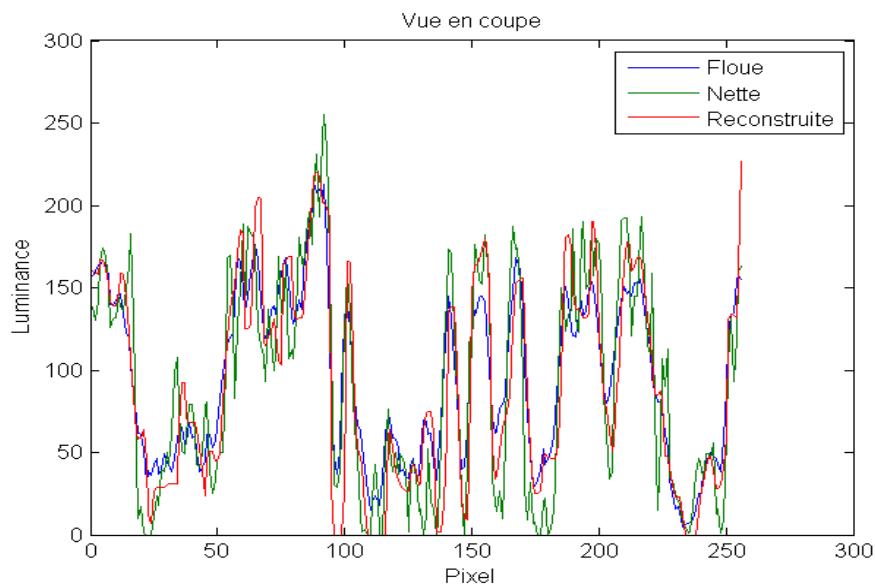
FIGURE 3.36 – Déconvolution aveugle de l'image *Reprise de béton* avec mouvement et bruitée ($\sigma = 6$), avec $\alpha_1 = 200$, $\alpha_2 = 10^8$ et $\zeta = 1/3$ (une seule itération de point fixe).



(a) Flou et image reconstruits avec $\alpha_2 = 10^{-3}$



(b) Flou et image reconstruits avec $\alpha_2 = 10^7$



(c) Vue en coupe de l'image nette originale, de l'image floue et de l'image reconstruite

FIGURE 3.37 – Déconvolution aveugle de l'image *Nid de cailloux* avec mouvement et bruitée ($\sigma = 3$), avec $\alpha_1 = 10^2$ (itération de point fixe à critère d'arrêt).

problème de restauration simple, dans lequel on chercherait à déflouer l'image à partir de la connaissance exacte du noyau.

Quant à α_2 , paramètre de régularisation sur le noyau de flou, de même que pour le cas de la défocalisation, sa valeur optimale semble correspondre également à celle étant optimale pour le problème simple associé, c'est-à-dire d'estimation du noyau à partir de la connaissance de l'image nette. Ce problème simple étant ici aussi considéré avec itération de point fixe à critère d'arrêt.

Enfin, le paramètre de seuillage ζ montre ici son importance, et il faudra veiller à le rehausser en présence de bruits assez importants, à des niveaux supérieurs à $\sigma = 3$. Cela permettant alors d'arriver à estimer des noyaux présentant une forme plus en accord avec un mouvement rectiligne.

6.4 Tests avec des flous de mouvement plus généraux

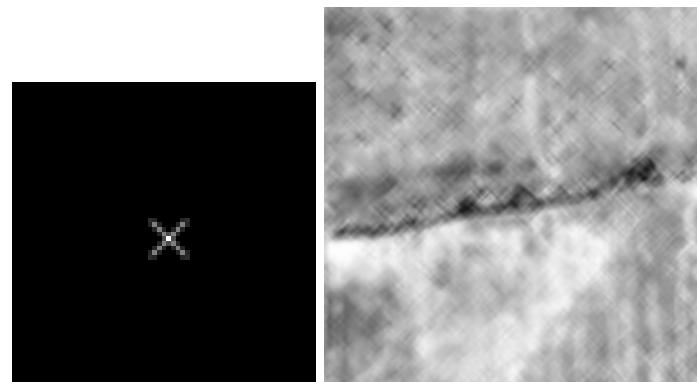
Dans notre jeu d'expérimentations avec flou de mouvement, nous avions considéré jusqu'à présent seulement le cas rectiligne, se caractérisant par une représentation en forme de segment de droite. Afin de voir les capacités de restauration de l'algorithme proposé avec des noyaux moins simples, nous allons maintenant considérer deux formes beaucoup plus générales : tout d'abord un mouvement multidirectionnel en forme de croix, puis en deuxième lieu un noyau non-rectiligne. Ces opérateurs, de même que les images flouées résultantes, sont représentés en Fig. 3.38.

Commençons par examiner le cas du mouvement non-rectiligne. Nous n'avons pas ajouté de bruit à l'image dégradée, et nous plaçons donc dans le cadre de l'itération unique de point fixe. On règle les paramètres à $\alpha_1 = 10^{-3}$ et $\alpha_2 = 10^{-5}$. Ces valeurs ont été choisies en adéquation avec celles utilisées dans le même environnement d'expérimentation avec flou uniforme dans les tests précédents. Par ailleurs, la valeur du paramètre de seuillage a dû être baissée à $\zeta = 1/20$; une valeur plus élevée ayant eu tendance à mettre à zéro l'ensemble des coefficients de \tilde{h} .

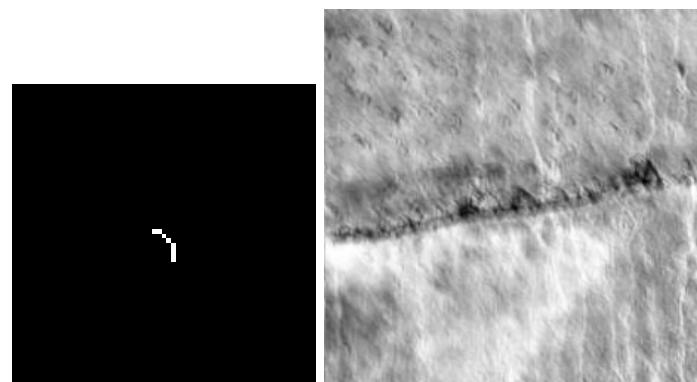
La déconvolution est visuellement assez satisfaisante par rapport à l'image de départ g , et ceci bien que le flou soit moins bien reconstruit qu'avec le noyau rectiligne (cf. Fig. 3.39). En effet, on ne remarque pas réellement le caractère courbe du mouvement reconstruit, et sa distribution de coefficients n'est pas uniforme. Il s'en suit une image restaurée présentant des bords plus francs certes, mais également l'apparition de structures fines parasites. Notre approche semble donc ici montrer ses limites, ce que semblent indiquer les indicateurs de reconstruction.

Nous effectuons maintenant le test de déconvolution avec le flou de mouvement en forme de croix : on prend pour les mêmes raisons que celles expliquées ci-dessus les mêmes valeurs de paramètres de régularisation : $\alpha_1 = 10^{-3}$ et $\alpha_2 = 10^{-5}$, ainsi que $\zeta = 1/10$, soit la valeur que nous avions utilisée avec mouvement uniforme sans ajout de bruit, et avec bruit inférieur à $\sigma = 6$.

Les résultats de déconvolution sont ici plus concluants. La netteté de l'image restaurée est en effet bien améliorée (cf. Fig. 3.40). De plus, les courbes de PSNR et SSIM montrent un bon comportement, avec des valeurs croissantes au long des itérations. En outre, les critères d'évolution sur f et h exhibent une convergence plutôt rapide. Le noyau étant plutôt bien reconstruit, la restauration déroule au final de manière globalement satisfaisante, et les

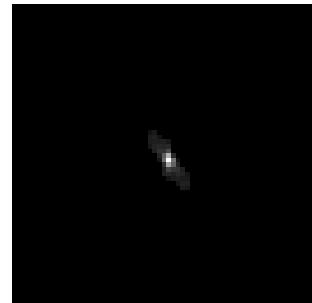


(a) Flou en forme de croix et image flouée résultante

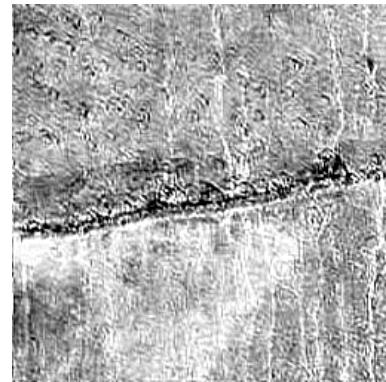


(b) Flou non-rectiligne et image flouée résultante

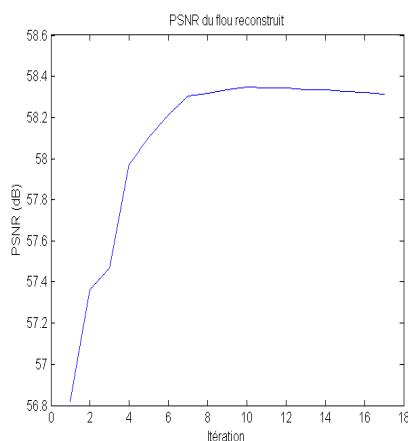
FIGURE 3.38 – Flous de mouvement non-rectilignes et images floues associées pour les tests non-comparatifs.



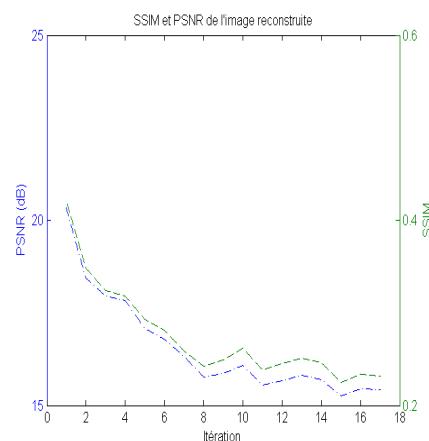
(a) Flou reconstruit



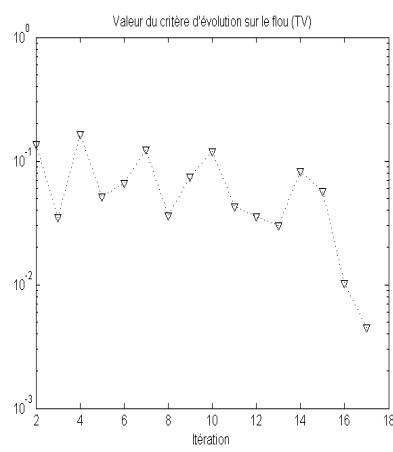
(b) Image reconstruite



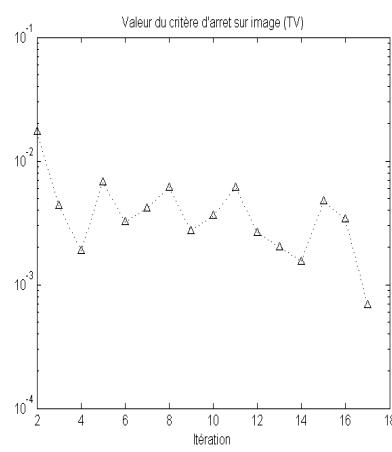
(c) Évolution du PSNR du flou



(d) Évolution du PSNR et SSIM de l'image



(e) Critère d'évolution sur le flou



(f) Critère d'évolution sur l'image

FIGURE 3.39 – Déconvolution aveugle de l'image *Reprise de béton* avec mouvement non-rectiligne, sans ajout de bruit, avec $\alpha_1 = 10^{-3}$, $\alpha_2 = 10^{-5}$, et $\zeta = 1/20$ (une seule itération de point fixe).

difficultés rencontrées avec le noyau courbe n'apparaissent pas ici. Sans doute le fait que ce noyau soit une combinaison de deux mouvement rectilignes y est-il pour quelque chose.

7 Expérimentations comparatives

Pour terminer ce chapitre, nous proposons dans ce qui suit une comparaison des performances obtenues par l'approche développée, avec celles d'autres techniques d'état de l'art publiées ces dernières années, techniques basées sur des approches diversifiées.

Plus précisément, nous avons repris avec précision plusieurs cas tests traités par les auteurs de ces approches dans leurs publications originales, et avons mise en œuvre systématiquement leur protocole d'expérimentation. C'est-à-dire que nous avons considéré des conditions de dégradation des images rigoureusement identiques (noyau de flou et bruit). Chaque fois qu'un noyau discontinu (plus précisément de défocalisation ou de mouvement, puisque c'est cela qui nous intéressait) avait été employé dans une publication traitant de déconvolution aveugle, nous nous sommes appliqués à reprendre l'expérience, et à la reproduire avec notre approche.

La première confrontation met notre technique en concurrence avec une méthode itérative stochastique. La deuxième méthode opposée est une évolution très récente de l'approche de Carasso [32], qui peut être assimilée à une technique directe non-itérative. Nous proposons en troisième lieu une comparaison effectuée avec une image traitée par Money et Kang dans leur article concernant l'estimation du flou par filtrage de choc [135] et une double régularisation non-itérative. Enfin, nous montrons que l'approche de double régularisation paramétrique de Chen et Yap ne mène pas à des résultats meilleurs que les nôtres, malgré ses nombreuses possibilités de réglage d'opérateurs et de paramètres²⁸.

Précisons enfin bien que nous avons utilisé directement les résultats de reconstruction obtenus par les auteurs avec leur propre approche afin de les comparer aux nôtres, et non des résultats que nous aurions nous-mêmes obtenus avec une méthode re-mise en œuvre, et qui pourrait ne pas correspondre à la version originelle utilisée dans la publication considérée.

Algorithme stochastique de Tzikas *et al.* Nous montrons ici un résultat de déconvolution obtenu par notre technique, d'après une expérimentation publiée dans [189], avec une approche basée sur l'inférence bayésienne et une modélisation par matrice creuse du noyau de flou. Pour cela, l'image *Lena* dégradée par un flou carré de taille 7×7 , et contaminée par un bruit blanc gaussien d'écart-type $\sigma = 10^{-3}$ a été considérée. Nous avons donc repris ces données des auteurs de l'approche sus-citée.

Nous présentons en Fig. 3.41 les données de départ, de même que les résultats obtenus par notre approche, en considérant une seule itération de point fixe, et par l'approche concurrente. Notre flou est clairement mieux reconstruit, puisqu'il présente une erreur d'estimation $\|h - \tilde{h}\| = 0,0579$ contre $\|h - \tilde{h}\| = 0,0913$ pour Tzikas *et al.* (seul indice qualitatif fourni par leurs soins), ce qui est une différence importante. De même, l'image que nous obtenons en sortie de l'algorithme est visuellement bien plus nette et agréable que celle présentée par les auteurs, qui reste plus floue, avec des contours moins bien reconstruits, malgré le fait qu'elle soit davantage lissée. Seul l'ISNR est fourni pour la mesure de la qualité de l'image restaurée, et est de 0,95. Dans notre cas, nous n'observons

28. Cf. Chapitre 2, Section 3.4.2.

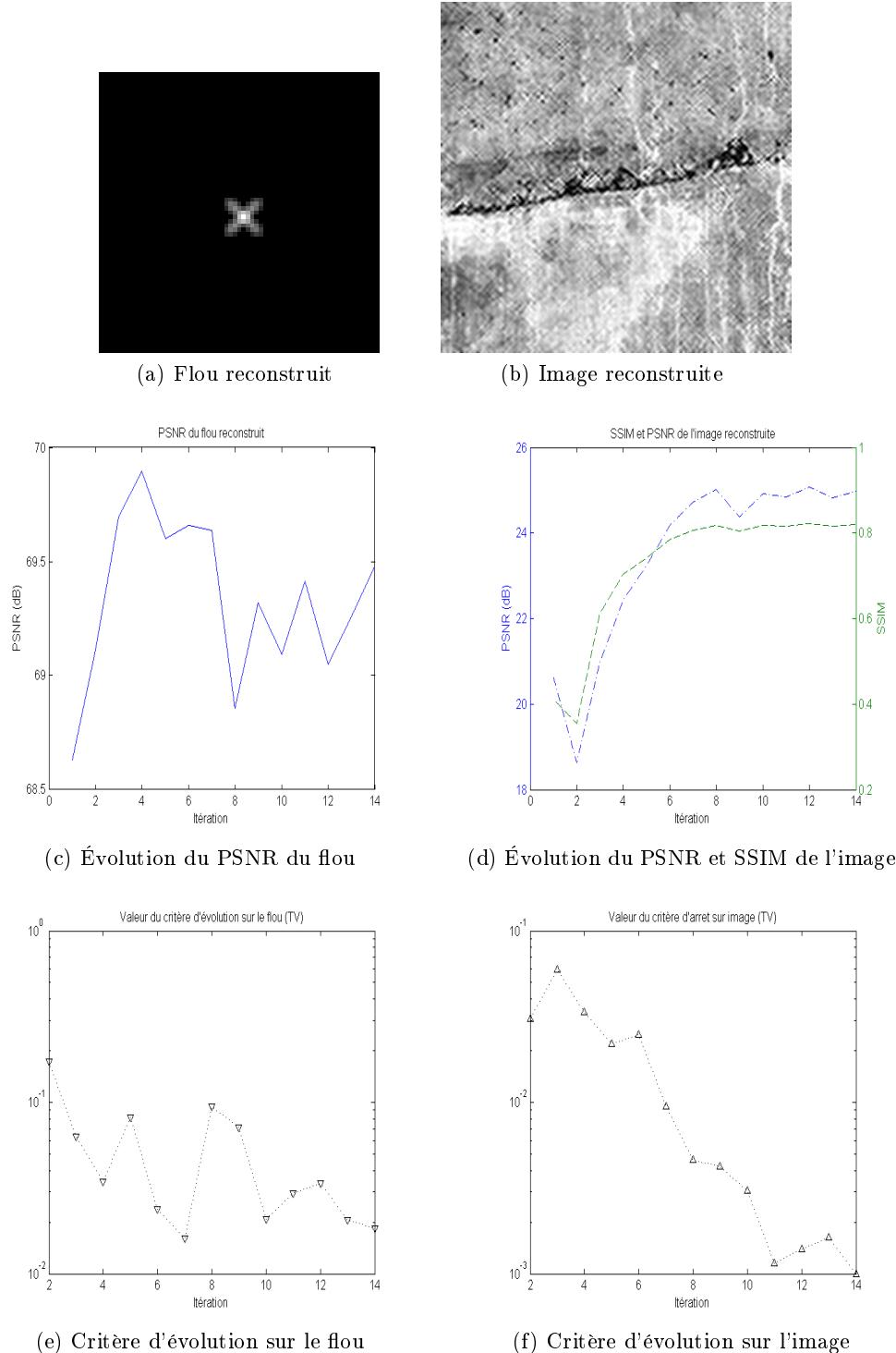


FIGURE 3.40 – Déconvolution aveugle de l'image *Reprise de béton* avec mouvement en croix, non bruitée, avec $\alpha_1 = 10^{-3}$, $\alpha_2 = 10^{-5}$ (une seule itération de point fixe).



(a) Image *Lena* originale, image floue, et noyau utilisé



(b) Image restaurée par l'approche de Tzikas, par notre approche, et noyau reconstruit

FIGURE 3.41 – Premier résultat du test comparatif de notre approche (une seule itération de point fixe) vs. l'approche de Tzikas *et al.* [189].

pas d'ISNR positif, ce qui signifie que le PSNR décroît entre l'image floue et restaurée (resp. 24,1 dB contre 21,3 dB). Ceci est de toute évidence dû aux artefacts (ondulations) apparaissant de manière très visible. Ceci illustre d'ailleurs bien le fait que ces indicateurs basés sur des erreurs quadratiques moyennes ne sont pas toujours à même de refléter la qualité visuelle d'une image restaurée, mais servent plutôt à mesurer des amplifications (ou des diminutions) de niveau de bruit ou d'autres oscillations. C'est ce que nous évoquions en Section 3 du Chapitre 1, concernant la difficulté de l'évaluation qualitative des résultats de déconvolution aveugle, où une image peut être clairement déflouée tout en exhibant des mesures de qualité moyennes, voir médiocres. Notons cependant que le SSIM des images floues et restaurées est ici stable, à 0,71, et a l'avantage de montrer que la qualité structurelle de l'image traitée n'a pas été détériorée.

Deux autres reconstructions sont présentées en Fig. 3.42, cette fois-ci avec utilisation d'un nombre d'itérations de point fixe suivant critère d'arrêt. Pour cela, on a fixé $\alpha_1 = 1$ et $\alpha_2 = 10^{-5}$ dans le premier cas, et $\alpha_1 = 10$ dans le deuxième, avec la même valeur $\alpha_2 = 10^{-5}$. Le premier essai n'est pas réellement plus performant que le cas précédent, et la restauration est quasi équivalente visuellement, soit plutôt agréable, mais contenant des effets de bords. Le PSNR de l'image restaurée affiche un décevant 20,86 dB, tandis que le SSIM est même en baisse à 0,6146. La régularisation n'est ici visuellement pas assez poussée, et ne prévient pas suffisamment l'apparition des artefacts d'ondulation. En

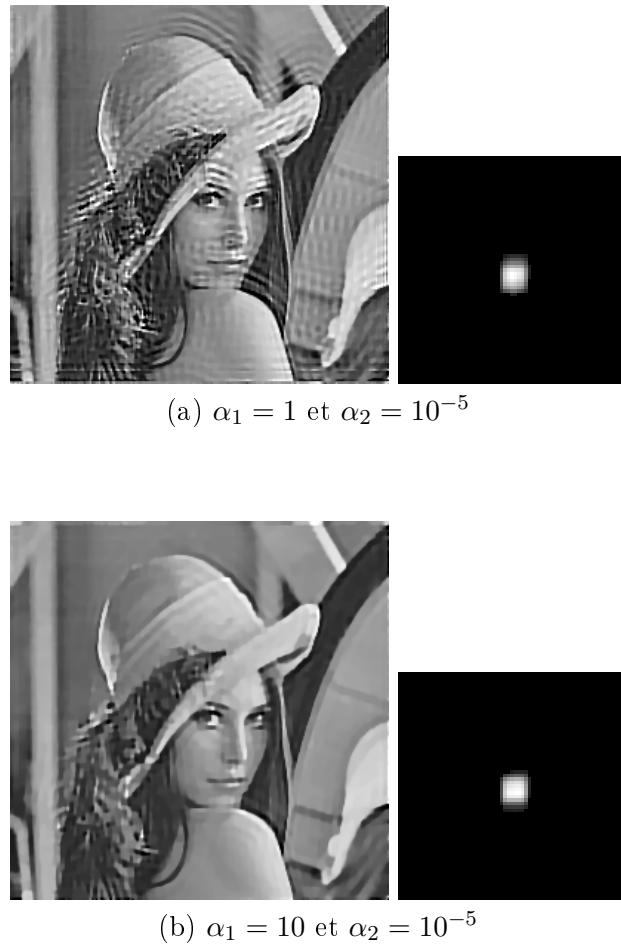


FIGURE 3.42 – Deuxième résultat du test comparatif de notre approche vs. l’approche de Tzikas *et al.* [189]. Image restaurée et flou reconstruit par notre approche, avec itération de point fixe à critère d’arrêt.

revanche, le deuxième essai est lui beaucoup plus concluant, puisque l’image déflouée est visuellement très agréable, bien plus que l’image déconvoluée obtenue par les auteurs, et les valeurs de PSNR et SSIM sont en forte hausse, à respectivement 27,3 dB (soit un ISNR de 3.15 !) et 0,859. Quant aux noyaux reconstruits, ils affichent des erreurs de reconstruction $\|h - \tilde{h}\|$ en accord avec ces valeurs, puisque dans le premier cas, celle-ci est mesurée à 0,0602, et dans le deuxième à 0,0469.

On constate donc au final encore une fois que la régularisation, a minima celle portant sur f , n’est en restauration aveugle (généralement) pas là pour prévenir l’amplification du bruit à l’inversion du noyau, mais avant tout pour prévenir l’amplification d’artefacts dus à l’erreur de reconstruction du flou.

Algorithme double TV de Money et Kang. La deuxième comparaison que nous proposons met en œuvre l’approche proposée par Money et Kang dans [135], approche basée sur l’utilisation du filtrage de choc [151].

L’image originale que nous présentons en Fig. 3.43 (a) a été dégradée par un flou de défocalisation, de rayon malheureusement non précisé par les auteurs²⁹. L’image floue

²⁹. Ceux-ci n’ayant été en mesure de nous fournir que très peu de résultats, de même que seule une

résultante est donnée en Fig. 3.43 (b).

Les auteurs ont pu nous fournir leur image restaurée, visible en Fig. 3.43 (c). Notre résultat est disponible sur la même figure, et a été obtenu en considérant l’itération de point fixe à critère d’arrêt, et des paramètres de régularisation réglés à $\alpha_1 = 10$ et $\alpha_2 = 10^{-2}$. Malgré la qualité très limitée de l’image de départ fournie, on peut malgré tout constater que notre approche fait aussi bien que celle de Money et Kang. La netteté et la brillance en est même améliorée, bien que nos artefacts soient légèrement plus importants (mais encore une fois, en grande partie dus à la qualité très moyenne de l’image de départ).

Pour le lecteur qui pourra consulter l’article de Money et Kang, il sera très révélateur de prêter attention au comparatif qu’ils y ont présenté. Leur résultat y est confronté à une image obtenue par l’approche générique de Chan et Wong. Bien qu’il n’ait pas été possible de la présenter ici, la reconstruction affichée avec cette dernière technique est proprement mauvaise, l’image est déstructurée, et affectée par de forts artefacts. Ceci fait ressortir de toute évidence un noyau bien mal estimé, perturbé de la façon dont nous l’avions illustré en Fig. 3.2 (p. 76), et incapable de converger vers sa forme réelle. La contrainte de seuillage du flou que nous avons ajouté prend alors ici tout son sens ; surtout au vu de la différence visuelle entre cette image et celle que nous avons obtenue, par une approche fondamentalement très similaire.

Algorithme de Romero et Candela. Le troisième comparatif que nous présentons concerne une méthode proposée - assez récemment - par Romero et Candela dans [164]. Celle-ci est une évolution de l’approche directe APEX/SECB de Carasso, qui a été évoquée dans notre état de l’art, à la Section 2.1.2 (p. 25). Son originalité est de considérer une régularisation qui est en fait une puissance fractionnaire de l’opérateur laplacien.

Les auteurs ont considéré deux cas qui nous intéressent particulièrement, puisqu’il s’agit d’une défocalisation de rayon $\rho = 5$, et d’un flou de mouvement rectiligne de caractéristique $l = 10$ et $\theta = 45^\circ$, soit un noyau très similaire à celui que nous avions mis en œuvre dans nos tests non-comparatifs. Les résultats obtenus par leur algorithme sont donnés en Fig. 3.44 pour le premier cas, et en Fig. 3.45 pour le deuxième cas. Ils n’ont pas précisé les noyaux reconstruits, mais au vu des images obtenues - apparaissant toujours un peu floues - on peut penser que ceux-ci n’affichaient pas une taille de support assez importante pour permettre une déconvolution efficace. Ils n’ont de même pas fourni de mesure de la qualité des images finales déflouées.

En ce qui nous concerne, nous avons obtenu un PSNR de 29,56 dB pour le cas de la défocalisation, avec un SSIM à 0,8795, et un flou reconstruit à 82,3 dB de PSNR, soit des valeurs très correctes. Pour cela, les paramètres de régularisation avaient été fixés à $\alpha_1 = 10$ et $\alpha_2 = 10^{-5}$, avec itération de point fixe à critère d’arrêt.

Pour l’image affectée par le mouvement, notre restauration nous a permis de mesurer un PSNR de 21,83 dB, de même qu’un SSIM de 0,7078 sur \tilde{f} , et un PSNR sur \tilde{h} à 64,77 dB, en utilisant des paramètres réglés à $\alpha_1 = 10^2$ et $\alpha_2 = 10^{-5}$.

Ces deux comparaisons ne laissent aucun doute quant à la supériorité de notre approche. Que ce soit pour la défocalisation ou le mouvement rectiligne, nos images restaurées sont

image dégradée au format PDF, que nous avons dû retailler afin de pouvoir la traiter, et qui ne présentait pas la qualité (résolution) d’une image à pixellisation usuelle.



(a) Image *Tasse* originale



(b) Image *Tasse* floue

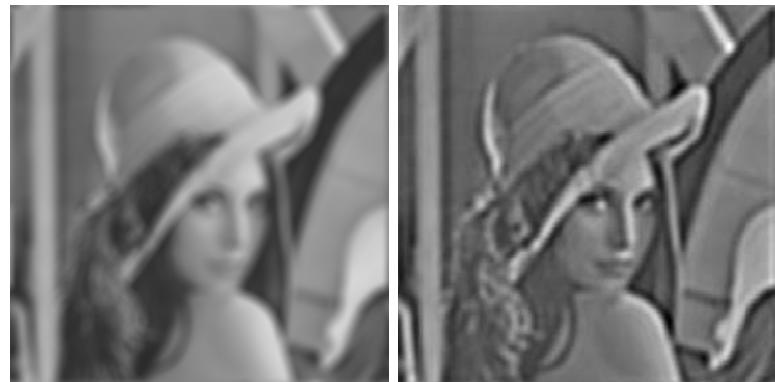


(c) Image restaurée par Money et Kang



(d) Image restaurée par notre approche

FIGURE 3.43 – Résultats du test comparatif de notre approche vs. l'approche de Money et Kang [135].



(a) Image *Lena* défocalisée, et image restaurée par Romero et Candela

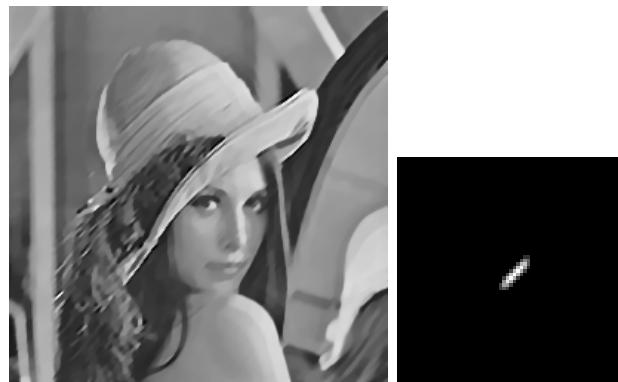


(b) Image restaurée par notre approche, et noyau reconstruit

FIGURE 3.44 – Premier résultat du test comparatif de notre approche vs. l'approche de Romero et Candela [164] ; cas de défocalisation.



(a) Image *Lena* flouée par le noyau de mouvement, et image restaurée par Romero et Candela



(b) Image restaurée par notre approche, et noyau reconstruit

FIGURE 3.45 – Deuxième résultat du test comparatif de notre approche vs. l’approche de Romero et Candela [164] ; cas de flou de mouvement.

indubitablement de qualité visuelle bien supérieure, bien plus nettes. L’avantage de la technique opposée étant possiblement un temps de traitement plus réduit (bien que nous n’ayons pas d’information à ce propos).

Algorithme de double régularisation paramétrique de Chen et Yap. Enfin, le quatrième et dernier test comparatif que nous proposons concerne la méthode de Chen et Yap [48], évoquée à la Section 3.4.2 de notre état de l’art. Celui-ci est particulièrement intéressant dans la mesure où l’approche des auteurs se base, tout comme pour nous, sur le principe de double régularisation. La différence étant que le noyau est recherché dans un ensemble de classes paramétriques.

L’image *Cameraman*, en Fig. 3.46 (a), a été dégradée par un flou uniforme carré de taille 7×7 (l’image étant, elle, de taille 256×256). Les auteurs comparent leur technique avec celle de You et Kaveh [213], qui, on le rappelle, est aussi basée sur la double régularisation, mais celle-là quadratique (semi-norme H^1), soit sans préservation des discontinuités. Leur résultat, de même que celui qu’ils obtiennent avec l’approche de You et Kaveh (mise en œuvre par leurs soins, donc avec les incertitudes que cela comporte) sont présentés en Fig. 3.46 (c) et (d).

Pour traiter cette image, nous avons réglé nos paramètres à $\alpha_1 = 10$ et $\alpha_2 = 10^{-5}$,

avec une itération de point fixe à critère d'arrêt sur f . L'ISNR mesuré par Chen et Yap sur leur image déflouée était alors de 3,45 dB. Notre approche atteint, elle, 7,41 dB, soit une valeur nettement supérieure. Aucun autre indicateur de mesure n'avait été fourni par les auteurs. Cependant, pour ce qui concerne notre image reconstruite, celle-ci présente un PSNR de 28,57 dB, un SSIM de 0,8478, et le flou exhibe un PSNR de 83,33 dB, soit également des valeurs très satisfaisantes. Visuellement, notre reconstruction est plus nette, comme visible en Fig. 3.46 (e), malgré de légers artefacts de bord au niveau des jambes du personnage. Notons que les auteurs utilisent une régularisation qui est en fait quadratique, et ne peut donc fournir le même niveau de préservation des discontinuités que la nôtre, ce qui est par exemple constatable en examinant les structures striées du bâtiment en fond.

De même, il est intéressant de constater que l'image reconstruite par Chen et Yap, avec leur version de l'approche de You et Kaveh, n'améliore que peu l'image floue. Ce test est alors très illustratif du fait qu'on ne peut avoir, en déconvolution aveugle, d'approche efficace avec un réglage automatique de tous les paramètres, ou presque tous, a fortiori pour des problèmes de restauration d'images réelles. Ceci va alors à l'encontre de ce que revendent faire You et Kaveh eux-mêmes dans [213], puisqu'ils essayent en effet d'obtenir une telle estimation automatique de tous les paramètres nécessaires au fonctionnement de leur approche. Insistons également sur le fait que ceci n'est pas contradictoire avec le bon résultat obtenu avec leur approche en Section 5.4.3, sur l'image *Satellite*, dans la mesure où nous ne sommes plus ici en présence d'un support compact - c'est-à-dire d'un fond noir -, ce qui est un aspect essentiel, et rend le traitement autrement plus délicat.

Enfin, on précisera que Chen et Yap indiquent un flou reconstruit dont les paramètres estimés sont effectivement les mêmes supports horizontal et vertical que le noyau réel utilisé. Malgré cela, l'inversion du noyau ne mène nullement à une restauration exceptionnelle, en raison du trop fort lissage quadratique. Ceci mettant en évidence l'aspect important des opérateurs à préservation des discontinuités.

8 Synthèse

Nous avons présenté dans ce chapitre une étude, ainsi qu'une mise en œuvre propre, d'un schéma de déconvolution aveugle basé sur le principe de la double régularisation par variation totale (TV), proposé originellement par Chan et Wong, et rentrant dans le cadre des techniques variationnelles. Nous avons montré que la minimisation de la fonctionnelle du modèle, telle que considérée par ces auteurs, ne menait pas à des résultats satisfaisants - que ce soit en terme de temps de calcul ou de qualité de reconstruction - pour la plupart des images. Nous avons montré que parmi celles-ci, les images à fond noir constituent une catégorie bien particulière, qui seule peut être traitée de manière relativement efficace par leur approche ; ceci cependant au terme d'importants coûts en calculs, et avec des résultats somme toute assez peu convaincants par rapport à ce qui peut être obtenu par un schéma à double régularisation avec norme H^1 ($\int_{\Omega} |\nabla f|^2$ donc), qui ne permet pas, lui, une bonne prise en compte des discontinuités des images.

Nous avons pour notre part proposé une adaptation de la méthode des auteurs, basée principalement sur une contrainte de « compacité » imposée au flou après chaque estimation de la boucle de minimisation alternée. Celle-ci est mise en œuvre en pratique par un opérateur de seuillage, et amène à des reconstructions de noyaux beaucoup plus réalistes, sans artefacts dominants autour d'une zone centrale bien concentrée.



(a) Image *Cameraman* originale



(b) Image flouée par le noyau uni-forme



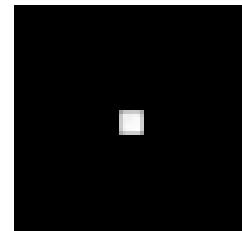
(c) Image restaurée par [213]



(d) Image restaurée par Chen et Yap



(e) Image restaurée par notre ap-proche



(f) Flou estimé par notre approche

FIGURE 3.46 – Résultat du test comparatif de notre approche vs. l'approche de Chen et Yap [48].

Nous avons en outre examiné l'intérêt pratique de la limitation du nombre d'itérations effectuées par l'algorithme de linéarisation des composantes du gradient de la fonctionnelle par point fixe, qui est utilisé pour la résolution des équations non-linéaires traitées, et avons observé que le fait de ne considérer qu'une seule itération pour la régularisation sur l'image était suffisant en présence de faibles bruits pour obtenir une déconvolution satisfaisante. Ceci permet alors un gain considérable en temps de calcul, par rapport au fait de considérer un nombre d'itérations évoluant librement. Ceci d'autant plus que la contrainte de seuillage mise en œuvre nous a également permis de nous limiter à une unique itération de point fixe pour la régularisation sur le noyau de flou.

Nous avons par là-même constaté que la valeur optimale du paramètre de régularisation α_1 correspondait à celle étant également optimale pour le problème disjoint de déconvolution à partir du noyau connu. Le paramètre α_2 est, lui, apparu comme moins fondamental en présence de faibles bruits. Ceci en raison de l'effet essentiel du seuillage du noyau de flou. Ce paramètre sert alors seulement de « guide » à l'algorithme ; il lui indique d'une certaine manière comment évoluer. Avec des niveaux de bruits plus importants, nous avons également vu que la valeur optimale de α_2 semblait correspondre à celle étant optimale pour le problème simple de reconstruction du flou avec image nette connue, avec itération de point fixe à critère d'arrêt. Ceci malgré le fait que nous ayons reconstruit h avec seule une de ces itérations, préalablement à l'étape de seuillage.

Sans surprise, augmenter le nombre des itérations de point fixe amène en général à une approximation de la variation totale plus fidèle. Mais aussi à une image reconstruite qui peut, dans un sens, souffrir de l'utilisation de cette semi-norme, en présentant un caractère synthétique d'image « en escalier ». Récemment cependant, des modèles permettant de réduire ce défaut ont été proposés [203], et il pourrait être judicieux d'envisager leur utilisation.

Les résultats que nous avons obtenus avec des flous de défocalisation se sont montrés convaincants dans quasi toutes les configurations, jusqu'à un niveau relativement élevé de bruit. Nous avons en effet réussi à obtenir dans chaque cas une amélioration par rapport aux images sources flouées.

Avec des flous de mouvements, les choses ont été légèrement plus délicates. En effet, avec des bruits trop importants il s'est avéré difficile d'obtenir un déflouage efficient. Quand le bruit était plus faible, nous avons cependant réussi des déconvolutions satisfaisantes, avec des noyaux rectilignes. Le cas de mouvements non-rectiligne a lui mis en évidence les limites de l'approche utilisée, et s'est avéré délicat à traiter, ceci résultant en des estimations de flous non nécessairement pertinentes.

Bien que nous ayons ici considéré une régularisation TV, il serait judicieux d'étudier si celle-ci est la plus adaptée. En effet, il est possible qu'il existe d'autres « bons » régularisateurs, mais qu'il serait plus facile de minimiser. Il y aurait également probablement un intérêt à étudier s'il existe des méthodes de minimisation de la variation totale qui fonctionnent plus rapidement que celle basée sur l'itération de point fixe.

Rappelons enfin que l'algorithme de minimisation utilisé ici se base sur une approximation convexe de la variation totale. Mais comme nous l'avions indiqué en Section 2.2.1 de l'état de l'art, des régularisateurs non-convexes peuvent parfois fournir des reconstructions avec des bords plus francs que des régularisateurs convexes. C'est pourquoi nous allons nous pencher dans le chapitre suivant sur une méthode de déconvolution suivant le

même principe (c'est-à-dire de double régularisation avec seuillage du noyau), mais dans laquelle le type de régularisation sur l'image sera différent. En effet, nous allons envisager un opérateur qui a donné dans la littérature sur la déconvolution à noyau connu de bons résultats visuels, moins artificiels [144] que la régularisation à variation totale : la régularisation de type Mumford-Shah [136].

Chapitre 4

Déconvolution aveugle avec régularisation de type Mumford-Shah

Ce chapitre présente une technique de déconvolution aveugle également basée sur le principe de double régularisation, mais pour lequel nous allons maintenant considérer un autre opérateur pour la régularisation de l'image. En effet, l'opérateur que nous choisissons est basé sur la fonctionnelle dite de Mumford-Shah, dont le fondement repose sur le calcul des contours de l'image. Cet opérateur de lissage sera donc utilisé en lieu et place de la variation totale (TV), que nous avons employée dans le chapitre précédent. À cela une raison principale : essayer d'éviter les défauts inhérents à l'opérateur TV, tels que la (légère) perte de contraste qui peut se produire dans l'image reconstruite, mais surtout afin de prévenir ce caractère trop synthétique constaté auparavant, cette structure en escalier entre les zones homogènes de l'image régularisée. De plus, il est également envisageable d'arriver avec ce type d'opérateur à des images restaurées encore davantage nettes, présentant des bords encore plus francs.

Nous choisissons d'utiliser comme modèle de déconvolution une fonctionnelle à minimiser que nous basons sur les travaux de Bar *et al.* [13]. Ces derniers auteurs ont en effet traité le problème qu'ils qualifient de « semi-aveugle » avec une fonctionnelle de Mumford-Shah pour la régularisation portant sur l'image. Cette qualification de « semi-aveugle » provient du fait que l'approche proposée ne vise pas à reconstruire tout un noyau de flou h - c'est à dire concrètement une surface bidimensionnelle - mais simplement à estimer la valeur de paramètres (en l'occurrence d'un paramètre unique) caractérisant entièrement ce noyau. Le problème est donc moins qualifiable d'« aveugle », puisque l'on considère alors que l'on connaît la classe paramétrique du noyau de flou à estimer. On ne se place cependant pas ici dans ce contexte là.

Ce que nous souhaitons examiner, c'est l'apport, dans un contexte général, non-paramétrique, et comme cela a été fait dans le chapitre précédent, de l'utilisation en aveugle d'une régularisation de type Mumford-Shah pour l'image, toujours en conjonction avec une régularisation de type TV pour le noyau de flou. En effet, l'utilisation d'un tel terme a montré sa supériorité (du moins ponctuelle) par rapport à des régularisateurs plus traditionnels en traitement d'images, comme la semi-norme TV, en terme de fidélité de reconstruction. Ceci a par exemple été mis en évidence dans les travaux de Nikolova [143, 144] et Black et Rangarajan [22] pour la restauration à noyau connu. Nous voulons examiner si les mêmes avantages apparaissent dans un contexte aveugle, sans paramétrisation du noyau.

Nous commençons par présenter la fonctionnelle de Mumford-Shah, ainsi qu'une variante. Étant donné que ces fonctionnelles ne sont pas utilisables directement dans leur formulation initiale, nous donnerons de même leurs approximations.

1 Fonctionnelles de Mumford-Shah, Mumford-Shah/TV, et leur approximation

La fonctionnelle de Mumford-Shah a été introduite par les auteurs éponymes dans [136] pour le problème de segmentation. Le principe de la segmentation est de décomposer une image f (continue ici) en plusieurs régions lisses séparées par des contours, en minimisant la fonctionnelle de Mumford-Shah, dont la formulation faible est donnée, sur un espace Ω , par

$$\mathcal{M}(f) = \int_{\Omega \setminus K} (f - g)^2 + \xi \int_{\Omega \setminus K} |\nabla f|^2 + \alpha \mathfrak{H}^1(K), \quad (4.1)$$

où g est l'image observée, f l'image segmentée (inconnue), qui doit être proche de g au sens de la norme L^2 , \mathfrak{H}^1 la mesure de Hausdorff unidimensionnelle (de manière plus générale de dimension $n - 1$ pour $\Omega \in \mathbb{R}^n$), K l'ensemble des discontinuités de f , et ξ et α deux constantes positives de régularisation. Le premier terme dans cette fonctionnelle représente la fidélité aux données observées, tandis que le second favorise la douceur par morceaux et que le troisième minimise la longueur totale des bords. La mesure de Hausdorff étant en fait l'extension naturelle de la notion de longueur pour des courbes non régulières.

Minimiser (4.1) est une tâche délicate, car cette fonctionnelle n'est ni régulière ni convexe, principalement en raison de la présence du terme $\mathfrak{H}^1(K)$. De plus, sa discréétisation n'est pas évidente. Comme le calcul des variations classique n'est pas applicable, ce genre de problème à discontinuité libre doit être approximé [27]. Ceci peut être fait dans le cadre de la Γ -convergence [6], par une séquence de fonctionnelles régulières \mathcal{M}_η , avec $\eta \in \mathbb{R}_+^*$, telles qu'un minimiseur de \mathcal{M}_η approxime celui de \mathcal{M} . Commençons par rappeler la définition de la Γ -convergence :

Définition : On dit qu'une séquence $\mathcal{S}_\eta : \Omega \rightarrow [-\infty, +\infty]$ Γ -converge vers $\mathcal{S} : \Omega \rightarrow [-\infty, +\infty]$ si :

$$\forall u_j \rightarrow u : \mathcal{S}(u) \leq \liminf_j \mathcal{S}_j(u_j) \quad \text{et} \quad \exists u_j \rightarrow u : \mathcal{S}(u) \geq \limsup_j \mathcal{S}_j(u_j).$$

Dans ce cadre, Ambrosio et Tortorelli [5] ont proposé d'approximer (4.1) par :

$$\mathcal{M}_\eta(f) = \int_\Omega (f - g)^2 + \mathcal{G}_\eta(f, v), \quad (4.2)$$

où

$$\mathcal{G}_\eta(f, v) = \xi \int_\Omega v^2 |\nabla f|^2 + \alpha \int_\Omega \left(\eta |\nabla v|^2 + \frac{(v - 1)^2}{4\eta} \right), \quad (4.3)$$

de telle sorte que

$$\Gamma\text{-}\lim_{\eta \rightarrow 0} \mathcal{M}_\eta(f, v) = \int_{\Omega \setminus K} (f - g)^2 + \xi \int_\Omega |\nabla f|^2 + \alpha \mathfrak{H}^1(K) \quad (4.4)$$

$$= \int_{\Omega \setminus K} (f - g)^2 + \mathcal{G}(f, v), \quad (4.5)$$

où Γ -lim signifie la limite au sens de la Γ -convergence. Ici, v donne une carte approximée des bords de l'images :

$$v(x,y) \simeq \begin{cases} 0 & \text{si } (x,y) \in K \\ 1 & \text{autrement.} \end{cases} \quad (4.6)$$

et η doit être proche de zéro.

Bar *et al.* ont montré l'efficacité de l'utilisation de la fonctionnelle de Mumford-Shah (MS) en restauration d'images, dans son approximation par Γ -convergence [12]. Ils l'ont utilisée pour déflouer des images affectées par du bruit impulsif, pour le terme de régularisation sur l'image. Dans un autre article [13], les mêmes auteurs ont également montré l'avantage de la fonctionnelle de Mumford-Shah dans l'approche « semi-aveugle » évoquée plus haut.

Cependant, Bar *et al.* ont également précisé dans [10] qu'en présence de bruit (blanc) gaussien, cette fonctionnelle n'était pas particulièrement adaptée, et qu'il fallait plutôt la considérer pour le cas d'images affectées par un bruit impulsionnel. Dans le cas gaussien, une autre fonctionnelle, version modifiée de l'approximation (4.3), appelée fonctionnelle de Mumford-Shah / TV (MSTV) par Bar *et al.*, devrait être utilisée au lieu de MS. Il s'agit d'une version modifiée (se rapprochant de l'opérateur TV) de la fonctionnelle MS Γ -approximée¹, proposée dans [171], et qui consiste à remplacer la norme L^2 de ∇f dans (4.3) par une norme L^1 . Cette fonctionnelle MSTV s'écrivant alors

$$\mathcal{H}_\eta(f,v) = \xi \int_\Omega v^2 |\nabla f| + \alpha \int_\Omega \left(\eta |\nabla v|^2 + \frac{(v-1)^2}{4\eta} \right). \quad (4.7)$$

Il a été montré par Alicandro *et al.* [2] qu'elle Γ -converge vers

$$\mathcal{H}(f) = \xi \int_{\Omega \setminus K} |\nabla f| + \alpha \int_K \frac{|f^+ - f^-|}{1 + |f^+ - f^-|} d\mathfrak{H}^1 + |Df|(\Omega \setminus K), \quad (4.8)$$

où f^+ et f^- représentent les valeurs de l'image sur les deux bords de l'ensemble des discontinuités K , \mathfrak{H}^1 est la mesure unidimensionnelle de Hausdorff, et $|Df|$ la variation totale sur $\Omega \setminus K$ de la dérivée au sens des distributions Df .

2 Modèles de déconvolution à flou connu avec régularisation de type Mumford-Shah

Nous présentons et étudions maintenant deux modèles de déconvolution à flou connu. Nous allons nous intéresser dans cette section aux modèles à flou connu avec régularisation de type MS, puis de type MSTV, dans leur approximation par Γ -convergence. Nous souhaitons en effet examiner si l'inadaptation de la fonctionnelle MS au traitement des images contaminées par du bruit gaussien est vérifiée expérimentalement, quand la connaissance du flou est acquise.

Cela nous dispensera en effet alors d'étudier cette fonctionnelle comme régularisateur dans un modèle aveugle, puisqu'alors, même en considérant une reconstruction optimale du noyau avec ce même modèle, l'algorithme ne pourrait arriver à une meilleure reconstruction de l'image que celui à flou connu.

1. C'est-à-dire de la fonctionnelle (4.3) qui Γ -converge vers la fonctionnelle MS.

2.1 Modèle à flou connu avec régularisation MS

Nous considérons tout d'abord le modèle approximé à régularisation MS

$$\min_{f,v} \mathcal{J}_{\text{MS}} = \min_{f,v} \frac{1}{2} \|h * f - g\|_{L^2}^2 + \mathcal{G}_\eta(f,v) , \quad (4.9)$$

où $\mathcal{G}_\eta(f,v)$ est donnée en (4.3).

On peut montrer que

$$\frac{1}{2} \|h * f - g\|_{L^2}^2 + \mathcal{G}_\eta(f,v) \quad (4.10)$$

Γ -converge vers

$$\frac{1}{2} \|h * f - g\|_{L^2}^2 + \mathcal{G}(f,v) , \quad (4.11)$$

où l'expression de \mathcal{G} est donnée en (4.5), et ceci en raison des propriétés de stabilité de la Γ -convergence, ainsi que de la continuité de l'opérateur de convolution. De plus, par le théorème fondamental de la Γ -convergence [26], l'existence d'un minimiseur est garantie.

L'application des conditions d'optimalité de premier ordre à (4.9) donne² :

$$\frac{\partial \mathcal{J}_{\text{MS}}}{\partial v} = 2\xi v |\nabla f|^2 + \alpha \left(\frac{v-1}{2\eta} \right) - 2\eta\alpha \nabla^2 v = 0 \quad (4.12)$$

$$\frac{\partial \mathcal{J}_{\text{MS}}}{\partial f} = (h * f - g) * h^\circledast - \xi \operatorname{div}(v^2 \nabla f) = 0 . \quad (4.13)$$

La minimisation en (4.9) passe donc par la résolution de ces deux équations. La première est une équation aux dérivées partielles elliptique, dite de Helmholtz, tandis que la deuxième est linéaire, se rapprochant de celle que l'on obtient en considérant une régularisation H^1 de Tikhonov³

$$(h * f - g) * h^\circledast - \xi \operatorname{div}(\nabla f) = 0 . \quad (4.14)$$

Si nous nous positionnons sur une discontinuité, à un point (x,y) tel que $v(x,y) \simeq 0$, alors (4.13) se réduit à

$$(h * f - g) * h^\circledast = 0 , \quad (4.15)$$

ce qui est en fait un simple filtrage inverse, sans régularisation. A contrario, si nous considérons que nous sommes sur une zone homogène pour laquelle $v(x,y) \simeq 1$, alors (4.13) revient à considérer

$$(h * f - g) * h^\circledast - \xi \operatorname{div}(\nabla f) = 0 \quad (4.16)$$

ce qui se ramène exactement à une régularisation quadratique au sens de Tikhonov. La régularisation de Mumford-Shah peut donc être vue comme une régularisation quadratique tronquée, limitée aux zones lisses de l'image.

Quant à l'algorithme de minimisation de (4.9), celui-ci procède en résolvant de manière alternée (4.12) et (4.13) :

2. Voir pour les détails du calcul Annexe B, Section 4.3, de même que [13].

3. Comme pour (3.7) qui résulte en (3.57), p. 64 et 80.

```

Initialiser  $f^0$  avec  $g$ .
Pour  $n = 1$  à  $n = n_{\max}$ :
    1. Résoudre (4.12) pour  $v$  (avec  $f$  fixe)
    2. Résoudre (4.13) pour  $f$  (avec  $v$  fixe)
Fin

```

2.2 Modèle à flou connu avec régularisation MSTV

Nous présentons maintenant le modèle non-aveugle avec régularisation MSTV, également dans son approximation par Γ -convergence. Le problème de minimisation que nous considérons pour cela est

$$\min_{f,v} \mathcal{J}_{\text{MSTV}} = \min_{f,v} \frac{1}{2} \|h * f - g\|_{L^2}^2 + \mathcal{H}_\eta(f,v), \quad (4.17)$$

où $\mathcal{H}_\eta(f,v)$ est donnée en (4.7).

De même que précédemment, on peut montrer que

$$\frac{1}{2} \|h * f - g\|_{L^2}^2 + \mathcal{H}_\eta(f,v) \quad (4.18)$$

Γ -converge vers

$$\frac{1}{2} \|h * f - g\|_{L^2}^2 + \mathcal{H}(f,v), \quad (4.19)$$

où l'expression de \mathcal{H} est donnée en (4.8), et ceci pour les mêmes raisons que pour la fonctionnelle avec régularisation MS traitée en (4.9).

Ce modèle devrait en théorie permettre d'arriver à de meilleurs résultats sur des images acquises en conditions réelles, par rapport au modèle avec régularisation MS. En effet, la modélisation du bruit présent sur ce type d'images comme blanc et gaussien paraît la plus adéquate. Or, la régularisation MS est d'après Bar *et al.* plutôt à envisager pour des images affectées par du bruit impulsif.

L'application des conditions d'optimalité de premier ordre à (4.17) nous donne⁴ :

$$\frac{\partial \mathcal{J}_{\text{MSTV}}}{\partial v} = 2\xi v |\nabla f| + \alpha \left(\frac{v-1}{2\eta} \right) - 2\eta\alpha \nabla^2 v = 0 \quad (4.20)$$

$$\frac{\partial \mathcal{J}_{\text{MSTV}}}{\partial f} = (h * f - g) * h^\circledast - \xi \operatorname{div} \left(v^2 \frac{\nabla f}{|\nabla f|} \right) = 0. \quad (4.21)$$

La minimisation en (4.17) passe alors par la résolution de ces deux équations, dont la première est toujours une équation de Helmholtz en variable v , seul le coefficient du premier terme changeant ($2\xi|\nabla f|$ ici, au lieu de $2\xi|\nabla f|^2$ pour (4.12)). Pour la deuxième équation, considérons de nouveau les deux cas de figure : $v \simeq 0$, pour une discontinuité, et $v \simeq 1$ ailleurs. Pour $v \simeq 0$, c'est-à-dire sur un bord, (4.21) se réduit à

$$(h * f - g) * h^\circledast = 0, \quad (4.22)$$

4. Les calculs de dérivation sont très similaires à ceux appliqués à la fonctionnelle de Mumford-Shah.
 2. MODÈLES DE DÉCONVOLUTION À FLOU CONNU AVEC RÉGULARISATION DE TYPE MUMFORD-SHAH

ce qui correspond, comme pour le cas MS, à une simple inversion de h sans régularisation. Pour $v \simeq 1$, c'est-à-dire dans une zone homogène, (4.21) se réduit à

$$(h * f - g) * h^\otimes - \xi \operatorname{div} \left(\frac{\nabla f}{|\nabla f|} \right) = 0 , \quad (4.23)$$

ce qui est la même équation que celle obtenue via le modèle double TV de Chan et Wong⁵, et qui correspond en fait à la résolution de

$$\min_f \frac{1}{2} \|h * f - g\|_{L^2}^2 + \xi \int_\Omega |\nabla f| . \quad (4.24)$$

La fonctionnelle MSTV agit donc comme un filtre inverse aux discontinuités de l'image, et comme une régularisation TV sur les zones lisses ; l'algorithme de minimisation de (4.17) procédant également de manière alternée sur v et f pour résoudre (4.20) et (4.21) :

```

Initialiser  $f^0$  avec  $g$ .
Pour  $n = 1$  à  $n = n_{\max}$  :
    1. Résoudre (4.20) pour  $v$  (avec  $f$  fixe)
    2. Résoudre (4.21) pour  $f$  (avec  $v$  fixe)
Fin

```

3 Discrétisation des équations

Globalement, la discrétisation des deux équations (4.13) et (4.21) est très similaire à ce qu'on a fait dans le chapitre précédent. En effet, la résolution de (4.13) se rapproche fortement de celle de (3.57), tandis que (4.21) est quasi-identique à (3.28). Seule la résolution de (4.12), pour le cas Mumford-Shah (MS), et de (4.20), pour le cas Mumford-Shah/TV (MSTV), nécessite quelques précisions.

3.1 Cas Mumford-Shah

Commençons par examiner la discrétisation de l'équation (4.12). Pour résoudre cette équation aux dérivées partielles (EDP) linéaire, nous avons utilisé un schéma de discrétisation aux différences finies, comme expliqué dans [12]. Un système linéaire pentadiagonal

$$M_{\text{MS}} \mathbf{v} = \mathbf{c} \quad (4.25)$$

est alors obtenu, et résolu par la méthode de résidu minimum [152]. Ceci permet d'obtenir une carte des bords approximée v de l'image f .

La discrétisation de (4.12) donne

$$\begin{aligned} & \left(2\xi (\Delta_c^x f_{i,j}^n)^2 + (\Delta_c^y f_{i,j}^n)^2 + \frac{\alpha}{2\eta} \right) v_{i,j}^{n+1} - \dots \\ & - (2\alpha\eta [\Delta_+^x \Delta_-^x + \Delta_+^y \Delta_-^y]) v_{i,j}^{n+1} = \frac{\alpha}{2\eta} , \end{aligned} \quad (4.26)$$

où Δ_+ , Δ_- , et Δ_c sont les opérateurs de différences finies, respectivement avant, arrière, et centré, tels que $\Delta_+^x f_{i,j} = f_{i+1,j} - f_{i,j}$, $\Delta_-^y f_{i,j} = f_{i,j} - f_{i,j-1}$, et pour les différences centrées $\Delta_c^x f_{i,j} = (f_{i+1,j} - f_{i-1,j})/2$.

5. Cf. équation (3.27), p. 67.

Ceci mène alors au système $M_{\text{MS}}\mathbf{v} = \mathbf{c}$, où M_{MS} présente une structure pentadiagonale, ou tridiagonale par blocs :

$$M_{\text{MS}} = \begin{pmatrix} G_1 & A & & & \\ A & G_2 & A & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & A & G_{m-1} & A \\ & & & A & G_m \end{pmatrix}, \quad (4.27)$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} -2\alpha\eta & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & -2\alpha\eta \end{pmatrix} \quad (4.28)$$

et, pour les $G_1, G_2 \dots G_m$,

$$G_1 = \begin{pmatrix} g_{1,1} + 2a & a & & & \\ a & g_{2,1} & a & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & a & g_{n-1,1} & a \\ & & & a & g_{n,1} + 2a \end{pmatrix}, \quad (4.29)$$

où $a = -2\alpha\eta$, m et n sont les dimensions horizontales et verticales de l'image,

$$G_m = \begin{pmatrix} g_{1,m} + 2a & a & & & \\ a & g_{2,m} + a & a & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & a & g_{n-1,m} + a & a \\ & & & a & g_{n,m} + 2a \end{pmatrix} \quad (4.30)$$

et

$$G_k = \begin{pmatrix} g_{1,k} + a & a & & & \\ a & g_{2,k} & a & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & a & g_{n-1,k} & a \\ & & & a & g_{n,k} + a \end{pmatrix} \quad (4.31)$$

pour $1 < k < m$.

On a, pour les valeurs de g suivant les différents blocs, sauf aux coins et bords, c'est-à-dire pour $1 < i < m$ et $1 < j < n$,

$$\begin{aligned} g_{i,j} = \xi & (f_{i+1,j}^2 + f_{i-1,j}^2 - 2f_{i+1,j}f_{i-1,j} + f_{i,j+1}^2 + f_{i,j-1}^2 \dots \\ & - 2f_{i,j+1}f_{i,j-1}) + b - 4a. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Aux bords, on a

$$\begin{aligned} g_{1,j} = \xi & (f_{2,j}^2 + f_{1,j}^2 - 2f_{2,j}f_{1,j} + f_{1,j+1}^2 + f_{1,j-1}^2 \dots \\ & - 2f_{1,j+1}f_{1,j-1}) + b - 4a \end{aligned} \quad (4.33)$$

$$g_{n,j} = \xi (f_{n,j}^2 + f_{n-1,j}^2 - 2f_{n,j}f_{n-1,j} + f_{n,j+1}^2 + f_{n,j-1}^2 \dots \\ - 2f_{n,j+1}f_{n,j-1}) + b - 4a \quad (4.34)$$

pour $1 < j < n$, et

$$g_{i,1} = \xi (f_{i+1,j}^2 + f_{i-1,j}^2 - 2f_{i+1,j}f_{i-1,j} + f_{i,2}^2 + f_{i,1}^2 \dots \\ - 2f_{i,2}f_{i,1}) + b - 4a \quad (4.35)$$

$$g_{i,m} = \xi (f_{i+1,m}^2 + f_{i-1,m}^2 - 2f_{i+1,m}f_{i-1,m} + f_{i,m}^2 + f_{i,m-1}^2 \dots \\ - 2f_{i,m}f_{i,m-1}) + b - 4a \quad (4.36)$$

pour $1 < i < m$.

Aux coins, on a

$$g_{1,1} = \xi (f_{2,1}^2 + 2f_{1,1}^2 - 2f_{2,1}f_{1,1} + f_{1,2}^2 \dots \\ - 2f_{1,2}f_{1,1}) + b - 4a \quad (4.37)$$

$$g_{1,m} = \xi (f_{2,m}^2 + 2f_{1,m}^2 - 2f_{2,m}f_{1,m} + f_{1,m-1}^2 \dots \\ + 2f_{1,m}f_{1,m-1}) + b - 4a \quad (4.38)$$

$$g_{n,1} = \xi (2f_{n,1}^2 + f_{n-1,1}^2 - 2f_{n,1}f_{n-1,1} + f_{n,2}^2 + f_{n,1}^2 \dots \\ - 2f_{n,2}f_{n,1}) + b - 4a \quad (4.39)$$

$$g_{n,m} = \xi (2f_{n,m}^2 + f_{n-1,m}^2 - 2f_{n,m}f_{n-1,m} + f_{n,m-1}^2 \dots \\ - 2f_{n,m}f_{n,m-1}) + b - 4a. \quad (4.40)$$

Le vecteur \boldsymbol{v} contient les variables $v_{i,j}$ ordonnancées de manière lexicographique, soit

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} \Upsilon_1 \\ \vdots \\ \Upsilon_m \end{pmatrix} \quad (4.41)$$

avec, pour chaque vecteur bloc Υ_i ,

$$\Upsilon_i = \begin{pmatrix} v_{1,i} \\ \vdots \\ v_{n,i} \end{pmatrix}. \quad (4.42)$$

Quant au vecteur des constantes du second membre de l'équation (4.25), il est simplement donné par

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{2\eta} \\ \vdots \\ \frac{\alpha}{2\eta} \end{pmatrix}_{n \times m}. \quad (4.43)$$

Pour ce qui concerne la résolution de l'équation (4.13), celle-ci peut être écrite comme⁶

$$H^*(H\mathbf{f} - \mathbf{g}) + \xi L(\mathbf{v})\mathbf{f} = 0, \quad (4.44)$$

avec

$$L(\mathbf{v}) = -\operatorname{div}(\mathbf{v}^2 \nabla \mathbf{f}). \quad (4.45)$$

Si l'on pose $A(\mathbf{v})\mathbf{f} = H^*H\mathbf{f} + \xi L(\mathbf{v})\mathbf{f}$, on obtient alors le schéma itératif

$$A(\mathbf{v})\mathbf{f}^{n+1} = H^*\mathbf{g}, \quad (4.46)$$

dans lequel $\mathbf{f}^{n+1} = \mathbf{f}^n + \mathbf{d}^n$. Ceci mène à un système linéaire résolu via la correction \mathbf{d}^n , en utilisant l'algorithme de gradient conjugué.

3.2 Cas Mumford-Shah/TV

Pour résoudre l'équation aux dérivées partielles linéaire (4.20), le même schéma de discrétisation aux différences finies est utilisé, comme expliqué ci-dessus. De nouveau, un système linéaire pentadiagonal $M_{\text{MSTV}}\mathbf{v} = \mathbf{c}$ est obtenu, et résolu par la méthode de résidu minimum, afin d'obtenir la carte des bords souhaitée approximée v de l'image f . La discrétisation de (4.20) donne

$$\begin{aligned} & \left(2\xi \sqrt{\left(\Delta_c^x f_{i,j}^n \right)^2 + \left(\Delta_c^y f_{i,j}^n \right)^2} + \frac{\alpha}{2\eta} \right) v_{i,j}^{n+1} - \dots \\ & - (2\alpha\eta [\Delta_+^x \Delta_-^x + \Delta_+^y \Delta_-^y]) v_{i,j}^{n+1} = \frac{\alpha}{2\eta}, \end{aligned} \quad (4.47)$$

avec les mêmes opérateurs aux différences finies avant, arrière et centrées que précédemment.

La structure pentadiagonale (ou tridiagonale par blocs) de la matrice M_{MSTV} est alors similaire à celle de M_{MS} (cf. (4.27)), seuls les coefficients étant modifiés. En effet, on a alors pour les valeurs de g suivant les différents blocs, sauf aux coins et bords, soit pour $1 < i < m$ et $1 < j < n$:

$$\begin{aligned} g_{i,j} = & \xi (f_{i+1,j}^2 + f_{i-1,j}^2 - 2f_{i+1,j}f_{i-1,j} + f_{i,j+1}^2 + f_{i,j-1}^2 \dots \\ & - 2f_{i,j+1}f_{i,j-1} + \beta)^{1/2} + b - 4a. \end{aligned} \quad (4.48)$$

Aux bords, on a

$$\begin{aligned} g_{1,j} = & \xi (f_{2,j}^2 + f_{1,j}^2 - 2f_{2,j}f_{1,j} + f_{1,j+1}^2 + f_{1,j-1}^2 \dots \\ & - 2f_{1,j+1}f_{1,j-1} + \beta)^{1/2} + b - 4a \end{aligned} \quad (4.49)$$

$$\begin{aligned} g_{n,j} = & \xi (f_{n,j}^2 + f_{n-1,j}^2 - 2f_{n,j}f_{n-1,j} + f_{n,j+1}^2 + f_{n,j-1}^2 \dots \\ & - 2f_{n,j+1}f_{n,j-1} + \beta)^{1/2} + b - 4a \end{aligned} \quad (4.50)$$

6. De manière symétrique à (3.35) dans le cas de la régularisation TV du Chapitre 3, p. 69.

pour $1 < j < n$, et

$$g_{i,1} = \xi (f_{i+1,j}^2 + f_{i-1,j}^2 - 2f_{i+1,j}f_{i-1,j} + f_{i,2}^2 + f_{i,1}^2 \dots \\ - 2f_{i,2}f_{i,1} + \beta)^{1/2} + b - 4a \quad (4.51)$$

$$g_{i,m} = \xi (f_{i+1,m}^2 + f_{i-1,m}^2 - 2f_{i+1,m}f_{i-1,m} + f_{i,m}^2 + f_{i,m-1}^2 \dots \\ - 2f_{i,m}f_{i,m-1} + \beta)^{1/2} + b - 4a \quad (4.52)$$

pour $1 < i < m$.

Aux coins, on a

$$g_{1,1} = \xi (f_{2,1}^2 + 2f_{1,1}^2 - 2f_{2,1}f_{1,1} + f_{1,2}^2 \dots \\ - 2f_{1,2}f_{1,1} + \beta)^{1/2} + b - 4a \quad (4.53)$$

$$g_{1,m} = \xi (f_{2,m}^2 + 2f_{1,m}^2 - 2f_{2,m}f_{1,m} + f_{1,m-1}^2 \dots \\ + 2f_{1,m}f_{1,m-1} + \beta)^{1/2} + b - 4a \quad (4.54)$$

$$g_{n,1} = \xi (2f_{n,1}^2 + f_{n-1,1}^2 - 2f_{n,1}f_{n-1,1} + f_{n,2}^2 + f_{n,1}^2 \dots \\ - 2f_{n,2}f_{n,1} + \beta)^{1/2} + b - 4a \quad (4.55)$$

$$g_{n,m} = \xi (2f_{n,m}^2 + f_{n-1,m}^2 - 2f_{n,m}f_{n-1,m} + f_{n,m-1}^2 \dots \\ - 2f_{n,m}f_{n,m-1} + \beta)^{1/2} + b - 4a. \quad (4.56)$$

Ici, la variable β est utilisée de la même façon qu'en (3.14)⁷ afin d'approximer la semi-norme TV, et plus précisément le terme $\frac{\nabla f}{|\nabla f|}$ considéré dans l'opérateur de divergence de (4.23). Nous avons choisi de conserver son réglage comme dans le chapitre précédent à $\beta = 1$.

La résolution de (4.21) passe aussi par une approche de linéarisation de gradient par point fixe, comme nous l'avions fait dans le chapitre précédent. Pour cela, posons

$$L(\mathbf{f})\mathbf{w} = -\operatorname{div}\left(\frac{v^2}{\sqrt{|\nabla \mathbf{f}|^2 + \beta^2}}\nabla \mathbf{w}\right), \quad (4.57)$$

où β est proche de zéro (en pratique $\beta = 1$ donc), de nouveau pour éviter les problèmes de non-différentiabilité en zéro. L'équation (4.21) peut alors être écrite sous la forme

$$H^\circledast(H\mathbf{f} - \mathbf{g}) + \xi L(\mathbf{f})\mathbf{f} = P(\mathbf{f}) = 0 \quad (4.58)$$

ou bien alors, en posant comme variable duale pour l'image f

7. Cf. p. 65.

$$\vec{v}_1 = \frac{v^2 \nabla \mathbf{f}}{\sqrt{|\nabla \mathbf{f}|^2 + \beta^2}}, \quad (4.59)$$

sous la forme

$$H^* H \mathbf{f} - \xi \operatorname{div} \vec{v}_1 = H^* \mathbf{g}. \quad (4.60)$$

On peut alors linéariser en posant $\mathbf{f} = \mathbf{f}_i$ dans le dénominateur de \vec{v}_1 . Ceci mène alors à l'itération de point fixe pour l'équation (4.21), ainsi qu'à l'écriture matricielle

$$[H^* H + \xi L(\mathbf{f}_i)] \mathbf{f}_{i+1} = H^* \mathbf{g}. \quad (4.61)$$

Cette dernière expression obtenue peut alors être mise sous forme d'algorithme de type quasi-Newton, donnant ainsi

$$\mathbf{f}_{i+1} = \mathbf{f}_i - A(\mathbf{f}_i)^{-1} P(\mathbf{f}_i), \quad (4.62)$$

où P est donnée par l'expression (4.58), de même que $A(\mathbf{f}) = H^* H + \xi L(\mathbf{f})$ est l'approximation au premier ordre du hessien de la fonctionnelle quadratique pénalisée en (4.17) :

$$\partial_f^2 = H^* H + \alpha_1 L(\mathbf{f}) + \alpha_1 L'(\mathbf{f}) \mathbf{f}. \quad (4.63)$$

4 Influence du bruit blanc gaussien en fonction du type de régularisation

Nous allons étudier expérimentalement ici si, dans le cas d'images affectées par un bruit (blanc) gaussien, l'utilisation de la fonctionnelle de Mumford-Shah comme régularisation dans un problème de déconvolution à flou connu s'avère moins performante que celle de Mumford-Shah/TV. Ceci confirmera, ou infirmera, ce qui a été énoncé par Bar *et al.* dans le cadre des images couleurs [10].

La première chose que nous faisons est d'étudier la qualité de restauration obtenue en utilisant la fonctionnelle de Mumford-Shah sur une image bruitée, en fonction du réglage des paramètres de régularisation α (portant sur les contours de l'image) et η (paramètre de Γ -convergence). Nous fixons en outre ξ à la même valeur que celle que nous avons mesurée expérimentalement comme étant optimale pour le cas avec régularisation H^1 . En effet, la régularisation de Mumford-Shah est fondamentalement une régularisation quadratique, mais tronquée. Cette régularisation quadratique est influencée par l'absence ou présence de bords définis par v . On considère donc le problème de minimisation

$$\min_{f,v} \mathcal{J}_{\text{MS}} = \min_{f,v} \frac{1}{2} \|h * f - g\|_{L^2}^2 + G_\eta(f, v), \quad (4.64)$$

et ceci dans les deux cas expérimentaux principaux du Chapitre 3 : avec l'image *Nid de cailloux* défocalisée⁸, puis avec l'image *Reprise de béton* affectée par un mouvement rectiligne⁹. Dans ces deux configurations, on a ajouté un bruit blanc gaussien d'écart-type $\sigma = 3$.

8. C'est-à-dire l'image de la Fig. 3.13 (e), p. 92, pour laquelle $\rho = 5$.

9. C'est-à-dire l'image de la Fig. 3.13 (f), p. 92, pour laquelle $l = 11$ et $\theta = 45^\circ$.

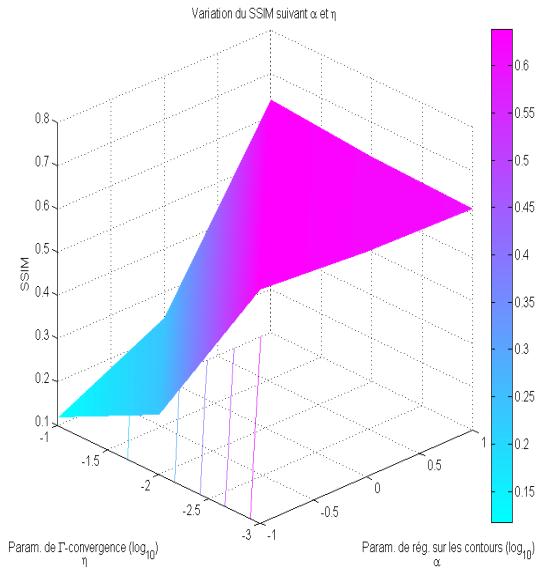


FIGURE 4.1 – Variation du SSIM de l'image *Nid de cailloux* défocalisée, restaurée avec régularisation MS, suivant le réglage des paramètres α et η .

4.1 Test sur une image affectée par un flou de défocalisation

Pour régler les paramètres de régularisation de manière optimale (au sens du meilleur SSIM), nous considérons donc la même valeur pour ξ que celle obtenue avec une régularisation quadratique H^1 . En effet, on rappelle que la régularisation de Mumford-Shah est quadratique partout sauf aux bords; ce choix semble donc logique. La valeur optimale est ici obtenue pour $\xi = 10^{-2}$.

Nous allons donc faire varier à la fois α , paramètre portant sur les contours de l'image, et η , paramètre assurant la Γ -convergence, et que l'on doit ajuster, pour s'assurer de cette convergence, à une valeur « proche de zéro ».

La variation du SSIM obtenu pour les images restaurées suivant les différentes combinaisons de réglage est présentée en Fig. 4.1. La meilleure combinaison des paramètres est obtenue pour $\alpha = 10^{-1}$, $\xi = 10^{-2}$, et $\eta = 10^{-3}$. Le SSIM résultant est à 0,6388. Si l'on compare avec les performances obtenues en régularisation H^1 , on obtient, avec un temps de calcul de quelques secondes, une image déflouée présentant un SSIM de 0,6227, plus faible donc, mais un PSNR légèrement plus élevé, à 21,55 dB, contre 21,13 dB avec régularisation de Mumford-Shah. Globalement, il est intéressant de constater qu'au vu du graphique obtenu, α doit évoluer de manière inversement proportionnelle à η pour obtenir les meilleurs résultats (toujours au sens objectif du SSIM bien entendu) : quand $\eta \rightarrow 0$, α doit augmenter.

Nous refaisons la même étude des paramètres de régularisation, en utilisant maintenant la fonctionnelle Mumford-Shah / TV, afin de bien vérifier si, en effet, les résultats sont supérieurs à ceux obtenus avec (4.64). On considère donc pour cela la minimisation

$$\min_{f,v} \mathcal{J}_{\text{MSTV}} = \min_{f,v} \frac{1}{2} \|h * f - g\|_{L^2}^2 + \mathcal{H}_\eta(f,v). \quad (4.65)$$

Nous avons fixé la valeur de ξ de manière symétrique au cas MS, c'est-à-dire

Régularisation	MS	H^1	MSTV	TV
PSNR (dB)	21,13	21,55	22,16	22,02
SSIM	0,6388	0,6227	0,6613	0,6586

TABLEAU 4.1 – Indicateurs de qualité de restauration pour l'image *Nid de cailloux* défocalisée, après déconvolution avec différentes régularisations.

en considérant qu'en dehors des bords, la régularisation MSTV correspond à une régularisation TV. Nous avons donc choisi $\xi = 20$, car c'est dans ce cas de figure la valeur optimale pour une restauration avec régularisation TV¹⁰. Ceci dans un contexte à itération de point fixe à critère d'arrêt, afin que la semi-norme TV soit le plus fidèlement possible approximée. Nous montrons en Fig. 4.2 l'évolution de la valeur du SSIM de l'image reconstruite, en (a) avec une vue générale, et en (b) avec une vue agrandie sur la zone plate de (a), ceci afin de mieux mettre en évidence l'évolution du SSIM suivant α et η . On peut constater que la déconvolution semble ici bien moins sensible au réglage des paramètres que pour le cas MS, étant donné la plage d'étalement des valeurs de SSIM relativement restreinte. De même, on obtient une valeur maximale de SSIM à 0,6613, contre 0,6586 avec régularisation TV, et 0,6388 avec la régularisation MS (qui, on le rappelle, donnait des résultats même inférieurs à ceux obtenus avec une régularisation H^1 au sens du PSNR). Cette valeur optimale est obtenue avec plusieurs combinaisons possibles pour α et η , et semble être une valeur limite atteignable. Tout ceci tend donc bien à confirmer qu'en effet, l'utilisation de la fonctionnelle MSTV semble plus adaptée au traitement d'images affectées par du bruit blanc gaussien que celle de la fonctionnelle MS.

Le Tab. 4.1 recense les différentes valeurs de PSNR et SSIM obtenues pour la restauration de cette image avec les quatre schémas de déconvolution à noyau connu : MS, H^1 , MSTV et TV. La supériorité de MSTV y apparaît explicitement.

4.2 Test sur une image affectée par un flou de mouvement

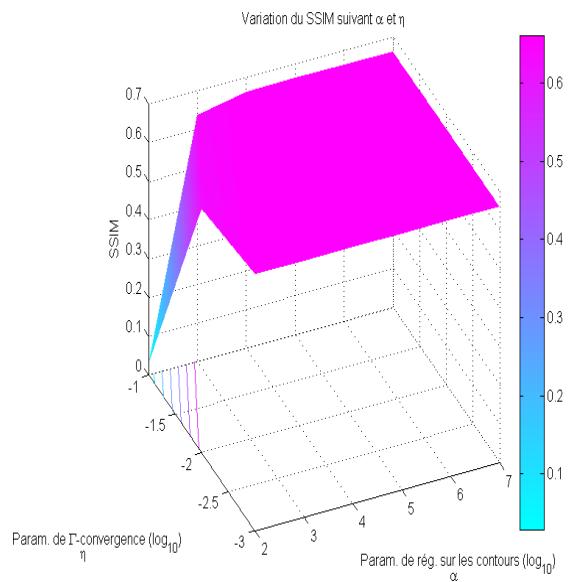
De même que pour la défocalisation, nous examinons maintenant l'influence du réglage couplé des paramètres α et η pour la restauration de l'image *Reprise de béton* dégradée par un flou de mouvement rectiligne, contaminée par le même type de bruit blanc gaussien, avec le même écart-type ($\sigma = 3$).

Nous considérons tout d'abord le cas de la déconvolution avec une régularisation MS. On donne en Fig. 4.3 l'évolution du SSIM de l'image déflouée suivant le réglage des paramètres. On constate de nouveau que, pour obtenir une bonne qualité de restauration, α et η doivent respecter un certain couplage dans leur réglage. Le meilleur SSIM obtenu présente une valeur de 0,7378, avec $\alpha = 10$, $\xi = 10^{-2}$ et $\eta = 10^{-1}$.

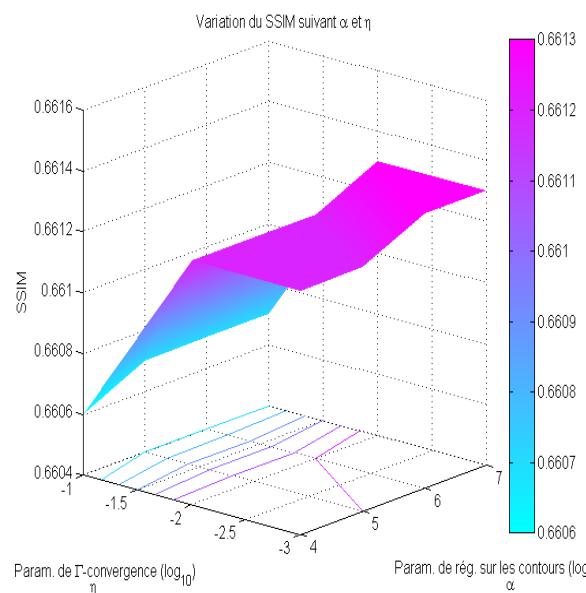
Examinons maintenant l'influence du réglage des paramètres α (contours de l'image) et η (Γ -convergence) de la régularisation MSTV, sur la restauration.

Nous illustrons l'influence de l'évolution des différents paramètres de régularisation par la Fig. 4.4. On constate que la meilleure combinaison de ces paramètres sur l'image est également obtenue pour plusieurs combinaisons possibles des réglages de α et η ($\xi = 30$ ayant été choisi pour les mêmes raisons que précédemment, à savoir son caractère optimal

10. Voir Annexe A, Tab. A.1, p. 249.



(a) Vue globale



(b) Vue locale agrandie

FIGURE 4.2 – Variation du SSIM de l'image *Nid de cailloux* défocalisée, restaurée avec régularisation MSTV, suivant le réglage des paramètres α et η .

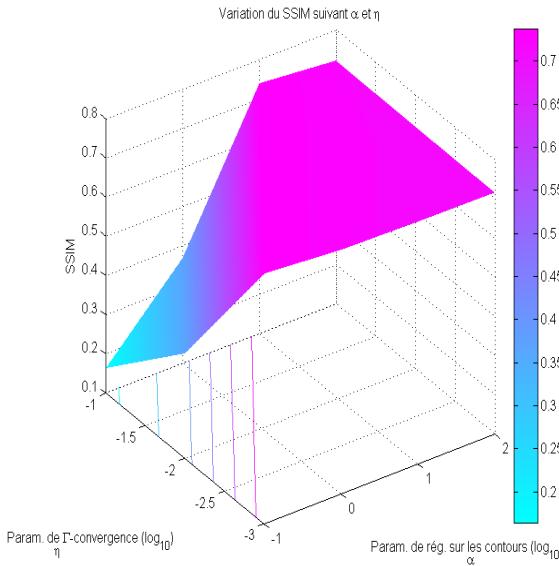


FIGURE 4.3 – Variation du SSIM de l'image *Reprise de béton* affectée par un mouvement, restaurée avec régularisation MS, suivant le réglage des paramètres α et η .

Régularisation	MS	H^1	MSTV	TV
PSNR (dB)	23,88	23,99	24,37	24,27
SSIM	0,7378	0,7232	0,7329	0,7260

TABLEAU 4.2 – Indicateurs de qualité de restauration pour l'image *Reprise de béton* affectée par un mouvement, après déconvolution avec différentes régularisations.

dans l'utilisation d'une restauration avec régularisation TV). Celles-ci mènent à une image restaurée présentant un SSIM de 0,7329. À titre de comparaison, on obtenait avec le même paramètre de régularisation ($\xi = 30$) et un opérateur TV un SSIM de 0,726, soit une différence notable, confirmant la supériorité de MSTV sur TV.

Le Tab. 4.2 recense les différentes valeurs de PSNR et SSIM obtenues pour la restauration à noyau connu de cette image avec les quatre types de régularisation : MS, H^1 , MSTV et TV. La supériorité de MSTV y est de nouveau bien visible au sens du PSNR, mais en revanche, ce n'est plus le cas au sens du SSIM, puisqu'une valeur plus élevée est obtenue avec régularisation MS.

Le postulat de Bar *et al.* sur la supériorité de MSTV sur MS semble donc devoir être ici relativisé, dans la mesure où cette supériorité dépend de l'indicateur considéré, ou/et peut-être du type de flou présent.

4.3 Comparaison visuelle

Étant donné que les indicateurs PSNR et SSIM ne nous permettent pas de distinguer clairement laquelle des régularisations MS et MSTV semble être la plus performante en présence de bruit blanc gaussien, nous effectuons une comparaison visuelle. Celle-ci peut certes sembler subjective, mais est au final tout aussi pertinente en ce qui concerne la

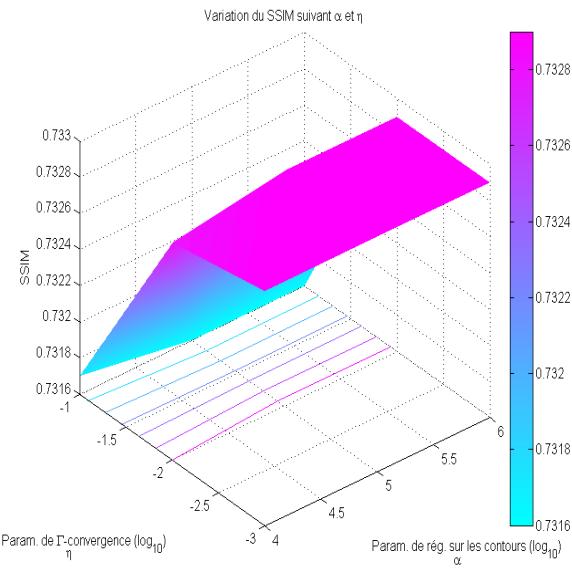


FIGURE 4.4 – Variation du SSIM de l'image *Reprise de béton* affectée par un mouvement, restaurée avec régularisation MSTV, suivant le réglage des paramètres α et η .

perception de la netteté. En effet, dans le cas où l'on a à restaurer une image en aveugle, aucun indice ne peut alors être calculé ni utilisé.

Nous présentons donc en Fig. 4.5 une zone d'intérêt issue de chacune deux images *Nid de cailloux* et *Reprise de béton* restaurées dans les deux sections précédentes (la première à partir d'une défocalisation, et la deuxième d'un flou de mouvement), avec les différents schémas de régularisation (MS, H^1 , MSTV et TV). De ceci, il ressort, dans le cas de l'image initialement défocalisée, que la régularisation MSTV reconstruit des bords bien nets. Par rapport à MS, on observe aussi une image plus agréable, moins synthétique. Les bords semblent parfois être bruités, peut-être en raison du fait que leur reconstruction correspond à un filtrage inverse, ce qui pourrait alors expliquer que les indicateurs de PSNR ou SSIM puissent présenter des valeurs inférieures avec les régularisations de type MS par rapport aux autres (TV notamment). Pour le cas de l'image affectée par le mouvement rectiligne, il est plus délicat de discriminer un résultat « idéal ». On perçoit bien des bords très francs dans le cas MS, mais ceux-ci paraissent trop artificiels. La régularisation TV et MSTV sont peut-être alors les meilleurs choix ici.

De manière générale, il peut donc au final s'avérer effectivement intéressant de considérer une régularisation MSTV dans un modèle de déconvolution, en présence de bruit blanc gaussien, et nous allons l'envisager dans ce qui suit dans un contexte aveugle.

5 Modèle de déconvolution aveugle avec régularisation MSTV

Les expérimentations précédentes nous ont permis de bien confirmer deux choses : premièrement, comme l'annonçaient Bar *et al.*, la régularisation MS se révèle légèrement moins adaptée que sa variante MSTV pour la déconvolution à flou connu d'images affectées par du bruit blanc gaussien. Deuxièmement, la régularisation MSTV se montre

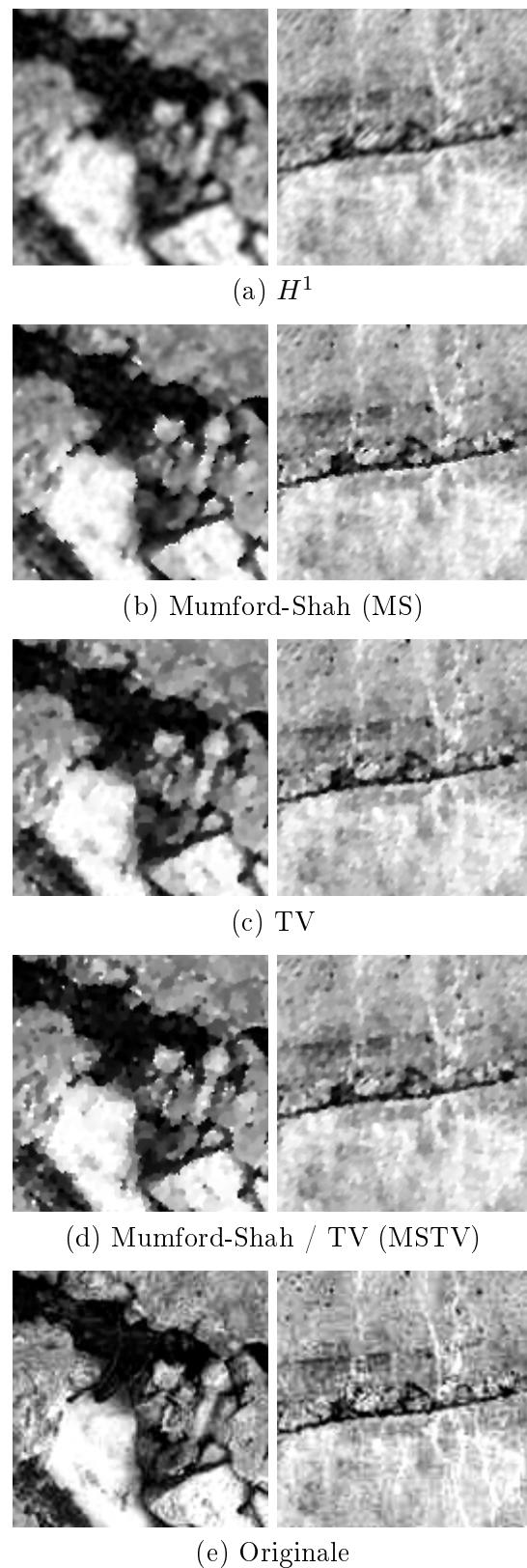


FIGURE 4.5 – (a)-(d) Zones d'intérêt des images déflouées avec les différentes régularisations. (e) Zones d'intérêt originales nettes.

supérieure à la régularisation TV en terme de reconstruction de bords nets.

Nous allons donc considérer la fonctionnelle Mumford-Shah / TV dans un modèle aveugle avec double régularisation. Comme nous traitons des images affectées par des flous de défocalisation et de mouvement, donc avec des bords francs, nous continuons d'utiliser la régularisation TV sur le noyau de flou, puisque que celle-ci permet de traiter les discontinuités, clairement présentes sur ce genre de fonctions de dispersion. On précise en outre qu'utiliser sur ce terme une régularisation de type MSTV n'apporterait sûrement rien de plus en qualité de restauration, puisque que, comme on l'a vu dans le chapitre précédent, une procédure de seuillage (ou de manière générale de contrôle de l'étalement du flou) est absolument nécessaire, et que c'est principalement celle-ci qui permet d'arriver à une reconstruction précise du noyau, par rapport à la place qu'occupe la régularisation dans cela. Le problème de minimisation que nous avons donc à traiter s'écrit

$$\min_{f,h,v} \mathcal{Q}_{\text{MSTV}} = \min_{f,h,v} \frac{1}{2} \|h * f - g\|_{L^2}^2 + \mathcal{H}_\eta(f,v) + \gamma \int_\Omega |\nabla h| , \quad (4.66)$$

où \mathcal{H}_η est la fonctionnelle MSTV, considérée dans sa Γ -approximation, et γ le paramètre de régularisation sur le flou.

De même que pour les modèles à flous connus présentés en Section 2.2, on peut montrer que

$$\frac{1}{2} \|h * f - g\|_{L^2}^2 + \mathcal{H}_\eta(f,v) + \gamma \int_\Omega |\nabla h| \quad (4.67)$$

Γ -converge vers

$$\frac{1}{2} \|h * f - g\|_{L^2}^2 + \mathcal{H}(f,v) + \gamma \int_\Omega |\nabla h| , \quad (4.68)$$

où \mathcal{H} est donné en (4.8).

C'est le modèle défini par la fonctionnelle $\mathcal{Q}_{\text{MSTV}}$ que nous nous sommes proposés de traiter, en lieu et place du modèle double TV en (3.8), ceci avec l'espoir d'obtenir des restaurations de qualité plus élevée, par certains aspects du moins, des images encore davantage nettes, comme cela a pu être le cas en restauration classique, avec noyau connu.

5.1 Algorithme de minimisation

La minimisation (4.66) n'est pas triviale, mais se rapproche très fortement de celle utilisée pour (3.8). Tout d'abord, nous commençons de nouveau par appliquer les conditions d'optimalité de premier ordre, en utilisant les conditions aux bords de Neumann¹¹. Ceci mène à un ensemble de trois équations, qui correspondent aux minimisations par rapport à v , f , et h :

$$\frac{\partial \mathcal{Q}_{\text{MSTV}}}{\partial v} = 2\xi v |\nabla f| + \alpha \left(\frac{v-1}{2\eta} \right) - 2\eta\alpha \nabla^2 v = 0 \quad (4.69)$$

$$\frac{\partial \mathcal{Q}_{\text{MSTV}}}{\partial f} = (h * f - g) * h^* - \xi \operatorname{div} \left(v^2 \frac{\nabla f}{|\nabla f|} \right) = 0 \quad (4.70)$$

$$\frac{\partial \mathcal{Q}_{\text{MSTV}}}{\partial h} = (h * f - g) * f^* - \gamma \operatorname{div} \left(\frac{\nabla h}{|\nabla h|} \right) = 0 . \quad (4.71)$$

11. Voir à ce propos Annexe B, Section 4.3, p. 263.

Nous suivons ensuite fondamentalement le même schéma de minimisation alternée que dans l'algorithme de Chan et Wong [40] : à chaque étape, on minimise par rapport à une variable, en gardant les deux autres fixées. L'algorithme générique est alors :

```

Initialiser  $f^0$  avec  $g$  et  $h^0$  avec une impulsion de Dirac.
Pour  $i = 1$  à  $i = i_{\max}$  :
    1. Résoudre (4.69) pour  $v$  (avec  $f$  et  $h$  fixes)
    2. Résoudre (4.70) pour  $f$  (avec  $h$  et  $v$  fixes)
    3. Résoudre (4.71) pour  $h$  (avec  $f$  et  $v$  fixes)
    4. Contraindre  $h$ 
Fin

```

Bien entendu, la contrainte de seuillage (3.56) sur h est de nouveau totalement nécessaire afin de forcer l'énergie du noyau à être localisée au centre de l'opérateur.

La résolution de (4.69) a été détaillée en Section 3.2. L'équation (4.71) est la même EDP non-linéaire en h que celle apparaissant dans la minimisation du modèle à double régularisation TV du chapitre précédent. Sa résolution est donc rigoureusement identique. Seule la présence du terme en v^2 dans l'opérateur de divergence fait différer (4.70) de l'équation aux dérivées partielles sur f obtenue dans le modèle de Chan et Wong. Le schéma de résolution utilisé est donc le même ici, avec une adaptation permettant de prendre en compte la carte des bords v , comme cela est fait en Section 3.2.

6 Expérimentations en aveugle

On va proposer ici plusieurs tests, dont un certain nombre identiques à ceux effectués dans le chapitre précédent en utilisant la double régularisation TV, en considérant ici la minimisation du modèle (4.66). Ceci va nous permettre de vérifier ce qui a été constaté dans le cadre de la déconvolution MSTV à flou connu par rapport à la déconvolution TV à flou connu, à savoir des résultats légèrement supérieurs pour le cas MSTV (en précisant bien qu'il s'agit la plupart du temps de supériorité au sens de la netteté des bords) en présence d'images floues affectées par du bruit blanc gaussien. De même que dans le chapitre précédent, la valeur de seuillage du noyau est toujours fixée à $\zeta = 1/10$, sauf quand une autre valeur est précisée.

6.1 Test sur une image affectée par un flou de défocalisation

On commence par examiner le cas de l'image *Nid de cailloux* en Fig. 3.13 (e), toujours défocalisée par un noyau de rayon $\rho = 5$, et affectée par un bruit blanc gaussien d'écart-type $\sigma = 3$. Les paramètres de régularisation ont été fixés en accord avec les valeurs optimales obtenues ci-avant, dans le problème à noyau connu, à $\alpha = 10^5$, $\xi = 20$, $\eta = 10^{-3}$, $\gamma = 9 \cdot 10^7$. Les résultats de déconvolution obtenus par notre modèle (4.66) sont donnés en Fig. 4.6.

On peut constater plusieurs choses : tout d'abord, les indicateurs de l'image reconstruite, et l'image elle-même, montrent une qualité très proche de celle obtenue en restaurant l'image à partir du noyau connu, par utilisation du modèle (4.65). En effet, le PSNR de l'image reconstruite est ici de 21,74 dB, et son SSIM de 0,6467, contre des valeurs respectives de 22,16 dB et 0,6612. Ceci est donc une excellente chose puisque la qualité de restauration obtenue par le schéma aveugle est quasi-identique à celle obtenue avec le

schéma à noyau connu. Cela montre, au moins pour ce cas, la performance de notre approche. La deuxième chose à constater est la présence d'une carte des bords bien nette qui tend à prouver que la déconvolution s'est bien déroulée, et que l'image restaurée comporte des arêtes bien franches. Le troisième point intéressant est la comparaison du résultat obtenu avec celui résultant de l'algorithme double TV du chapitre précédent, comparaison qui sera détaillée en Section 6.3. Enfin, signalons que la croissance monotone des indicateurs de PSNR et SSIM, de même que la décroissance monotone des courbes d'évolution est un signe de bon comportement de l'algorithme dans le cas ci-présent.

6.2 Test sur une image affectée par un flou de mouvement

Nous considérons maintenant le cas de l'image *Reprise de béton* en Fig. 3.13 (f), affectée par un flou de mouvement présentant les mêmes caractéristiques que dans les expérimentations du précédent chapitre : longueur $l = 11$ et angle $\theta = 45^\circ$, avec ajout d'un bruit blanc gaussien d'écart-type $\sigma = 3$. Nous avons alors envisagé deux possibilités de restauration : la première avec nombre d'itérations de point fixe sur l'image suivant critère d'arrêt (c'est-à-dire avec arrêt à convergence, et bridage à dix itérations si non-convergence), et la deuxième avec une seule itération de point fixe, afin d'accélérer l'algorithme.

Dans le cadre de l'itération de point fixe à critère d'arrêt, on a fixé la valeur des paramètres de régularisation à $\alpha = 10^5$, $\xi = 30$, $\eta = 10^{-2}$, $\gamma = 9 \cdot 10^7$, ceci pour les mêmes raisons que celles évoquées dans la section ci-dessus. Les résultats obtenus pour ce premier cas sont présentés en Fig. 4.7. Ils sont plutôt satisfaisants, et autant le noyau que l'image sont bien reconstruits, avec une carte des bords significative.

Pour le deuxième cas, avec une seule itération de point fixe, la valeur des paramètres a été fixée à : $\alpha = 10^{-1}$, $\xi = 10^{-2}$, $\eta = 10^{-1}$. Cela nous donne alors les résultats de la Fig. 4.8. De manière non surprenante¹², la qualité de l'image obtenue ici est légèrement inférieure, mais tout de même totalement acceptable par rapport à celle présentée par l'image flouée. De plus, le temps de calcul est alors largement inférieur, divisé globalement par un facteur dix.

6.3 Comparaisons avec le modèle de déconvolution aveugle double TV

Il est à ce stade intéressant de comparer les résultats obtenus ci-dessus avec le modèle aveugle MSTV, par rapport au modèle double TV. Nous considérons pour cela la restauration obtenue sur l'image défocalisée avec les deux modèles. Les deux images restaurées sont données en Fig. 4.9, de même qu'une image obtenue également avec régularisation MSTV, mais pour laquelle $\alpha = 10$, permettant d'avoir une carte des bords plus étalée sur la plage de valeur $[0,1]$, et donc une influence plus importante sur la reconstruction des discontinuités.

Globalement, pour ce qui est du déflouage en lui-même, en constate que la reconstruction des bords est satisfaisante dans les trois cas, dans la mesure où ceux-ci sont bien réhaussés, les images apparaissant bien nettes. En revanche, l'image restaurée avec régularisation MSTV ($\alpha = 10^5$) semble avoir perdu un peu plus de contraste que celle traitée avec régularisation TV. Ceci peut également être constaté sur la vue en coupe disponible en Fig. 4.9 (e). On y constate bien que, suivant la valeur assignée aux différents

12. Étant donné que la norme TV est alors approximée de manière beaucoup plus grossière par la troncature du nombre d'itérations.

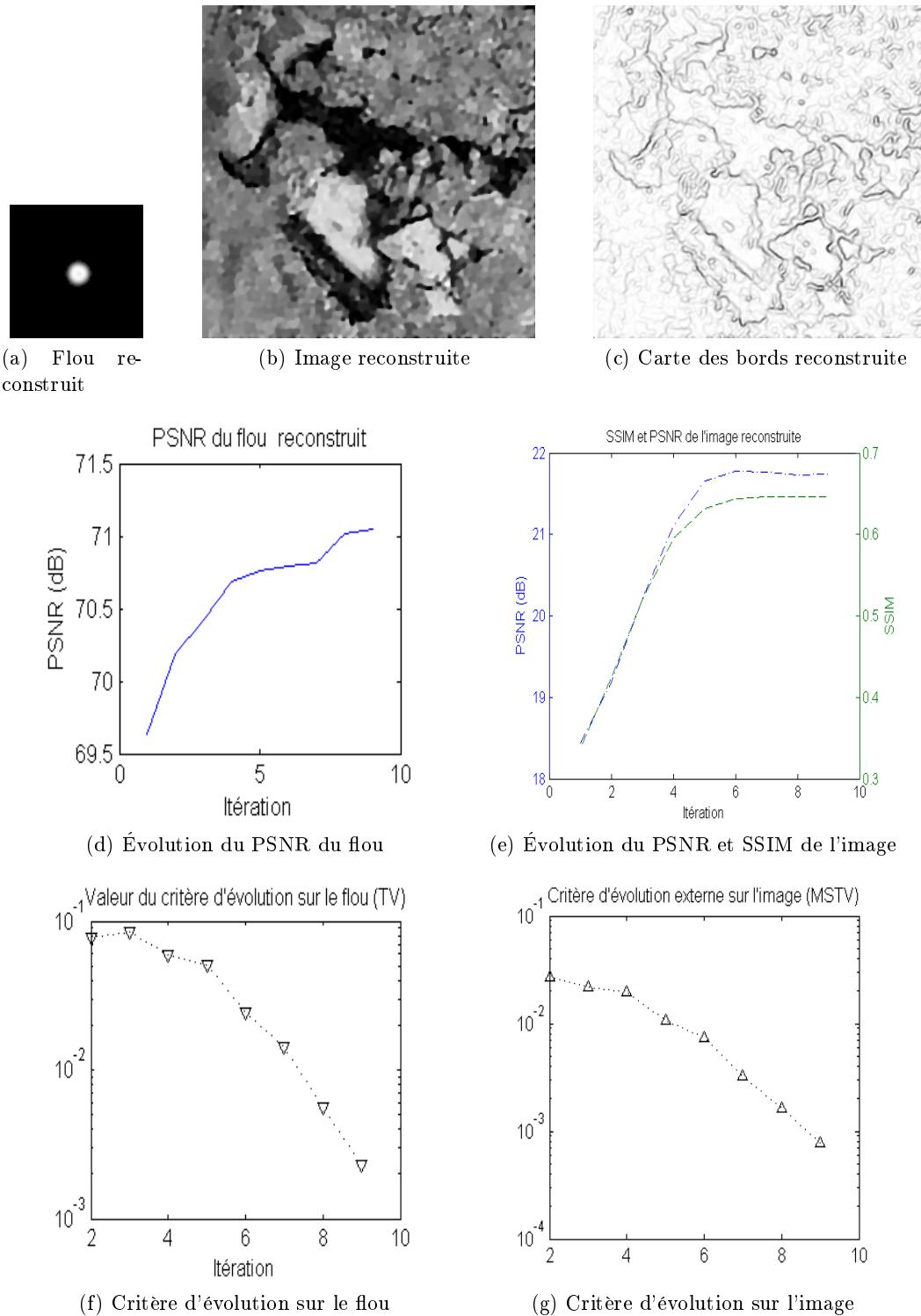


FIGURE 4.6 – Déconvolution aveugle de l'image *Nid de cailloux* défocalisée et bruitée ($\sigma = 3$), avec $\alpha = 10^5$, $\xi = 20$, $\eta = 10^{-3}$ et $\gamma = 9.10^7$ (itération de point fixe à critère d'arrêt).

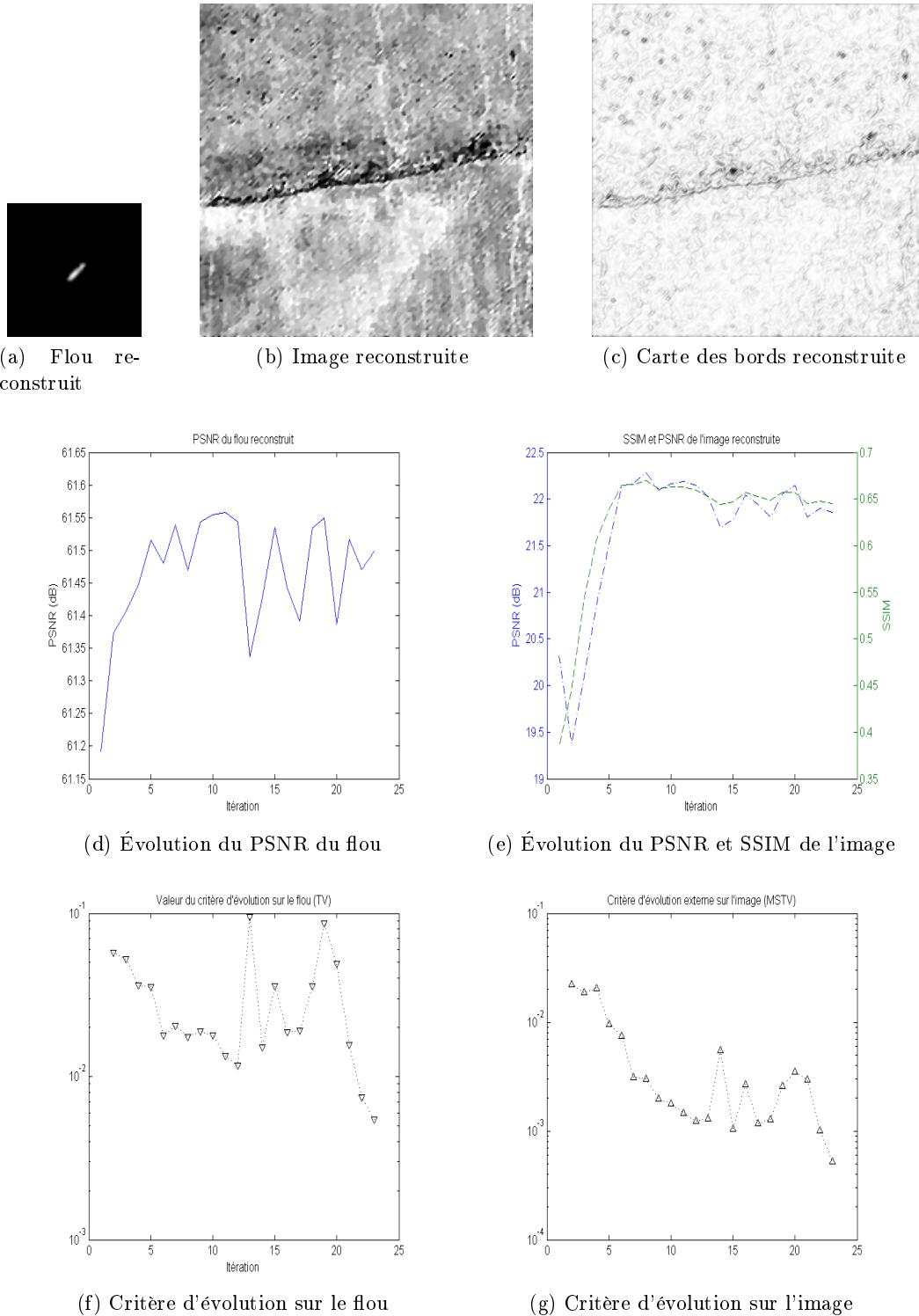


FIGURE 4.7 – Déconvolution aveugle de l'image *Reprise de béton* avec mouvement et bruitée ($\sigma = 3$), avec $\alpha = 10^5$, $\xi = 30$, $\eta = 10^{-2}$ et $\gamma = 9.10^7$ (itération de point fixe à critère d'arrêt).

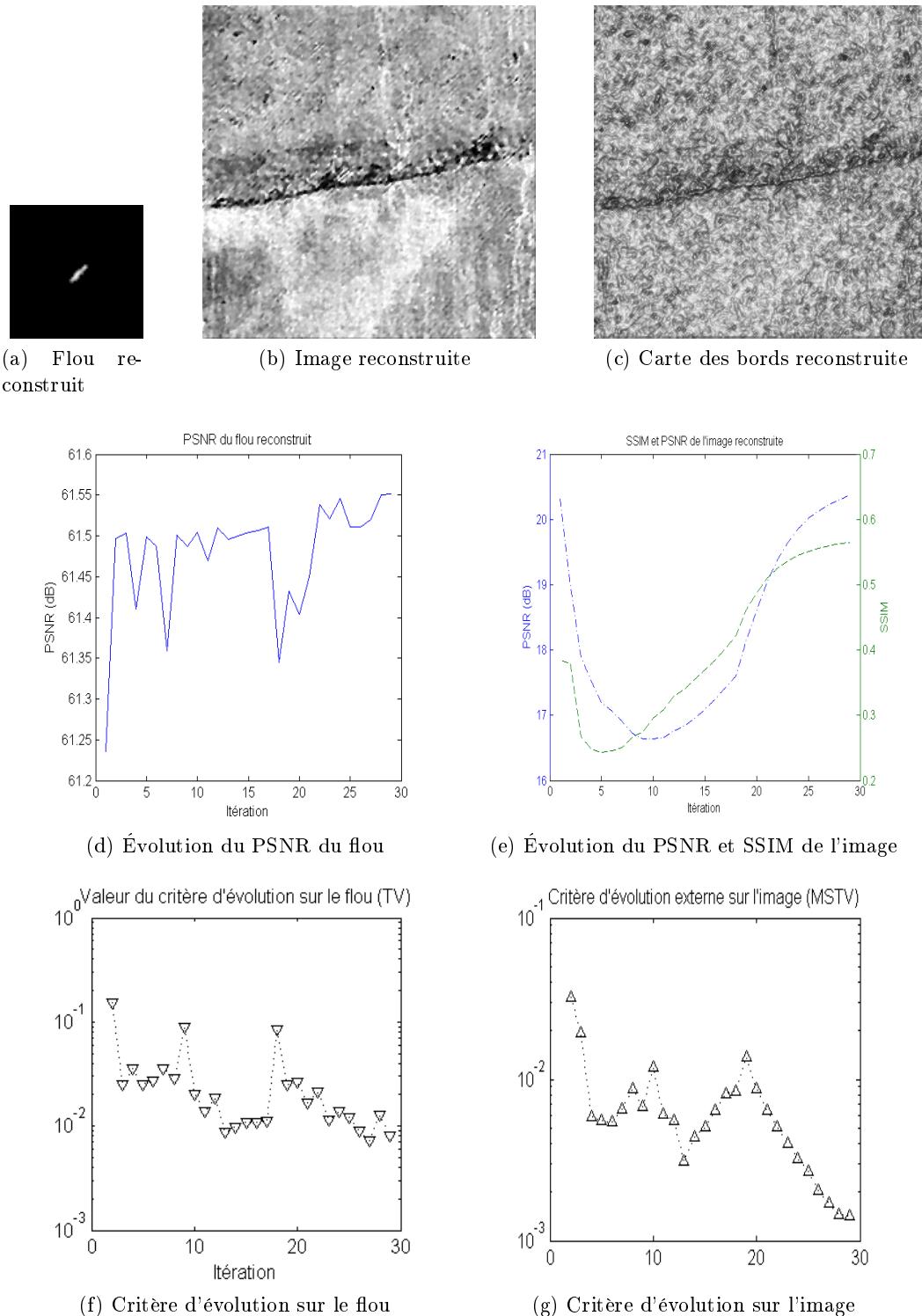
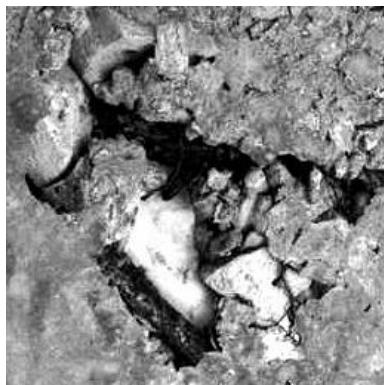
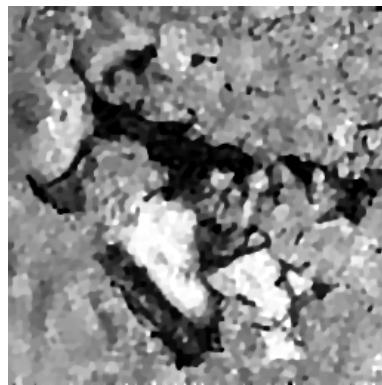


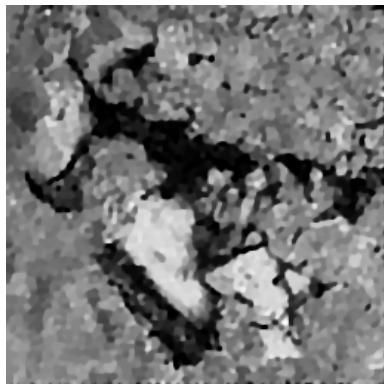
FIGURE 4.8 – Déconvolution aveugle de l'image *Reprise de béton* avec mouvement et bruitée ($\sigma = 3$), avec $\alpha = 10^{-1}$, $\xi = 10^{-2}$, $\eta = 10^{-1}$ et $\gamma = 9.10^7$ (une seule itération de point fixe).



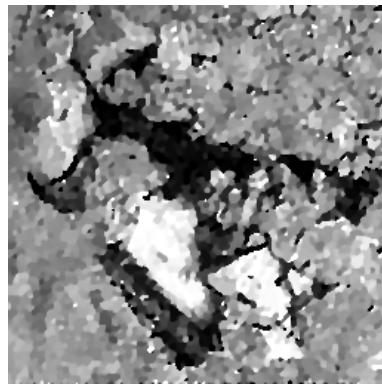
(a) Image originale



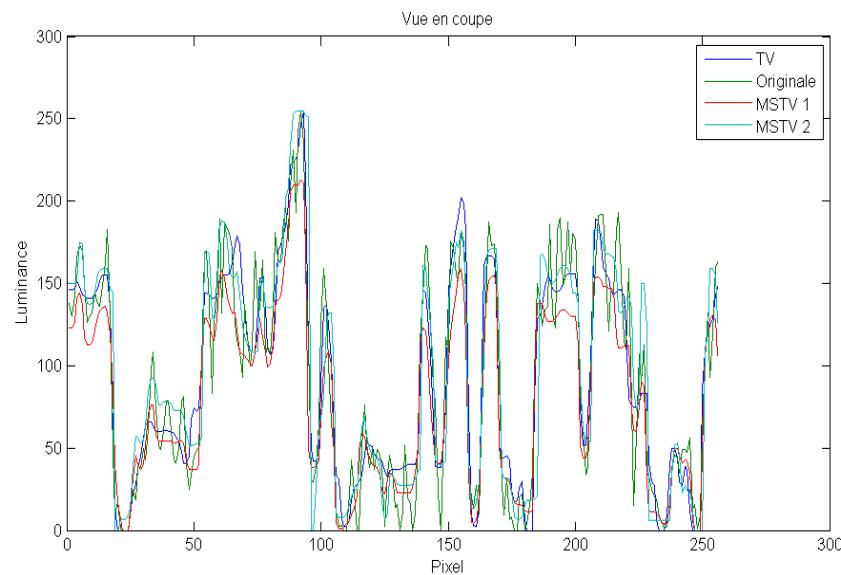
(b) Image défocalisée restaurée avec le modèle TV proposé



(c) Image restaurée avec le modèle MSTV pour $\alpha = 10^5$



(d) Image restaurée avec le modèle MSTV pour $\alpha = 10$



(e) Vue en coupe centrale horizontale des quatre images

FIGURE 4.9 – Comparatif des résultats de restauration aveugle de l'image *Nid de cailloux* défocalisée (itération de point fixe à critère d'arrêt).

Régularisation	TV	MSTV	Image floue
Défocalisation <i>(point fixe libre)</i>	0,6455	0,6467	0,3414
Mouvement <i>(point fixe unique)</i>	0,6011	0,5579	0,3886

TABLEAU 4.3 – Indicateur SSIM de qualité de restauration avec les modèles de déconvolution à régularisation TV et MSTV par rapport aux images originales floues.

paramètres du modèle, dans les hautes valeurs de gris la régularisation MSTV semble lisser davantage, ce qui est assez problématique. En revanche, les basses valeurs de gris semblent mieux préservées ici qu’avec régularisation TV. Ce problème du contraste vient certainement du fait que, dans ce cas précis, la carte des bords présente des valeurs v trop centrées autour de $v = 1$, avec des dépassemens possibles de cette valeur. Dans l’autre cas présenté ($\alpha = 10$), ce problème ne se pose plus, et la netteté est alors bien supérieure à celle obtenue dans le cas TV, avec des bords plus francs, voire trop sur certains détails fin à hautes valeurs de gris. Nous sommes donc encore une fois en présence d’un élément nous confirmant que la meilleure restauration au sens qualitatif ne correspond pas nécessairement à la meilleure restauration au sens visuel, a fortiori dans le cadre bien particulier de la déconvolution aveugle, que nous considérons dans cette étude. Cela confirme de nouveau que le choix d’un type de régularisation doit se faire suivant ce que l’on cherche à distinguer dans l’image, selon les caractéristiques essentielles à reconstruire : bords, textures à hautes fréquences, zones lisses, etc.

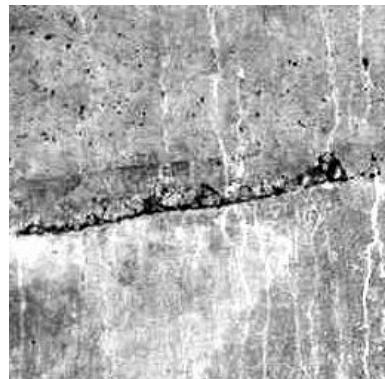
Le Tab. 4.3 résume les différentes valeurs des indicateurs SSIM obtenus pour la déconvolution avec les régularisations TV et MSTV. Ces indicateurs exhibent des résultats contrastés. En effet, de manière tout à fait étonnante, leurs valeurs ne montrent pas forcément de corrélation directe avec l’impression visuelle qui se dégage des images restaurées. Si, dans le cas de l’image affectée par une défocalisation, l’image restaurée avec régularisation MSTV montre un contraste affaibli par rapport à celle traitée avec régularisation TV, elle présente aussi un SSIM (qui on le rappelle est un indice censé mesurer la similarité en accord avec le système visuel humain) plus élevé.

De l’autre côté, pour le cas de l’image affectée par un mouvement, la restauration MSTV avec une seule itération de point fixe est visuellement clairement supérieure par rapport au cas TV homologue. Cependant, elle présente un SSIM inférieur. Nous présentons ces images en Fig. 4.10. De toute évidence, la restauration MSTV est plus agréable à l’œil. Le Tab. 4.3 reprend également les valeurs de SSIM mesurées dans les deux cas.

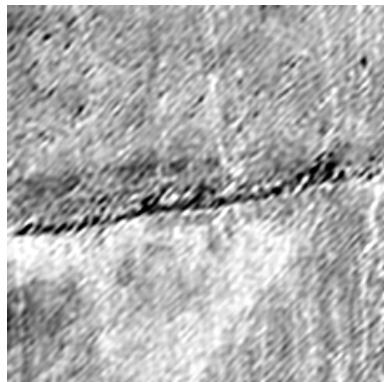
En Fig. 4.11, nous présentons de même les résultats de restauration obtenus, cette fois dans le cadre de l’itération de point fixe à critère d’arrêt, avec les deux modèles TV et MSTV. Visuellement, l’image déflouée avec le modèle MSTV apparaît également légèrement plus nette, bien que la différence avec le cas TV soit subtile.

7 Autres résultats

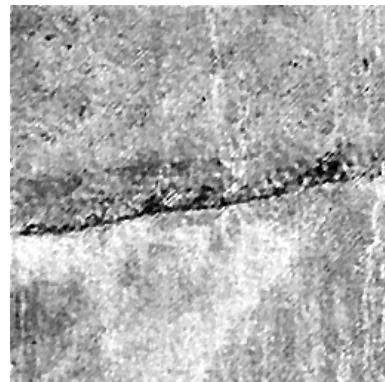
Nous présentons, pour terminer ce chapitre, quelques résultats supplémentaires de déconvolution aveugle avec le modèle MSTV appliqué à trois autres images. La première



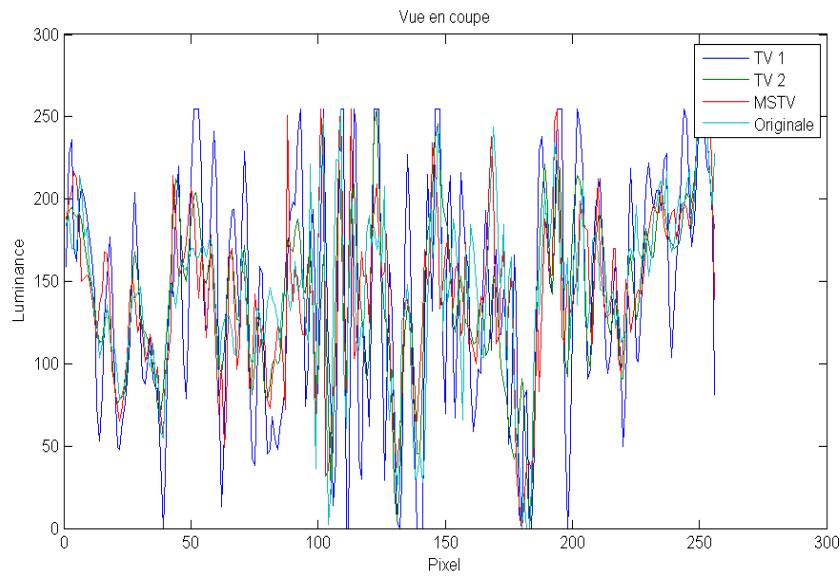
(a) Image originale



(b) Restauration TV



(c) Restauration MSTV



(d) Vue en coupe centrale horizontale (en sus, cas TV avec $\alpha_1 = 10^{-3}$: cf. légende « TV 2 »).

FIGURE 4.10 – Comparatif des résultats de restauration aveugle de l'image *Reprise de béton* avec mouvement (une seule itération de point fixe).

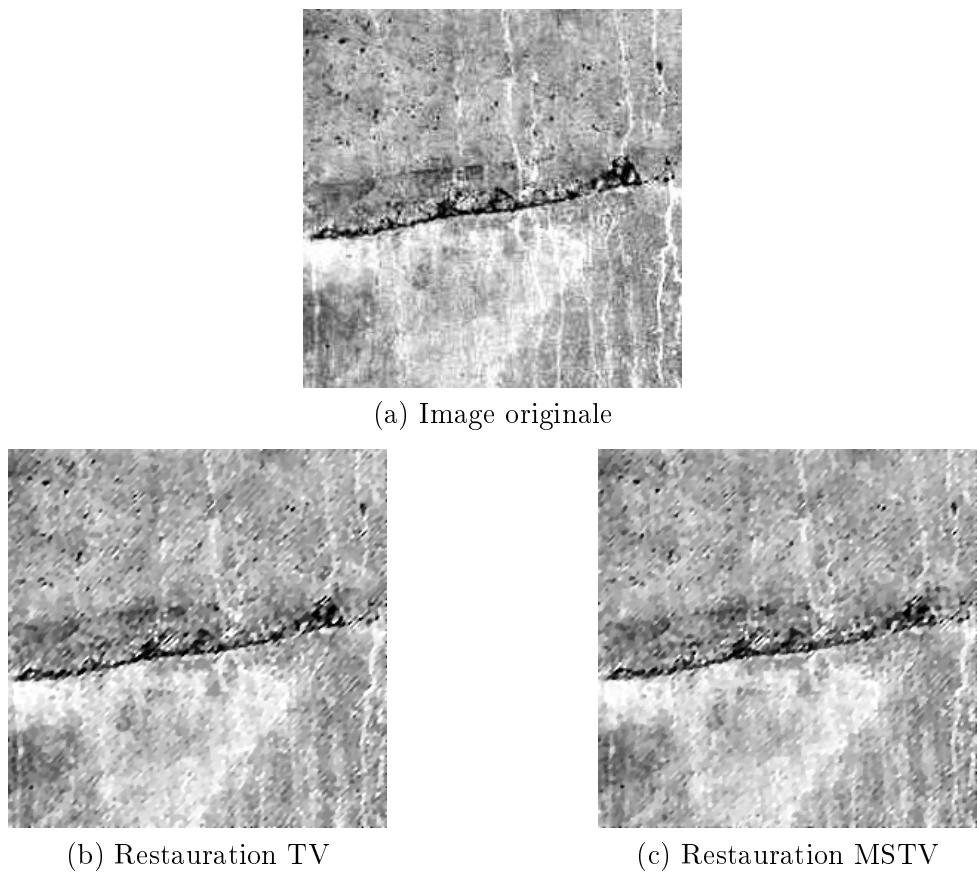


FIGURE 4.11 – Comparatif des résultats de restauration aveugle de l'image *Reprise de béton* avec mouvement (itération de point fixe à critère d'arrêt).

a été dégradée synthétiquement par le même noyau de défocalisation utilisé jusqu'à présent ($\rho = 5$), tandis que les deux autres l'ont été par le noyau de mouvement ($l = 11$, $\theta = 45^\circ$), également identique à celui utilisé jusqu'à présent. De même, chacune des images a été contaminée par du bruit blanc gaussien, toujours d'écart-type $\sigma = 3$. Les scènes originales extraites nettes ainsi que leur version dégradée sont présentées en Fig. 4.13. Ces scènes sont elles-même issues des images complètes originelles couleurs données en Fig. 4.12.

Les résultats des tentatives de restauration effectuées pour chacune d'entre elles sont eux présentés en Fig. 4.14, Fig. 4.15 et Fig. 4.16. La valeur des paramètres utilisés est donnée dans la légende de chaque figure. Ces valeurs ont été choisies empiriquement, suivant les indications de réglage déterminées jusqu'à présent, et de manière à obtenir une « bonne » carte d'approximation des bords. À noter que ces déconvolutions ont été effectuées avec l'approche utilisant l'itération de point fixe à critère d'arrêt.

Dans tous ces cas, on constate une amélioration claire de la netteté de l'image restaurée par rapport à la version floue. La première image restaurée le montre bien. Et ce avec un nombre d'itérations nécessaire demeurant faible. La segmentation est en revanche moyenne, avec une carte des bords un peu « terne », ce qui tendrait à faire dire que les contours n'ont pas joué un rôle très important dans la régularisation, et que donc l'algorithme s'est comporté dans ce premier cas de manière assez similaire à l'algorithme utilisant une régularisation TV.

Le deuxième cas présente une reconstruction rapide, bien que le noyau estimé semble être de support un peu plus petit que le noyau réel. Malgré cela, la restauration de même que la segmentation par la carte des bords sont assez bonnes, comme confirmé par les indicateurs qualitatifs utilisés.

Enfin, le troisième cas a été plus problématique étant donné qu'il n'y a pas eu convergence. L'algorithme s'est arrêté au bout des 50 itérations de minimisation alternée autorisées sans atteindre la précision requise sur la reconstruction de f . Cependant, la segmentation est tout de même bonne, bien claire, et l'image déconvoluée bien moins floue. Ceci s'expliquant par un noyau correctement reconstruit, et malgré le fait que cela n'apparaisse pas d'après les indicateurs de PSNR et SSIM.

En Fig. 4.17, nous montrons enfin côté à côté ces différentes images restaurées face à leur version dégradée. L'amélioration de la netteté est incontestablement visible pour chacun des cas.

D'autres résultats utilisant la régularisation MSTV dans un contexte aveugle sont disponibles dans [83], en particulier pour des images à fond noir.

8 Synthèse

Nous avons présenté dans ce chapitre une méthode de déconvolution aveugle basée le principe de double régularisation, et utilisant la fonctionnelle non-convexe dite de Mumford-Shah / TV (MSTV) pour le terme de régularisation sur l'image. Ceci afin de déterminer si, dans des conditions d'utilisations réelles, il était effectivement possible d'obtenir des images restaurées présentant une netteté accrue par rapport à une méthode similaire utilisant une régularisation par variation totale (TV).



(a) Première image originale

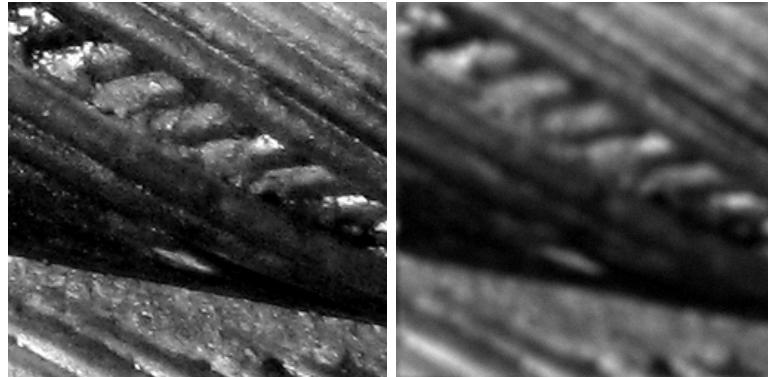


(b) Deuxième image originale



(c) Troisième image originale

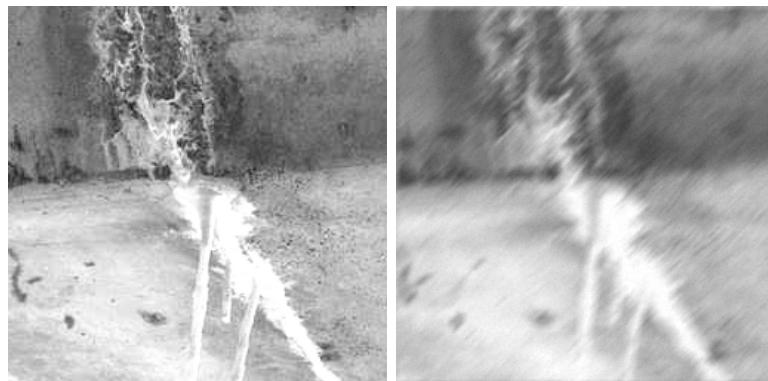
FIGURE 4.12 – Images originales d'où sont issues les zones d'intérêt utilisées pour les tests de déconvolution supplémentaires avec notre modèle MSTV.



(a) Image originale et image défocalisée



(b) Image originale et image affectée par un mouvement



(c) Image originale et image affectée par un mouvement

FIGURE 4.13 – Zones d'intérêt issues des images en Fig. 4.12, version originale (à g.) et version flouée (à d.).

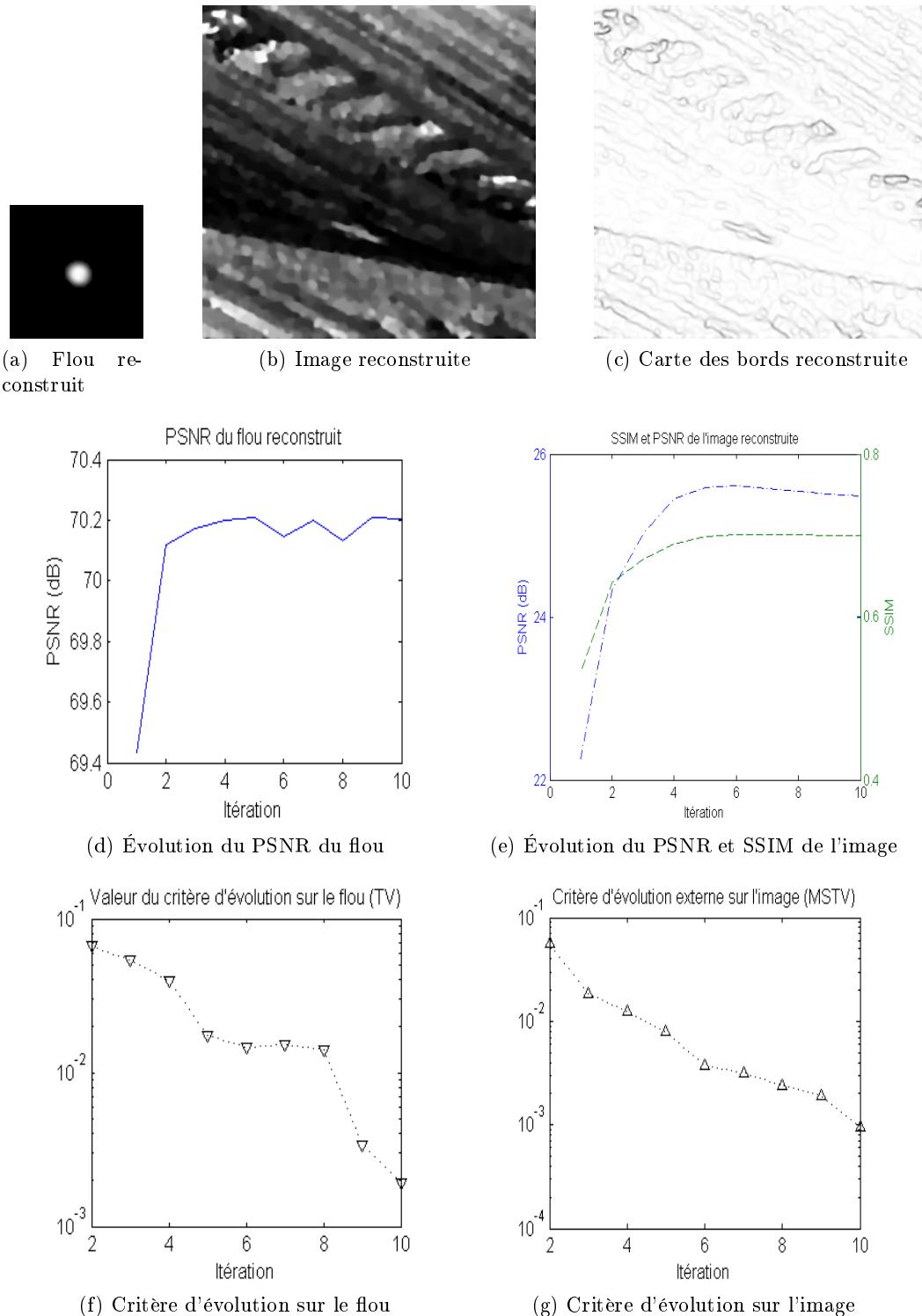


FIGURE 4.14 – Déconvolution aveugle de l'image Fig. 4.13 (a) avec $\alpha = 10^5$ et $\xi = 40$, $\eta = 10^{-3}$ et $\gamma = 10^8$.

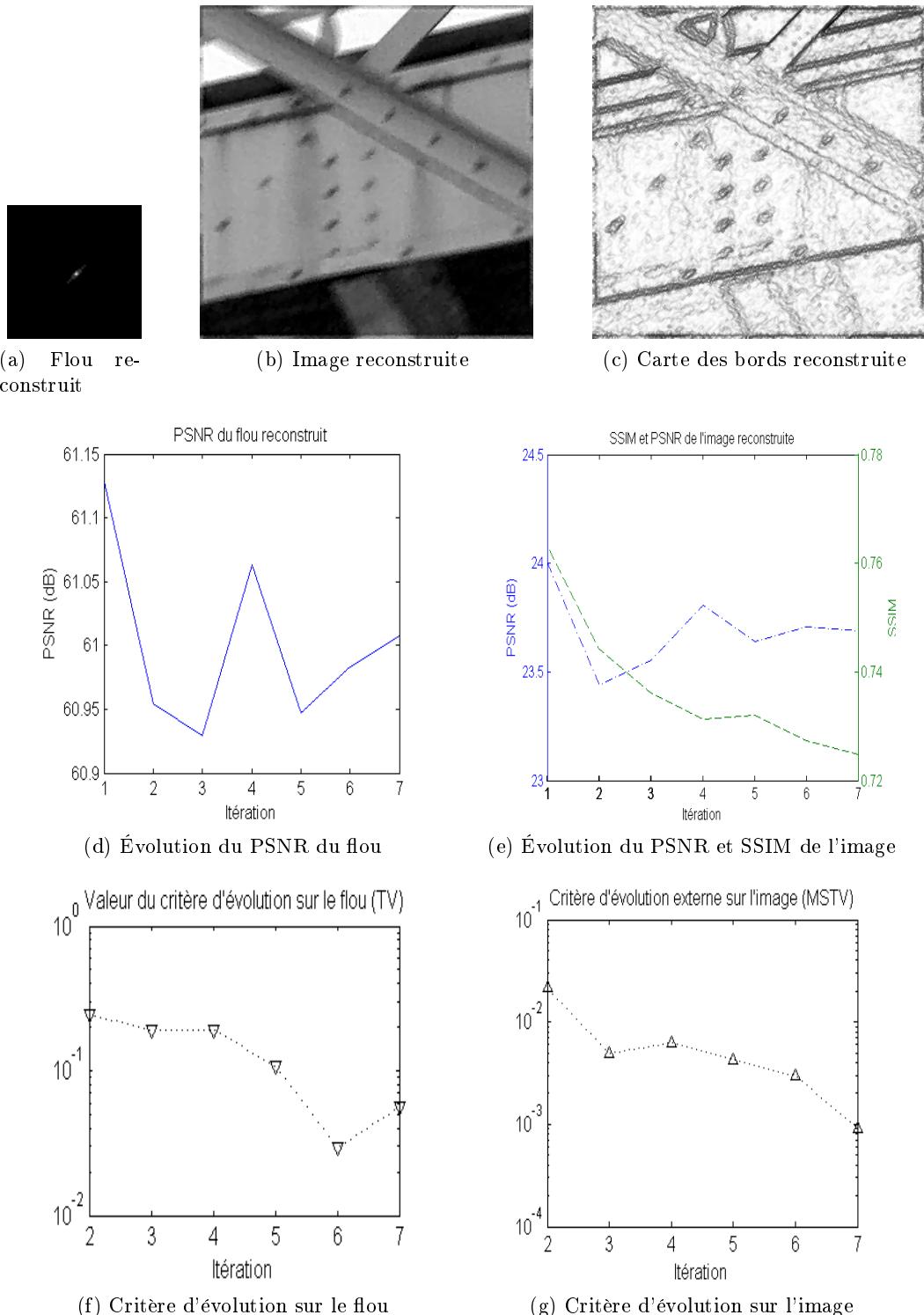


FIGURE 4.15 – Déconvolution aveugle de l'image Fig. 4.13 (b), avec $\alpha = 10^2$ et $\xi = 10^2$, $\eta = 10^{-2}$ et $\gamma = 10^5$.

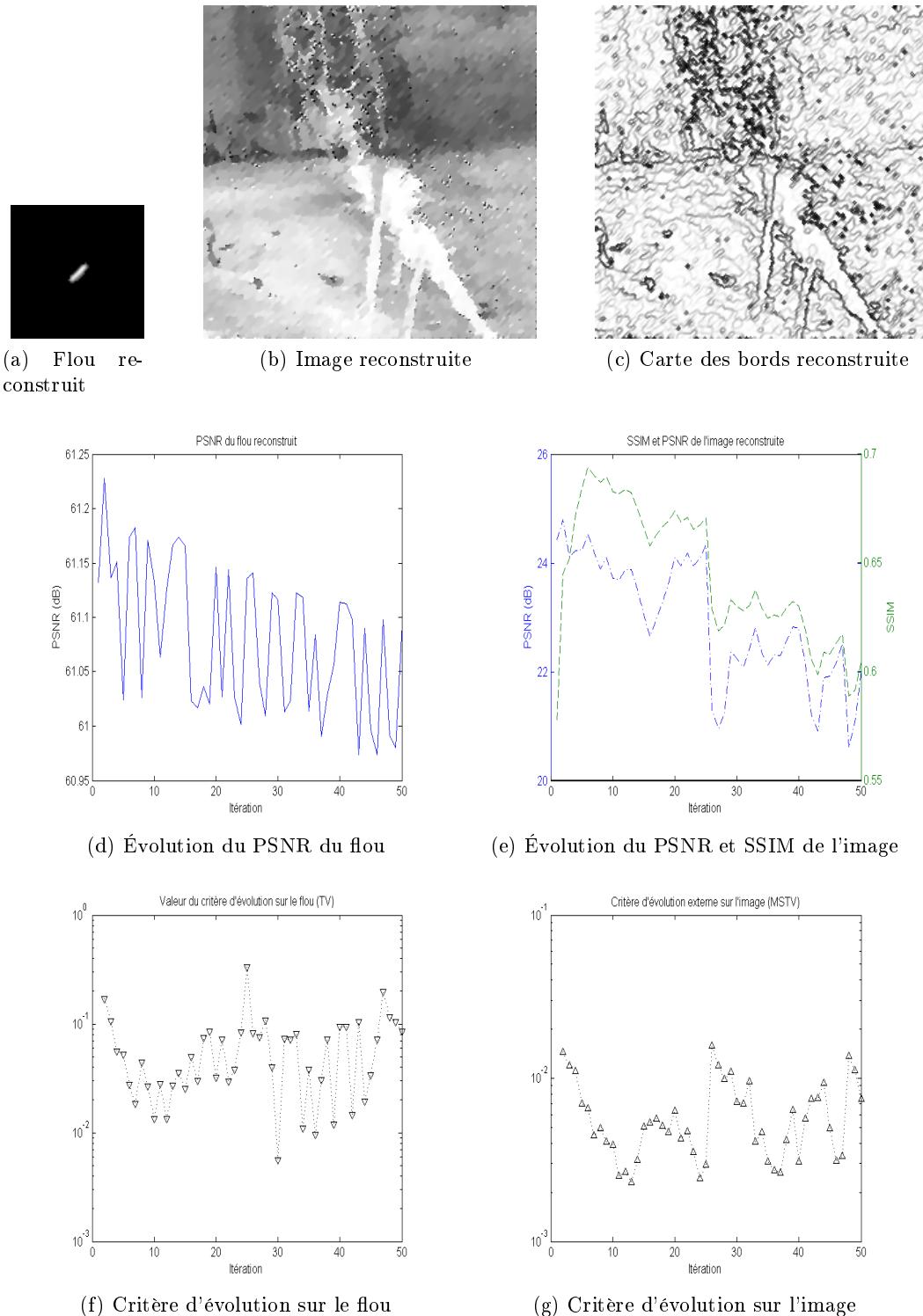
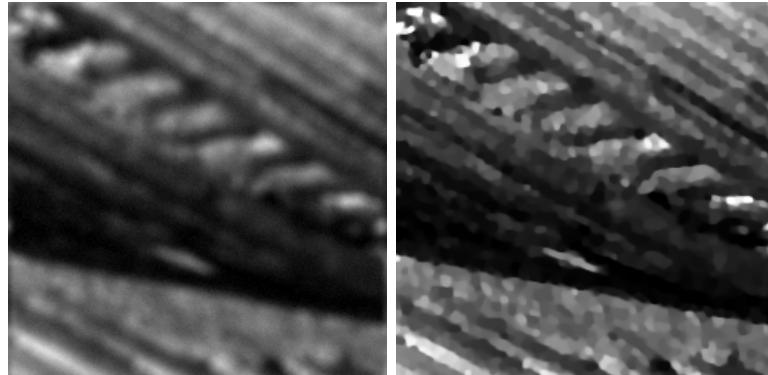
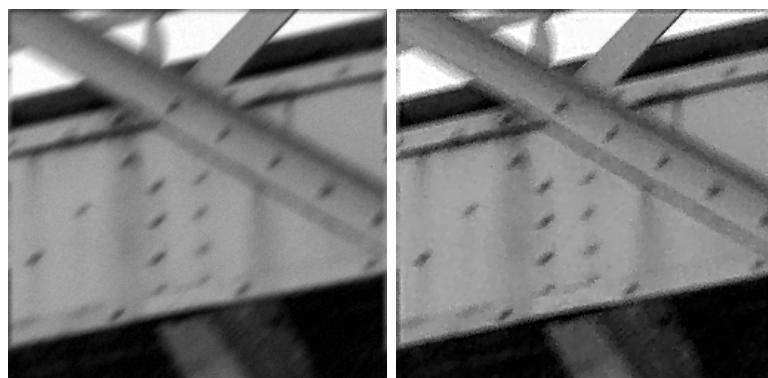


FIGURE 4.16 – Déconvolution aveugle de l'image Fig. 4.13 (c), avec $\alpha = 10^2$, $\xi = 10^2$, $\eta = 10^{-2}$, et $\gamma = 10^2$.



(a) Image défocalisée et version restaurée



(b) Image affectée par un mouvement et version restaurée



(c) Image affectée par un mouvement et version restaurée

FIGURE 4.17 – Zones d'intérêt issues des images en Fig. 4.12, version flouée (à g.) et version restaurée (à d.).

Nous avons tout d'abord vérifié, avec un modèle classique à flou connu, si la régularisation MSTV était dans les faits, et comme cela est annoncé dans la littérature, supérieure à la régularisation Mumford-Shah originale (MS), dans le contexte du traitement d'images affectées par du bruit blanc additif gaussien, type de bruit pouvant modéliser celui rencontré dans des images acquises par des appareils photographiques usuels. Nous avons globalement pu constater ce fait, bien qu'en pratique les différences apparaissent assez subtiles. En revanche, nous avons bien pu mettre en évidence, dans ce contexte non-aveugle, la supériorité de MSTV par rapport à TV pour ce qui est de la reconstruction des bords.

Cela nous a alors permis de considérer en aveugle la fonctionnelle MSTV, et de nous départir du cas MS classique. Un modèle de restauration a été proposé, de même qu'une méthode de minimisation, adaptée suivant la méthode de quasi-Newton couplée avec linéarisation de gradient par point fixe, comme cela avait été fait pour le modèle double TV du chapitre précédent.

Enfin, nous avons pu expérimentalement montrer que les résultats obtenus par ce modèle original étaient dans certains cas qualitativement supérieurs à ceux obtenus avec le modèle double TV, mais que, visuellement, l'apport était bien plus marqué, de par des images reconstruites présentant à chaque fois une netteté accrue. En outre, l'utilisation de la fonctionnelle MSTV permet de bénéficier en même temps d'une segmentation de l'image restaurée, segmentation donnée par sa carte des bords. Celle-ci fournit une information supplémentaire, qui peut s'avérer précieuse lors de l'analyse du contenu d'une image.

Néanmoins, il faut reconnaître que cette régularisation MSTV est délicate à mettre en œuvre, et requiert le réglage de plus de paramètres que la régularisation TV, ce qui est assez problématique. En outre, le schéma de déconvolution aveugle nécessite la résolution d'une équation supplémentaire pour le calcul des bords, et ce à chaque itération de la minimisation alternée. Cela influe donc sur le temps de calcul. Au final, il est alors sûrement plus judicieux de commencer à déflouer une image avec le schéma à régularisation TV, afin de fixer ses paramètres de régularisation, et ensuite éventuellement essayer d'obtenir mieux avec le modèle MSTV, en utilisant les paramètres déterminés avec le cas TV.

La meilleure information qui puisse tout de même être disponible dans une image est sans doute la présence de la couleur, qui offre un rendu visuel incomparablement plus riche, de même qu'un contenu bien plus adapté à la vision humaine. Et ce, bien mieux que ne pourrait le faire l'utilisation de n'importe quel terme de régularisation, aussi avancé et performant soit-il, sur des images à niveaux de gris. C'est pour cela que nous allons nous attacher dans le prochain chapitre à la conception et la mise en œuvre d'une technique de déconvolution aveugle adaptée aux images couleurs, basée sur le même principe de double régularisation que celui utilisé jusqu'à présent.

Chapitre 5

Déconvolution aveugle couleur à régularisation par variation totale

1 Introduction

Ce chapitre vise à proposer, ainsi qu'à étudier, une extension du modèle de déconvolution aveugle basé sur le principe de double régularisation à variation totale (TV) proposé dans le Chapitre 3, aux images en couleurs, c'est-à-dire comportant plusieurs composantes ou canaux, dont la signification dépend de l'espace couleur utilisé. De manière naturelle, de par le format d'image disponible en sortie d'un appareil photo usuel, nous choisissons dans ce qui suit de nous placer dans l'espace classique RGB, c'est-à-dire à trois canaux Rouge, Vert, et Bleu (angl. *Red, Green, Blue*).

Il existe bien peu d'approches spécifiques à la déconvolution aveugle d'images couleurs, comme nous l'avons vu dans le Chapitre 2, Section 3.8. Trois y ont été présentées, rentrant dans le groupe des méthodes d'identification jointe (soit à estimation du noyau et de l'image restaurée de manière parallèle), mais seules deux sont réellement des approches pouvant être qualifiées de multicanal, c'est-à-dire particulières aux images à plusieurs canaux. En effet, l'approche de Chow *et al.* [51] est une technique traitant de manière indépendante les trois canaux, et est donc à rapprocher des techniques monocanales. Ceci en raison du fait que la restauration de l'image n'utilise alors pas pour chaque canal l'information disponible dans tous les canaux.

On commence par rappeler la modélisation retenue des images floues en couleurs. Si l'on note par $i = 1, 2, 3$ les différents indices correspondant aux trois canaux R, G, et B, alors une image couleur floue g peut être décrite par l'équation

$$g_i = h * f_i + b_i , \quad (5.1)$$

où f est l'image originale, de composantes f_i , h le flou et b le bruit présent, inhérent au système optique, de composantes b_i . Il s'agit d'une simple extension de la convolution que l'on a également dans le cas monocanal (d'une image à niveaux de gris).

Nous rappelons en outre¹ que nous faisons l'hypothèse que le flou est identique dans chacun des canaux, mais que le bruit est d'écart-type variant suivant le canal considéré².

1. Cf. Chapitre 1, Section 1.5.2.

2. Cf. Chapitre 1, Section 1.5.3.

Pour mesurer la qualité de restauration des images déflouées, l'indicateur de PSNR peut être utilisé de manière équivalente au cas monocanal, sa formulation pour le cas couleur ne posant pas de problèmes particulier. En revanche, on a vu que son adéquation à la mesure de la qualité de la netteté est assez limitée, et que le SSIM se révèle bien plus adapté pour cela³. Cependant, cet indice a été créé pour être appliqué sur des images monocanal, et sa formulation ne permet pas une utilisation directe aux images en couleurs. Cependant, une généralisation à ces images couleur a été fournie dans [159]. Celle-ci consiste en une somme pondérée des SSIM des différents canaux de l'image, et est donnée par

$$\text{SSIM}_{\text{RGB}} = 0,2126 \cdot \text{SSIM}_R + 0,7152 \cdot \text{SSIM}_G + 0,0722 \cdot \text{SSIM}_B , \quad (5.2)$$

où SSIM_R , SSIM_G et SSIM_B sont les indices SSIM de chaque canal R, G et B. Les poids respectifs ayant été définis à partir de recommandations de l'Union Internationale des Télécommunications pour les standards HDTV (*télévision à haute définition*).

2 De l'importance du couplage des canaux

En restauration d'images multicanales, il est bien connu que mener une déconvolution (ou même un débruitage) en traitant indépendamment chaque canal est une approche simpliste qui ne peut mener - la plupart du temps - à la meilleure qualité finale que l'on peut escompter. En effet, les bords ne s'alignent alors pas forcément dans les différents canaux, des artefacts chromatiques peuvent apparaître. Des exemples de tels artefacts ont été mis en évidence entre autre dans [29] et [134].

Étant donné que nous avons proposé dans le cas monocanal un schéma de déconvolution aveugle efficace utilisant une régularisation TV pour l'image, il nous faut en définir une extension couleur. Blomgren et Chan [24] ont proposé comme généralisation du terme de régularisation TV monocanal, le terme de régularisation TV couleur

$$\mathcal{R}_1(f) = \sqrt{\left[\int |\nabla f_1| \right]^2 + \left[\int |\nabla f_2| \right]^2 + \left[\int |\nabla f_3| \right]^2} , \quad (5.3)$$

où les $f_i; i = 1,2,3$ sont les trois différents canaux de l'image couleur $f = (f_1, f_2, f_3)$. Une autre généralisation du terme TV à des images couleurs a été proposée par Brook *et al.* dans [29]. Leur terme induit un couplage entre les différents canaux, et s'écrit

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_1^{\text{TVC}}(f) &= \int_{\Omega} \|\nabla f\|_{\text{F}} \\ &= \int_{\Omega} \sqrt{|\nabla f_1|^2 + |\nabla f_2|^2 + |\nabla f_3|^2} , \end{aligned} \quad (5.4)$$

où $\|\cdot\|_{\text{F}}$ est la norme de Frobenius.

Ce couplage force alors les discontinuités des trois canaux couleur à s'aligner, et donc à prévenir l'apparition d'aberrations chromatiques. C'est cette régularisation que nous allons utiliser dans le modèle innovant de déconvolution aveugle que nous proposons dans ce qui suit.

Afin d'illustrer l'importance du couplage des canaux, considérons l'exemple de l'image présentée en Fig. 5.1 (a). Cette image a été dégradée par un flou de défocalisation de

3. Cf. Chapitre 1, Section 3, p. 16.

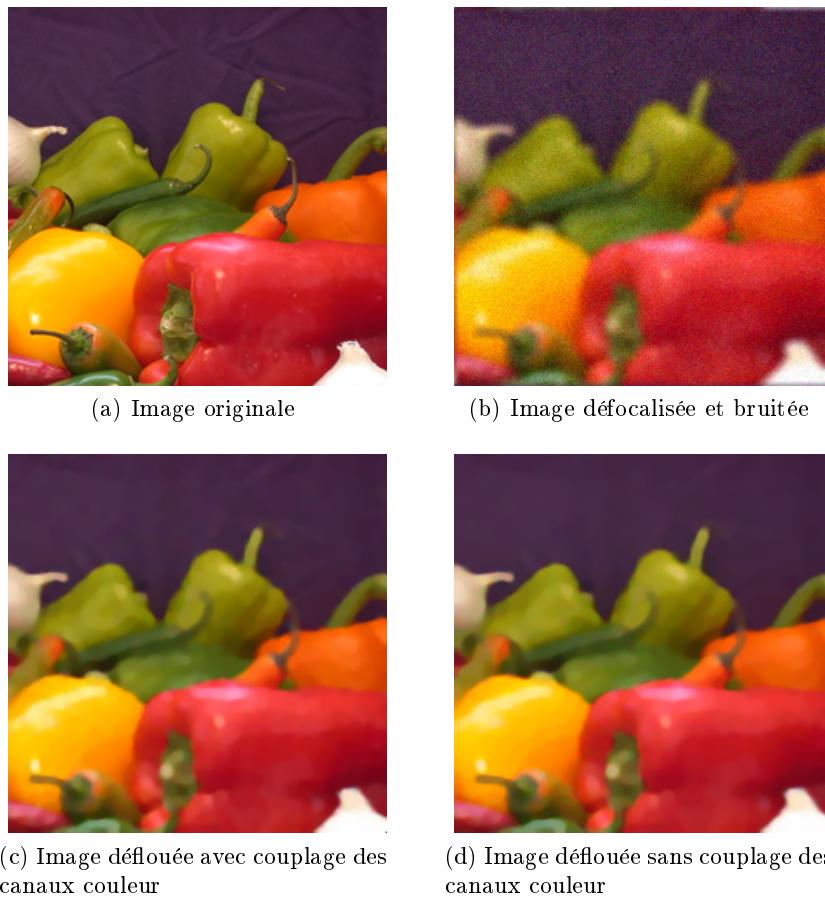


FIGURE 5.1 – Exemple de déconvolution à flou connu, sans, et avec terme de régularisation à couplage des canaux.

rayon $\rho = 4$, de même que par un bruit blanc additif gaussien relativement important d'écart-type $\sigma = 10$, afin de bien montrer l'intérêt du couplage. Elle a en effet été par la suite restaurée par une approche sans couplage, puis avec couplage, en considérant le noyau h connu. Ces résultats sont présentés en Fig. 5.1 (c) et (d). En réglant le paramètre de régularisation à $\alpha_1 = 10^3$, les PSNR et SSIM résultants ont été respectivement mesurés à 30,55 dB / 0,8748 pour le cas avec couplage, et à 30,15 dB / 0,8641 pour celui sans couplage. En terme de mesure, la différence est assez subtile, mais bien présente. Visuellement, elle peut se constater au fond mauve de l'image, dont le relief est moins présent dans le cas de reconstruction sans couplage. Ceci montre donc bien l'intérêt de cette procédure de couplage. De plus, bien que visuellement les deux images restaurées aient l'air très similaire, une inspection détaillée permet cependant de détecter des différences, et une netteté légèrement supérieure pour l'image déflouée avec couplage.

Il faut préciser que, dans une approche aveugle, nous aurions le risque - dans le cas d'un traitement indépendant des trois canaux - de reconstruire trois noyaux h différents, et donc d'accentuer bien davantage ce mauvais alignement des discontinuités, ce qui dégraderait fortement la solution recherchée. Ce genre d'approche est donc en général à proscrire en déconvolution aveugle.

3 Modèle de déconvolution aveugle double TV couleur

Nous allons ici présenter une manière de généraliser aux images couleur l'approche variationnelle basée sur la double régularisation TV que nous avons développée au chapitre 3. La fonctionnelle à minimiser, sans présumer du type de régularisation, que nous considérons pour cela, est donnée, pour chaque $i = 1, 2, 3$ par

$$\mathcal{J}(f_i, h) = \int_{\Omega} \sum_i \Phi(h * f_i - g_i) + \alpha_1 \mathcal{R}_1(f) + \alpha_2 \mathcal{R}_2(h). \quad (5.5)$$

Plus particulièrement, dans le cas où Φ est la norme L^2 , et \mathcal{R}_1 et \mathcal{R}_2 sont des opérateurs TV (sans couplage), cela donne alors le problème de minimisation

$$\min_{f_i, h} \mathcal{J}(f_i, h) = \min_{f_i, h} \frac{1}{2} \sum_i \|h * f_i - g_i\|_{L^2}^2 + \alpha_1 \int_{\Omega} |\nabla f_i| + \alpha_2 \int_{\Omega} |\nabla h|. \quad (5.6)$$

Si nous considérons l'opérateur TV couplé $\mathcal{R}_1^{\text{TVC}}$ défini ci-dessus, alors notre modèle de déconvolution aveugle devient

$$\min_{f_i, h} \mathcal{J}(f_i, h) = \min_{f_i, h} \frac{1}{2} \sum_i \|h * f_i - g_i\|_{L^2}^2 + \alpha_1 \int_{\Omega} \|\nabla f\|_{\text{F}} + \alpha_2 \int_{\Omega} |\nabla h|. \quad (5.7)$$

C'est celui que nous retenons pour la suite, afin de tenter à la fois de déflouer en aveugle des images dégradées synthétiquement, mais aussi des images réelles provenant d'un appareil photo embarqué sur un drone en vol.

4 Algorithme de minimisation

Comme pour le cas des images à niveaux de gris dans les deux chapitres précédents, la minimisation de la fonctionnelle \mathcal{J} en (5.7) passe par l'application des conditions d'optimalité d'Euler de premier ordre. Cela nous donne un ensemble de quatre équations : trois portant sur les différents canaux de f , et une sur le noyau de flou h . L'expression des trois premières équations est donnée par

$$\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial f_i} = (h * f_i - g_i) * h^* - \alpha_1 \operatorname{div} \left(\frac{\nabla f_i}{\|\nabla f\|_{\text{F}}} \right) = 0, \quad (5.8)$$

avec $i = 1, 2, 3$ et $\|\nabla f\|_{\text{F}}$ étant la norme de Frobenius du gradient ∇f , comme définie dans la section précédente, soit $\|\nabla f\|_{\text{F}} = \sqrt{\sum_i |\nabla f_i|^2}$. On s'aperçoit alors bien que c'est de par cette dernière expression qu'un couplage va être induit dans la résolution de chacune des équations portant sur les f_i .

La quatrième équation, portant sur h , est donnée elle par

$$\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial h} = \sum_i (h * f_i - g_i) * f_i^* - \alpha_2 \operatorname{div} \left(\frac{\nabla h}{|\nabla h|} \right) = 0. \quad (5.9)$$

L'algorithme général de minimisation alternée alors utilisé est :

Initialiser f^0 avec g et h^0 avec une impulsion de Dirac.

Pour $n = 1$ à $n = n_{\max}$:

1. Résoudre (5.8) pour chaque f_i (avec les $f_{j;j \neq i}$ et h fixes)
2. Résoudre (5.9) pour h (avec les f_i fixes)
3. Contraindre h

Fin

Les équations (5.8) et (5.9) sont, comme pour le cas monocanal, des équations aux dérivées partielles non-linéaires, en respectivement f_i et h . Nous les résolvons de nouveau via le même schéma itératif de linéarisation de gradient par point fixe [195–197] que nous avons utilisé jusqu'à présent. Pour ce qui est des contraintes imposées à h , nous imposons comme précédemment une contrainte de normalisation

$$\int_{\Omega} h = 1 , \quad (5.10)$$

ainsi que notre contrainte de seuillage, visant à ramener l'énergie du noyau en son centre :

$$h^n(x,y) = \begin{cases} h^n(x,y) & \text{si } h^n(x,y) > \zeta \max_{s,t} h^n(s,t) \\ 0 & \text{sinon .} \end{cases} \quad (5.11)$$

Suivant le degré de connaissance que l'on a du flou présent, il est également possible d'envisager l'ajout d'une contrainte de symétrie. Cependant, ce genre d'hypothèse n'étant pas pertinente dans les cas réels (étant donné la possibilité pour l'image traitée d'être affecté par un noyau quelconque, par exemple un mouvement arbitraire), nous avons choisi de ne *pas* utiliser de telle contrainte, même dans les cas de dégradation synthétique avec des flous de défocalisation, ou de mouvement rectiligne, que nous envisagerons.

Considérons que nous nous trouvons à une certaine étape de l'itération de minimisation alternée entre les f_i et h , étape que nous n'indiquons pas pour des raisons de clarté des notations dans ce qui suit. Alors, la méthode de point fixe consiste à résoudre, respectivement en f_i et h , en itérant sur l , les équations suivantes provenant de (5.8) et (5.9),

$$(h * f_i^{l+1} - g_i) * h^* - \alpha_1 \operatorname{div} \left(\frac{\nabla f_i^{l+1}}{\sqrt{\sum_i |\nabla f_i^l|^2}} \right) = 0 \quad (5.12)$$

et

$$\sum_i [(h^{l+1} * f_i - g_i) * f_i^*] - \alpha_2 \operatorname{div} \left(\frac{\nabla h^{l+1}}{|\nabla h^l|} \right) = 0 . \quad (5.13)$$

En posant \mathbf{f}_i et \mathbf{h} les vecteurs obtenus par ordonnancement lexicographique des coefficients des matrices f_i et h , ainsi que H et F_i les représentations matricielles par blocs de h et f_i , de sorte que la convolution $h * f_i$ puisse s'écrire comme un produit matrice vecteur $H\mathbf{f}_i$ ou $F_i\mathbf{h}$, notons par L_o l'opérateur différentiel « original » tel que

$$L_o \mathbf{f}_i = -\operatorname{div} \left(\frac{\nabla \mathbf{f}_i}{\|\nabla \mathbf{f}\|_F} \right) . \quad (5.14)$$

Comme nous l'avons vu dans le cadre monocanal, cet opérateur n'est pas différentiable en zéro. Afin de contourner ce problème, il est préférable d'utiliser un opérateur modifié L , permettant d'approximer la semi-norme TV couplée :

$$L(\mathbf{f}) \mathbf{w} = -\operatorname{div} \left(\frac{1}{\sqrt{\sum_i |\nabla \mathbf{f}_i|^2 + \beta^2}} \nabla \mathbf{w} \right) . \quad (5.15)$$

En pratique, nous utilisons toujours $\beta = 1$, pour les mêmes raisons que dans le cas monocanal. Les équations (5.8) et (5.9) peuvent alors être écrites sous la forme

$$H^*(H\mathbf{f}_i - \mathbf{g}_i) + \alpha_1 L(\mathbf{f}_i) \mathbf{f}_i = P(\mathbf{f}_i) = 0 \quad (5.16)$$

et

$$\sum_i F_i^*(F_i \mathbf{h} - \mathbf{g}_i) + \alpha_2 L(\mathbf{h}) \mathbf{h} = Q(\mathbf{h}) = 0 . \quad (5.17)$$

En posant comme variable duale pour les composantes de l'image

$$\vec{v}_1^i = \frac{\nabla \mathbf{f}_i}{\sqrt{\sum_i |\nabla \mathbf{f}_i|^2 + \beta^2}} \quad (5.18)$$

et pour le flou

$$\vec{v}_2 = \frac{\nabla \mathbf{h}}{\sqrt{|\nabla \mathbf{h}|^2 + \beta^2}} , \quad (5.19)$$

on obtient aussi la formulation plus concise

$$H^* H \mathbf{f}_i - \alpha_1 \operatorname{div} \vec{v}_1^i = H^* \mathbf{g}_i \quad (5.20)$$

et

$$\sum_i F_i^* F_i \mathbf{h} - \alpha_2 \operatorname{div} \vec{v}_2 = \sum_i F^* \mathbf{g}_i . \quad (5.21)$$

On peut alors linéariser en posant $\mathbf{f}_i = \mathbf{f}_i^l$ dans le dénominateur de \vec{v}_1^i et $\mathbf{h} = \mathbf{h}^l$ dans celui de \vec{v}_2 . Ceci mène alors à l'itération de point fixe pour les deux équations (5.8) et (5.9), et à l'écriture matricielle de (5.12) et (5.13) :

$$\left[H^* H + \alpha_1 L(\mathbf{f}_i^l) \right] \mathbf{f}_i^{l+1} = H^* \mathbf{g}_i \quad (5.22)$$

et

$$\left[\sum_i F_i^* F_i + \alpha_2 L(\mathbf{h}^l) \right] \mathbf{h}^{l+1} = \sum_i F_i^* \mathbf{g}_i . \quad (5.23)$$

Ces deux dernières expressions peuvent alors être mises sous forme d'algorithme de type quasi-Newton :

$$\mathbf{f}_i^{l+1} = \mathbf{f}_i^l - A(\mathbf{f}_i^l)^{-1} P(\mathbf{f}_i^l) \quad (5.24)$$

et

$$\mathbf{h}^{l+1} = \mathbf{h}^l - B(\mathbf{h}^l)^{-1} Q(\mathbf{h}^l) , \quad (5.25)$$

où P et Q sont données par les expressions (5.16) et (5.17), de même que

$$A(\mathbf{f}_i) = H^* H + \alpha_1 L(\mathbf{f}_i) \quad (5.26)$$

et

$$B(\mathbf{h}) = \sum_i F_i^* F_i + \alpha_2 L(\mathbf{h}) \quad (5.27)$$

sont les approximations au premier ordre des dérivées secondes $\partial_{\mathbf{f}}^2$ et $\partial_{\mathbf{h}}^2$ de la fonctionnelle quadratique pénalisée (5.7),

$$\partial_{\mathbf{f}}^2 = H^* H + \alpha_1 L(\mathbf{f}_i) + \alpha_1 L'(\mathbf{f}_i) \mathbf{f}_i \quad (5.28)$$

et

$$\partial_{\mathbf{h}}^2 = \sum_i F_i^* F_i + \alpha_2 L(\mathbf{h}) + \alpha_2 L'(\mathbf{h}) \mathbf{h} . \quad (5.29)$$

Comme pour le cas monocanal, au lieu de fixer de manière hasardeuse le nombre d’itérations de point fixe sur f , nous proposons en général, soit de n’itérer qu’une seule et unique fois, soit de contrôler le nombre d’itérations suivant l’évolution du critère

$$\frac{\|f_i^l - f_i^{l-1}\|}{\|f_i^{l-1}\|} . \quad (5.30)$$

L’itération de point fixe s’arrête quand ce critère exhibe une valeur plus faible que la tolérance ϵ_1 fixée. Pour l’estimation du noyau, on effectue systématiquement, comme pour le cas monocanal, une seule itération pour sa reconstruction, avant d’appliquer le seuillage (5.11) ; ceci permettant de limiter le temps de calcul.

De même, la minimisation alternée est arrêtée à l’étape n lorsque le critère d’évolution sur f est inférieur à une certaine valeur ϵ_2 fixée, soit :

$$\frac{\| |f_n| - |f_{n-1}| \|_{\text{F}}}{\| |f_{n-1}| \|_{\text{F}}} \leq \epsilon_2 , \quad (5.31)$$

où $|.|$ est la norme l_2 .

5 Expérimentations

Nous allons présenter dans ce qui suit les résultats de tests effectués avec notre modèle de déconvolution couleur. Nous nous intéressons tout d’abord à des images dégradées synthétiquement, avec un flou de défocalisation dans un premier cas, puis un flou de mouvement rectiligne dans un second cas. Ces conditions contrôlées permettent de valider l’approche proposée.

Dans un deuxième temps, nous nous intéresserons à des images réelles, obtenues grâce à un appareil photo embarqué sur un drone en vol⁴. Nous examinerons les possibilités de restauration sur différentes scènes acquises.

Enfin, nous proposerons des expérimentations comparatives opposant notre algorithme à celui de Kaftory *et al.* [98], sur des images synthétiques.

5.1 Cas synthétique : défocalisation

Nous prenons tout d’abord la même image *Nid de cailloux* que dans le Chapitre 3, dégradée de la même façon, suivant le modèle $g_i = h * f_i + b_i$. Celle-ci est présentée en Fig. 5.2. Nous la traitons dans deux cas : sans, puis avec ajout de bruit blanc gaussien.

Sans ajout de bruit. Étant donné la faible présence de bruit (en effet, seul le bruit de quantification, en sus d’un résidu de bruit électronique lissé par l’opération de convolution, affecte alors l’image dégradée), et les résultats satisfaisants obtenus dans le Chapitre 3 sur les images monochromes de mêmes caractéristiques, il semble tout à fait acceptable de limiter le nombre d’itérations de point fixe sur l’image à une seule. Pour les mêmes valeurs des paramètres de régularisation que dans le cas à niveau de gris ($\alpha_1 = 10^{-4}$ et

4. Images mises à disposition par la Laboratoire Central des Ponts et Chaussées, France.



FIGURE 5.2 – Image *Nid de cailloux* couleur originale, et image défocalisée.

Image	floue (PSNR / SSIM)	restaurée (PSNR / SSIM)	Noyau (PSNR)
$\sigma = 0$	18,56 dB / 0,3494	23,33 dB / 0,7986	81,68 dB
$\sigma = 3$	18,52 dB / 0,3420	21,91 dB / 0,6433	81,19 dB

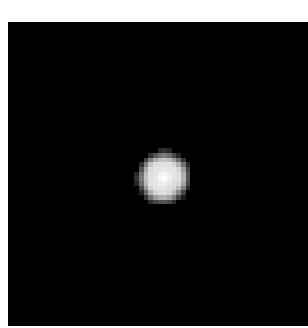
TABLEAU 5.1 – Indicateurs de qualité de restauration de l'image *Nid de cailloux* défocalisée, et restaurée suivant le niveau de bruit ajouté.

$\alpha_2 = 10^{-5}$), nous obtenons alors le résultat de déconvolution présenté en Fig. 5.3.

Ceux-ci montrent une bonne qualité de reconstruction, à la fois pour l'image et pour le noyau, puisque, pour ce dernier, nous retrouvons bien le disque escompté, et que l'image restaurée est bien nette. Dans le Tab. 5.1, nous donnons en outre les indicateurs de PSNR et SSIM mesurant la qualité de la restauration pour l'image, et de PSNR pour le flou. Ceux-ci confirment, par rapport aux indices mesurés sur l'image floue, une reconstruction efficiente.

Avec ajout de bruit. Considérons maintenant la même image, mais à laquelle a également été ajouté un bruit blanc gaussien d'écart-type $\sigma = 3$. Nous utilisons alors dans le schéma de déconvolution un nombre d'itérations de point fixe à critère d'arrêt, limité à dix, comme nous l'avions fait pour les images monochromes homologues. Le résultat de déconvolution avec $\alpha_1 = 40$ et $\alpha_2 = 10^{-5}$ est donné en Fig. 5.4. Notons que ces paramètres ont été fixés empiriquement, en nous basant pour α_1 sur la valeur optimale trouvée dans le cadre monocanal.

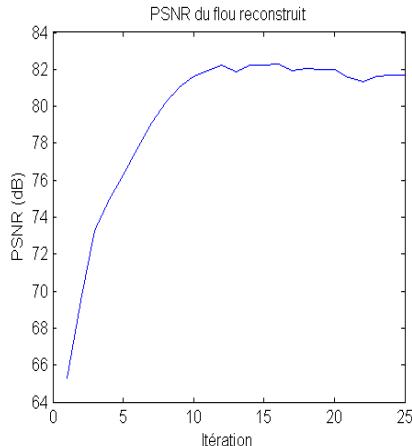
Ici, l'influence du bruit et de la régularisation est bien visible. L'image restaurée est certes plus nette que l'image floue. La déconvolution a donc fonctionné, ce que confirme le flou bien reconstruit, présentant un PSNR de plus de 80 dB. Cependant, une part notable de la texture fine de l'image originale a été perdue par la régularisation, bien que le paramètre α_1 ait été réglé à la valeur maximisant le PSNR et le SSIM (Tab. 5.1). La couleur semble par ailleurs donner une légère impression d'accentuation du phénomène de lissage car, si nous comparons l'image restaurée à celle en Fig. 3.7 du Chapitre 3 (p. 84), nous nous apercevons que l'image alors déconvolue ne semblait pas présenter de manière aussi marquée le phénomène de paliers.



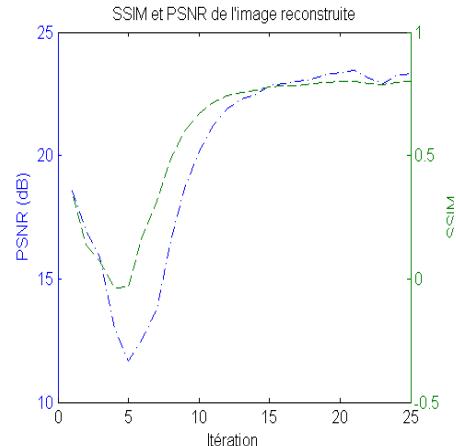
(a) Flou reconstruit



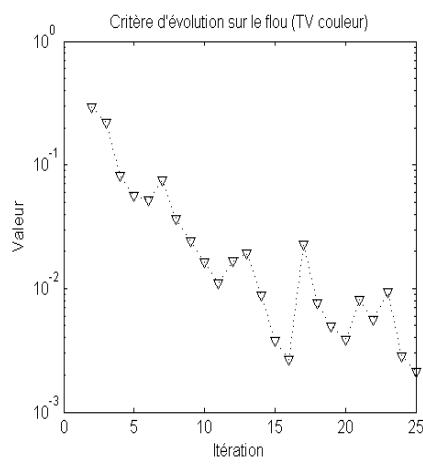
(b) Image reconstruite



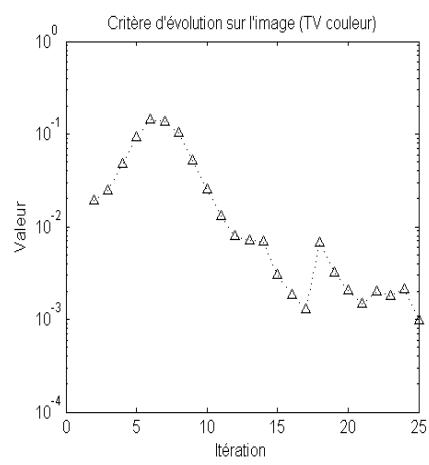
(c) Évolution du PSNR du flou



(d) Évolution du PSNR et SSIM de l'image



(e) Critère d'évolution sur le flou



(f) Critère d'évolution sur l'image

FIGURE 5.3 – Déconvolution aveugle de l'image *Nid de cailloux* défocalisée sans ajout de bruit, avec $\alpha_1 = 10^{-4}$ et $\alpha_2 = 10^{-5}$ (une seule itération de point fixe).

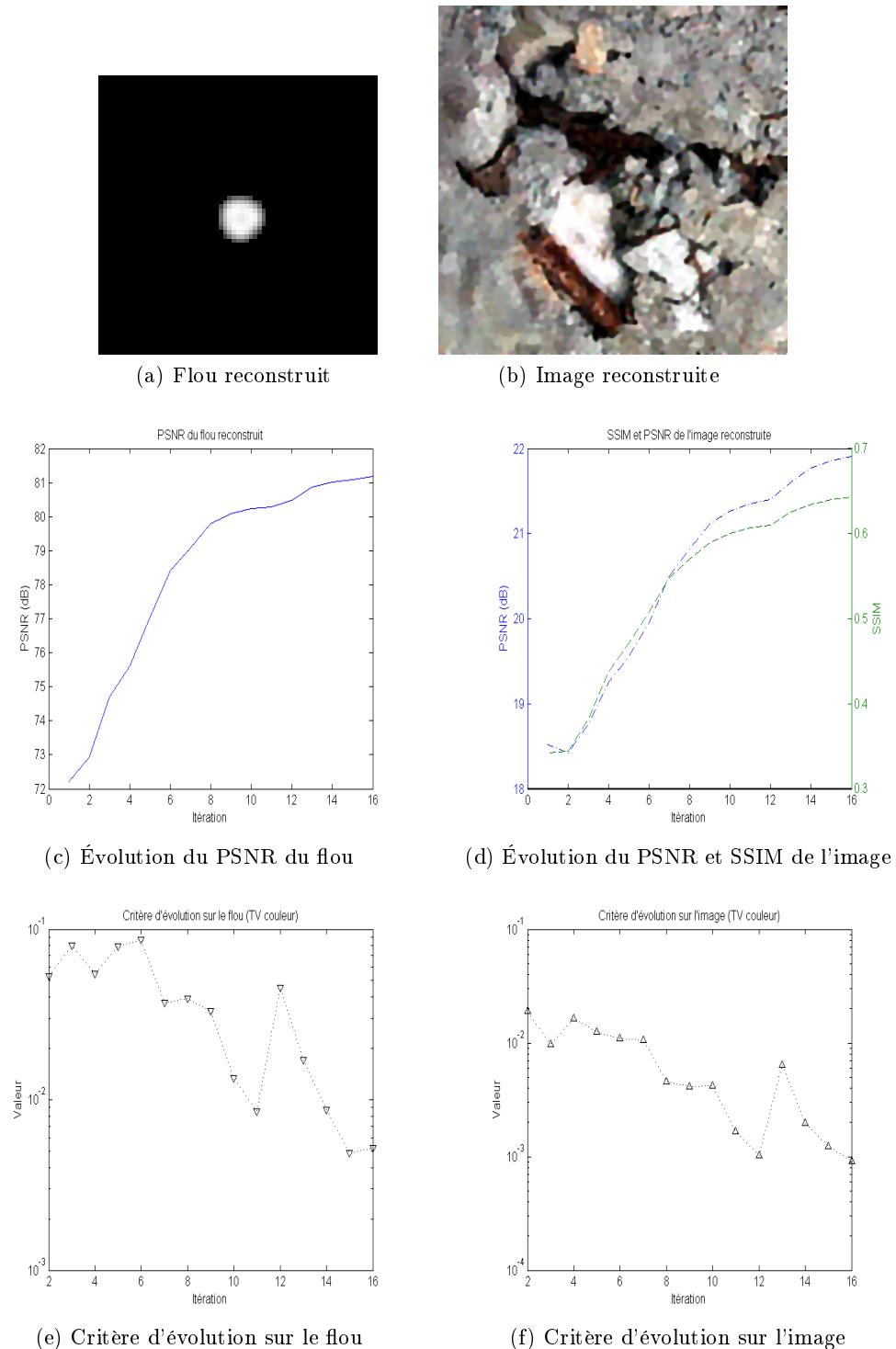


FIGURE 5.4 – Déconvolution aveugle de l'image *Nid de cailloux* défocalisée, avec ajout de bruit ($\sigma = 3$), avec $\alpha_1 = 40$ et $\alpha_2 = 10^{-5}$ (itération de point fixe à critère d'arrêt).



FIGURE 5.5 – Image *Reprise de béton* couleur originale, et image affectée par le flou de mouvement.

5.2 Cas synthétique : mouvement

Nous nous intéressons maintenant au cas de l'image *Reprise de béton* dégradée par un flou de mouvement rectiligne, et qui est présentée en Fig. 5.5. Le noyau utilisé présente le support habituel de longueur $l = 11$ pixels, et une orientation d'angle $\theta = 45^\circ$. On considère de nouveau deux cas : sans, et avec ajout de bruit blanc gaussien d'écart-type $\sigma = 3$.

Sans ajout de bruit. De même que précédemment, et vu les bons résultats obtenus de la sorte, nous n'effectuons qu'une seule itération de point fixe pour l'image. Les paramètres de régularisation sont fixés à la même valeur que pour le cas monochrome, soit $\alpha_1 = 10^{-3}$ et $\alpha_2 = 10^{-5}$. Cela nous donne alors les résultats présentés en Fig. 5.6.

Ici aussi, ceux-ci sont très satisfaisants, avec un flou ayant bien retrouvé la direction des 45° utilisée. Sa reconstruction présente un PSNR plus faible que pour le cas précédent de défocalisation (ce noyau de mouvement est aussi davantage mal conditionné), mais cependant, la restauration de l'image est très efficace, puisque celle-ci présente un PSNR de plus de 25 dB. Une possibilité pour améliorer encore la reconstruction du noyau pourrait alors être d'essayer de l' « amincir » en réglant le paramètre de seuillage ζ à une valeur plus élevée (on rappelle que celui-ci contrôle le niveau de « débruitage » du flou estimé, et qu'il est réglé par défaut à $\zeta = 1/10$). Le Tab. 5.2 récapitule les indices de mesure de qualité de reconstruction obtenus pour l'image et le flou.

Avec ajout de bruit. On ajoute maintenant du bruit blanc gaussien à l'image floue ($\sigma = 3$). En fixant les paramètres de régularisation à $\alpha_1 = 10^2$ et $\alpha_2 = 9 \cdot 10^7$, on obtient alors l'image restaurée et le flou reconstruit en Fig. 5.7. On a ici - à cause de cet ajout de bruit - de nouveau utilisé un nombre d'itérations de point fixe à critère d'arrêt, avec limitation à dix itérations.

Comme pour le cas sans bruit, on constate une reconstruction du flou correcte en ce qui concerne sa direction et la taille de son support. Bien qu'il présente un PSNR quasi-équivalent à celui obtenu dans le cas sans ajout de bruit, la restauration de l'image est elle moins performante, bien entendu en raison de l'influence de la régularisation qui lisse un certain nombre de détails structurels. Les valeurs de PSNR et SSIM sont également données dans le Tab. 5.2.

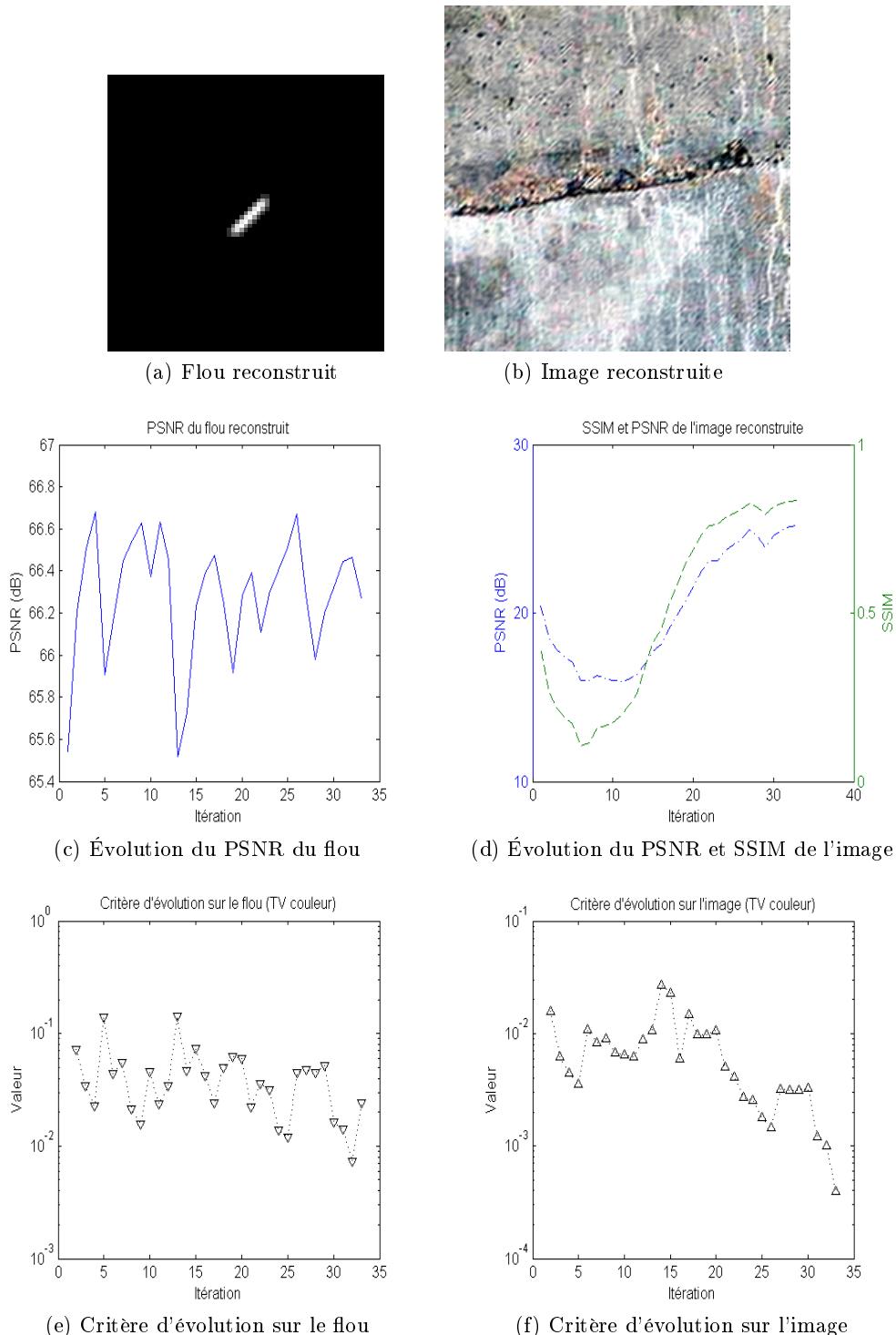
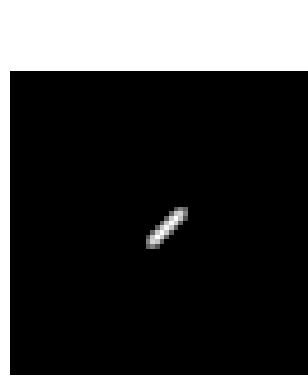


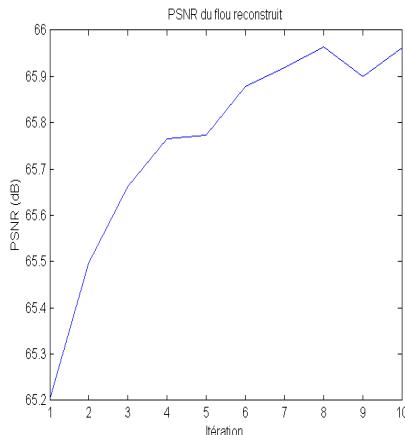
FIGURE 5.6 – Déconvolution aveugle de l'image *Reprise de béton* avec mouvement, sans ajout de bruit, avec $\alpha_1 = 10^{-3}$ et $\alpha_2 = 10^{-5}$ (une seule itération de point fixe).



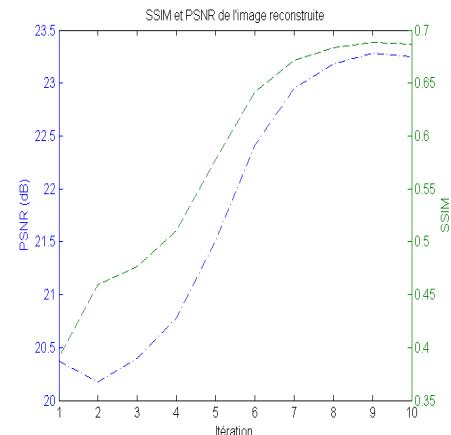
(a) Flou reconstruit



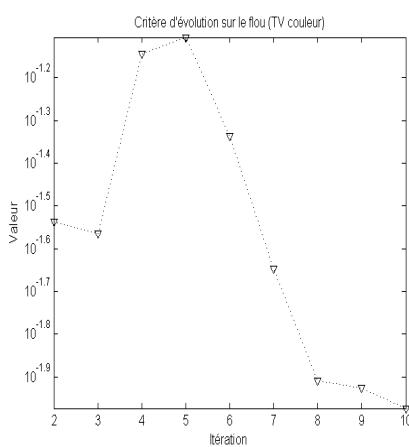
(b) Image reconstruite



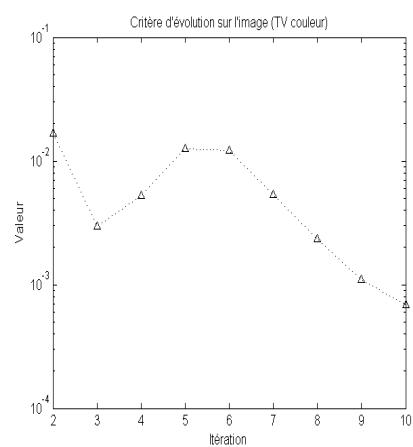
(c) Évolution du PSNR du flou



(d) Évolution du PSNR et SSIM de l'image



(e) Critère d'évolution sur le flou



(f) Critère d'évolution sur l'image

FIGURE 5.7 – Déconvolution aveugle de l'image *Reprise de béton* avec mouvement et ajout de bruit ($\sigma = 3$), avec $\alpha_1 = 10^2$ et $\alpha_2 = 9.10^7$ (itération de point fixe à critère d'arrêt).

Image	floue (PSNR / SSIM)	restaurée (PSNR / SSIM)	Noyau (PSNR)
$\sigma = 0$	20,43 dB / 0,3990	25,18 dB / 0,8332	66,27 dB
$\sigma = 3$	20,36 dB / 0,3905	23,25 dB / 0,6864	65,96 dB

TABLEAU 5.2 – Indicateurs de qualité de restauration de l'image *Reprise de béton* avec mouvement, et restaurée, suivant le niveau de bruit ajouté.

5.3 Images acquises en conditions réelles

Nous examinons maintenant trois images acquises par un drone en vol. Celles-ci sont données en Fig. 5.8 (a), Fig. 5.10 (a) et Fig. 5.12 (a). Étant donné leur résolution de départ beaucoup trop importante au vu des temps de calculs nécessaires à l'algorithme de déconvolution utilisé, nous avons extrait pour chacune une zone d'intérêt spécifique de taille 256×256 pixels. Ces zones d'intérêt respectives sont données en Fig. 5.8 (b), 5.10 (b) et 5.12 (b). Ce sont ces régions d'intérêt que nous tentons dans ce qui suit de déflouer.

Face à ce genre de problème, on est réduit à procéder par une démarche heuristique afin de fixer les valeurs des paramètres α_1 , α_2 (pour la régularisation sur respectivement l'image et le flou), et éventuellement ζ (paramètre de seuillage du flou) si besoin est. Dans un premier temps, il ne sert donc à rien d'effectuer plus d'une itération de point fixe, si l'on veut conserver des temps de calcul acceptables. Et ce d'autant plus que ces images réelles sont de toute évidence peu bruitées (sauf peut-être pour la deuxième), comme cela a été constaté via les tests sur des images dégradées synthétiquement, dans la section précédente.

Nous proposons à chaque fois dans ce genre de cas, face à une nouvelle image sur laquelle à peu près rien n'est connu, de régler α_1 et α_2 à des valeurs faibles, de l'ordre de 10^{-5} .

La Fig. 5.9 présente une tentative de déconvolution aveugle. Un premier essai avec ces dernières valeurs de α_1 et α_2 n'a rien donné de satisfaisant, car l'image obtenue après la première inversion de h était alors trop bruitée. α_1 devait donc être augmenté afin de compenser cette amplification de bruit. Nous avons alors pris $\alpha_1 = 10^{-2}$. Cette valeur s'avère convenable car l'image restaurée n'exhibe alors plus ce défaut. L'algorithme alterné a itéré pendant 50 itérations mais n'a pas atteint la précision requise sur f de $\epsilon = 10^{-3}$. En revanche, on constate que la netteté a été bien améliorée et que l'image de sortie apparaît moins floue que l'originale. On peut par exemple distinguer les bords du cercle central de manière bien plus précise, de même que la texture du béton est plus réaliste.

Nous nous intéressons ensuite à la deuxième image (Fig. 5.10). Celle-ci représente une cible test prise en vol, ayant pour but de représenter des fissures de différente taille. La zone d'intérêt extraite exhibe une netteté médiocre, et un bruit (visible à l'œil) cette fois relativement important. En raison de la faible présence de formes variées, et du faible nivellement des niveaux de gris dans cette zone, la restauration risque de s'avérer problématique.

Plusieurs résultats de déconvolution sont présentés en Fig. 5.11, suivant différentes valeurs des paramètres α_1 et ζ . À chaque fois, le flou identifié présente une forme « non-phérique », c'est-à-dire pour laquelle les valeurs non nulles ne sont pas concentrées en son centre, mais fortement dispersées. Ceci provient très probablement d'une impossibilité à séparer dans ce cas de manière correcte h et f à partir de g (l'image floue). Visuellement, la meilleure reconstruction semble être obtenue avec $\alpha_1 = 5.10^{-2}$ et $\zeta = 1/5$.

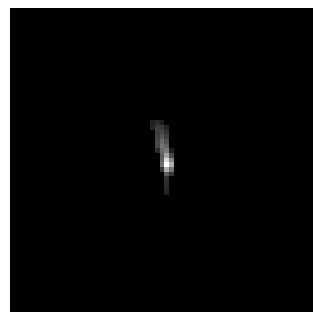


(a)



(b)

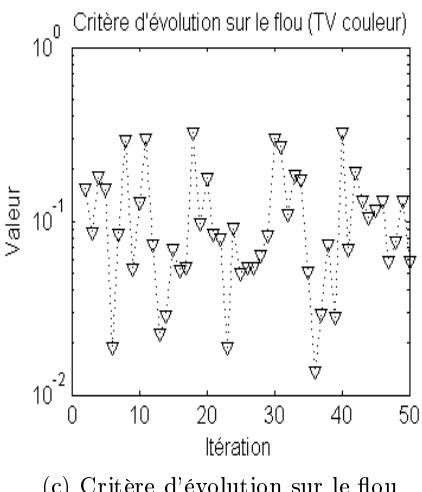
FIGURE 5.8 – (a) Première image réelle originale acquise par un drone en vol, et (b) zone d'intérêt extraite à déflouer.



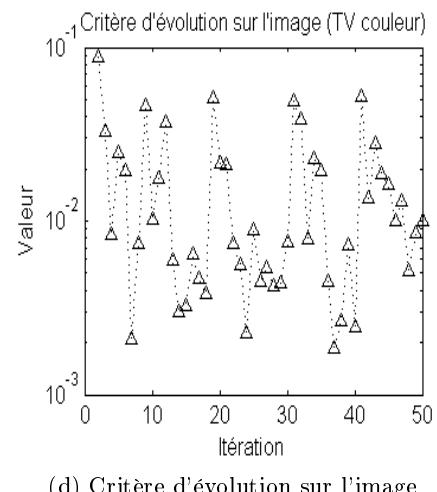
(a) Flou reconstruit



(b) Image reconstruite

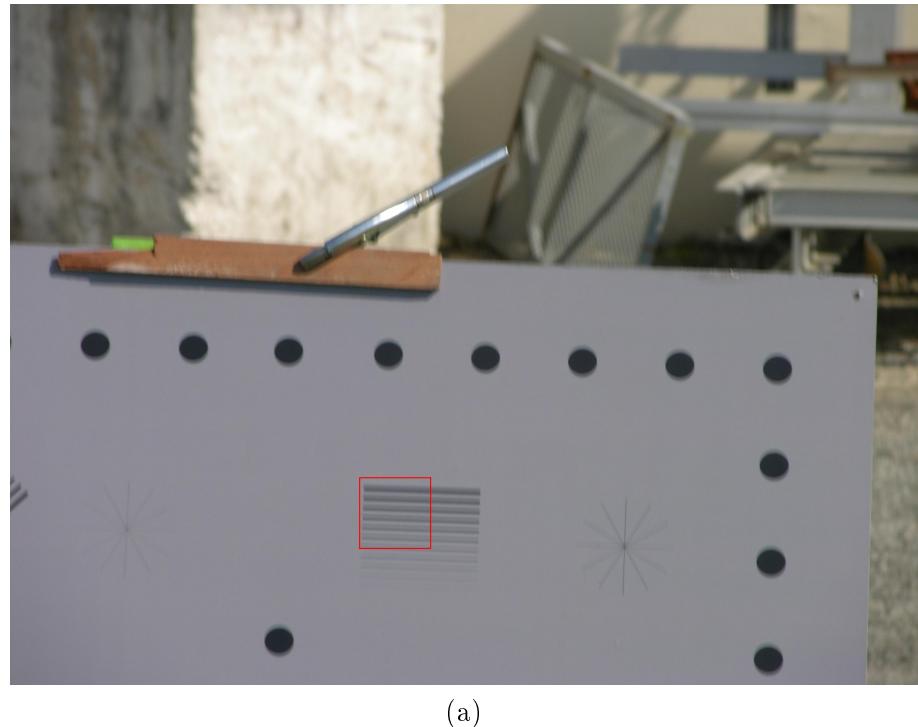


(c) Critère d'évolution sur le flou

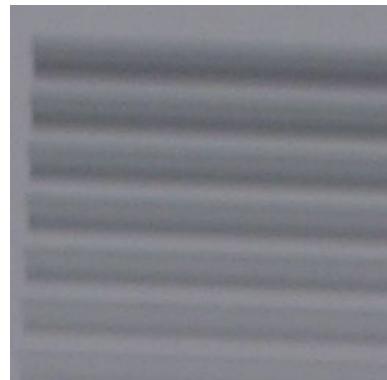


(d) Critère d'évolution sur l'image

FIGURE 5.9 – Déconvolution aveugle de l'image en Fig. 5.8, avec $\alpha_1 = 10^{-2}$ et $\alpha_2 = 10^{-5}$.

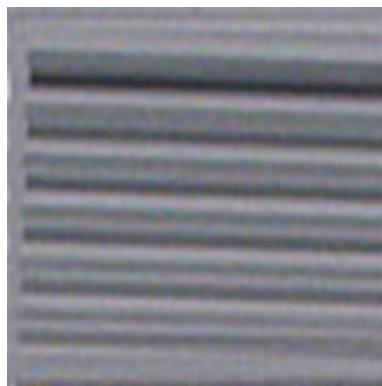


(a)

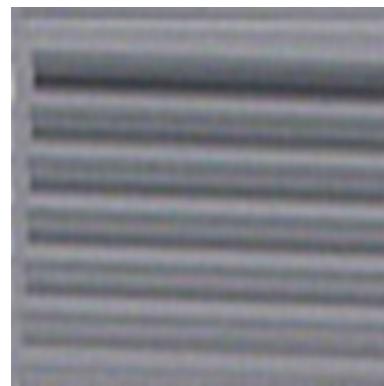


(b)

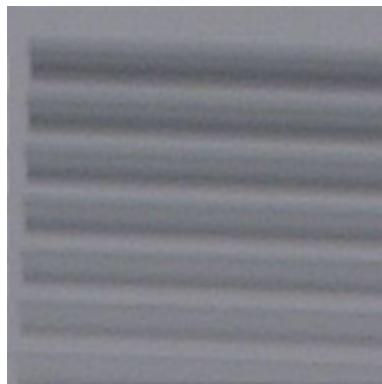
FIGURE 5.10 – (a) Deuxième image réelle originale acquise par un drone en vol, et (b) zone d'intérêt extraite à déflouer.



(a) $\alpha_1 = 5 \cdot 10^{-2}$ et $\zeta = 1/5$



(b) $\alpha_1 = 10^{-1}$ et $\zeta = 1/5$



(c) $\alpha_1 = 10^{-1}$ et $\zeta = 1/2$



(d) $\alpha_1 = 10^{-2}$ et $\zeta = 1/5$

FIGURE 5.11 – Déconvolution aveugle de l'image en Fig. 5.10 (b) reconstruite avec différents
valeur de α_1 et ζ .

Pour ce qui est de la troisième image traitée (Fig. 5.12), celle-ci est probablement le cas le plus difficile que l'on peut rencontrer. En effet, le flou affectant la scène est très marqué, et résulte sûrement à la fois de la combinaison d'une défocalisation et d'un mouvement non-rectiligne. Cependant, une telle image peut présenter un contenu digne d'intérêt, délicat à rephotographier⁵, et il convient alors de savoir si l'on peut arriver à l'améliorer.

Nous avons également ici essayé différentes valeurs du paramètre de régularisation α_1 , ceci afin de pouvoir trouver le meilleur compromis entre la netteté de l'image déconvoluée et la présence d'artefacts de haute fréquence, comme visibles en choisissant $\alpha_1 = 10^{-3}$ (cf. Fig. 5.13). Nous présentons de même les différents flous identifiés pour les divers réglages de α_1 . On constatera une variation très minime entre les différents noyaux reconstruits, ce qui tend à montrer que l'influence de α_1 sur ceux-ci est marginale.

5.4 Comparaison des performances

Nous allons dans cette section comparer les performances de notre algorithme avec celui proposé par Kaftory *et al.* dans [98]. Ces auteurs utilisent, tout comme nous, un schéma de déconvolution de type double régularisation, dont celle portant sur l'image est basée sur le principe de Beltrami. Cette approche a été expliquée en détails dans notre état de l'art⁶.

Nos expérimentations ont été faites sur deux images utilisées de manière classique dans la communauté de la restauration d'images. Il s'agit tout d'abord de l'image *Lena* (Fig. 5.14 (a)), de taille 256×256 , dégradée par un flou de défocalisation de rayon $\rho = 4$, ainsi que de l'image *Baboon* (Fig. 5.14 (b)), également de taille 256×256 , dégradée par un flou de mouvement rectiligne de longueur $l = 9$ et d'angle $\theta = 135^\circ$. On considérera deux cas : sans, et avec ajout de bruit blanc gaussien d'écart-type $\sigma = 2$. Les résultats avec l'algorithme de type Beltrami ont été obtenus directement par les auteurs de l'approche, c'est-à-dire Kaftory *et al.*

Sans ajout de bruit. En Fig. 5.15, nous donnons les résultats de restauration pour l'image *Lena*, déflouée avec les deux approches, de même que les flous reconstruits. Pour notre approche, nous avons utilisé une seule itération de point fixe pour la restauration sur l'image (étant donné le faible besoin d'une régularisation appuyée, au vu du faible niveau de bruit naturel présent dans l'image). Malgré cela, nos résultats s'avèrent largement supérieurs à ceux obtenus par la méthode de Kaftory, qui ne parvient à reconstruire qu'un noyau ne ressemblant que très vaguement à un disque, résultant en une déconvolution très moyenne, et une image toujours assez floue. Notons que, pour ces deux cas, les paramètres de régularisation choisis sont ceux qui donnent les meilleurs résultats au sens du SSIM. Dans notre approche, nous avons pris $\alpha_1 = 10^{-3}$ et $\alpha_2 = 10^{-5}$, et l'algorithme a itéré 9 fois, ce qui est très acceptable.

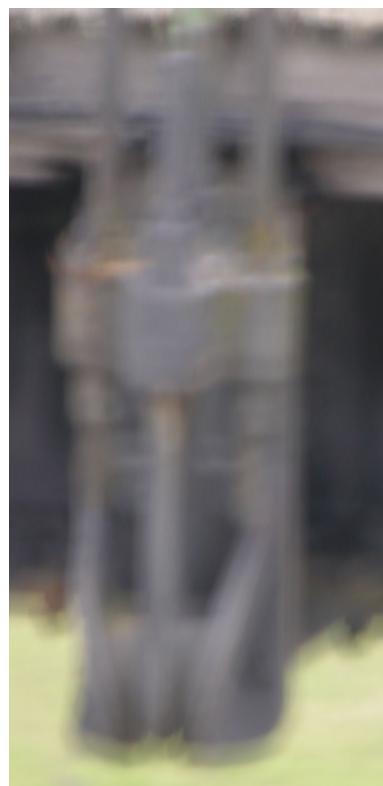
En Fig. 5.16, nous présentons les résultats pour l'image *Baboon*. Ici, nous avons posé $\alpha_1 = 10^{-4}$ et $\alpha_2 = 10^{-5}$; il s'agit de nouveau des valeurs donnant les meilleurs résultats. On s'aperçoit que notre procédure de seuillage a permis d'arriver à la reconstruction d'un flou très proche du noyau réel, résultant en une bonne restauration de l'image, pour laquelle, de même que précédemment, nous n'avons effectué qu'une seule itération de point fixe. L'approche de Kaftory, à contrario de la nôtre, ne permet pas cette reconstruction efficace

5. Par exemple pour des questions de coût, ou pour des raisons techniques; on peut penser à l'imagerie satellitaire.

6. Cf. Chapitre 2, Section 3.8.3.

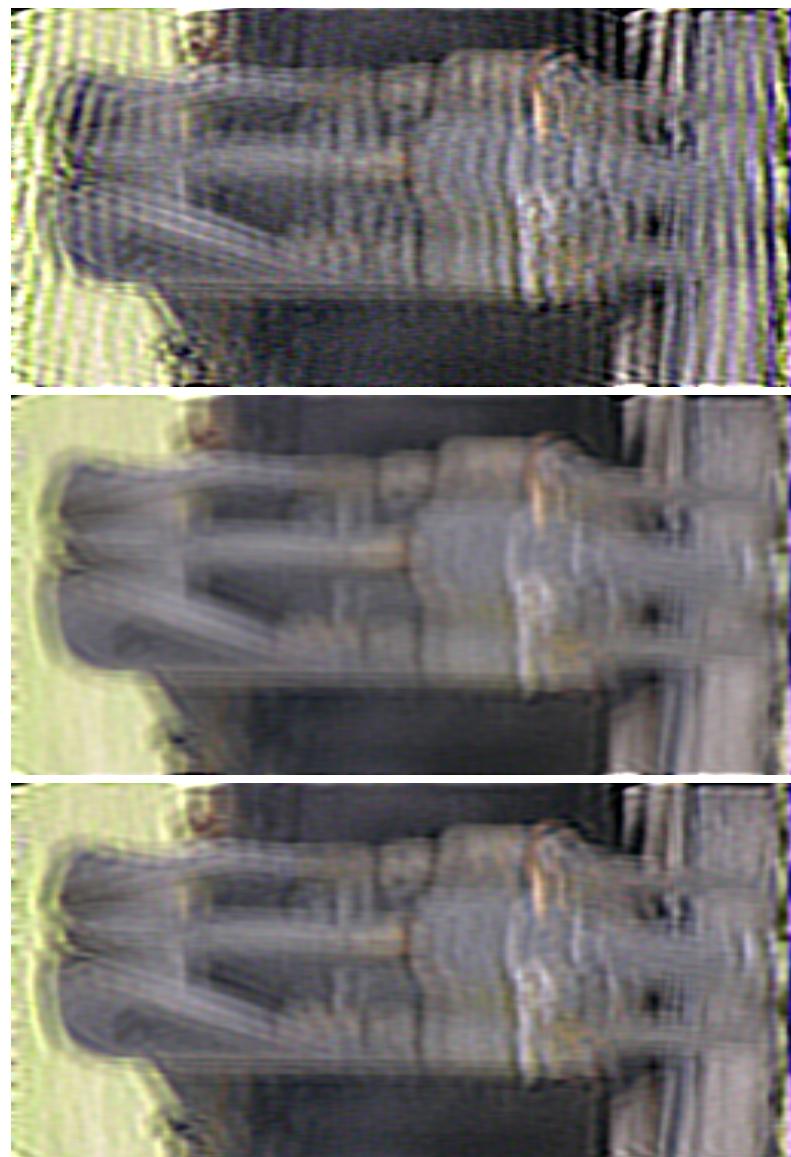


(a)

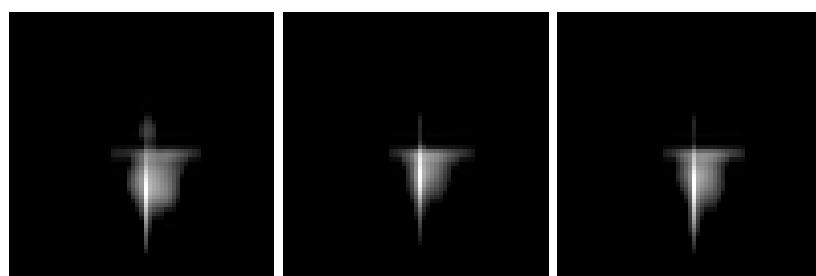


(b)

FIGURE 5.12 – (a) Troisième image réelle originale acquise par un drone en vol, et (b) zone d'intérêt extraite à déflouer.

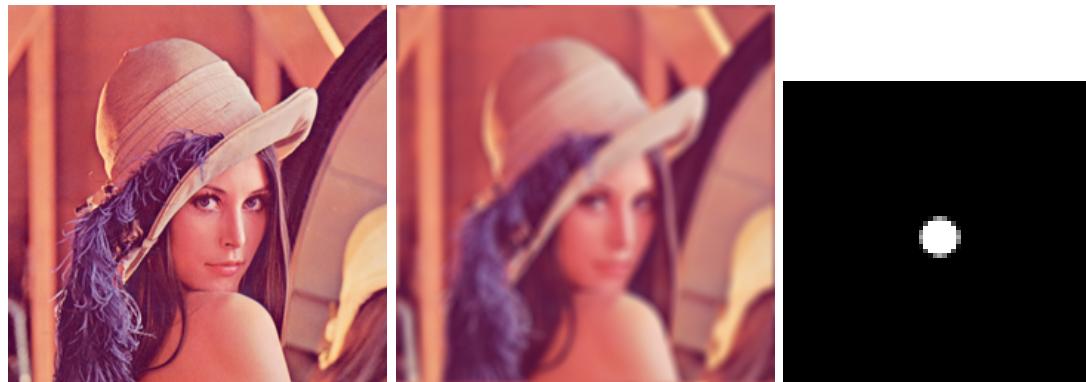


(a) Images restaurées



(b) Flous reconstruits

FIGURE 5.13 – Déconvolution aveugle de l'image en Fig. 5.10 (b), reconstruite avec respectivement $\alpha_1 = 10^{-3}$, $\alpha_1 = 10^{-2}$ et $\alpha_1 = 5.10^{-3}$.

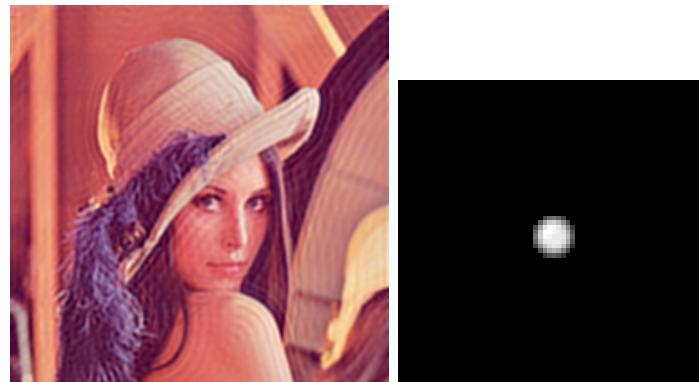


(a) Image *Lena* originale, flouée (défocalisation) et flou utilisé

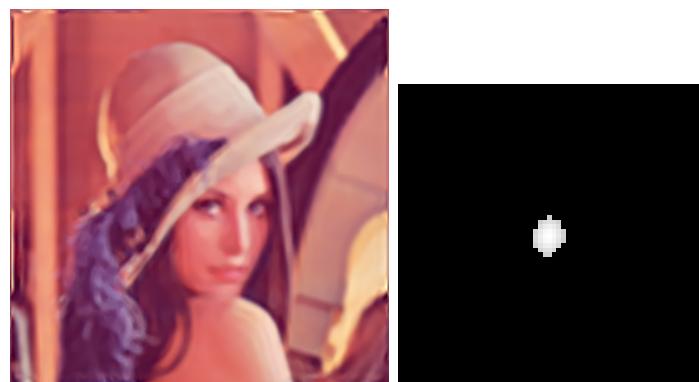


(b) Image *Baboon* originale, flouée (mouvement) et flou utilisé

FIGURE 5.14 – Images utilisées pour les tests de comparaison des performances.

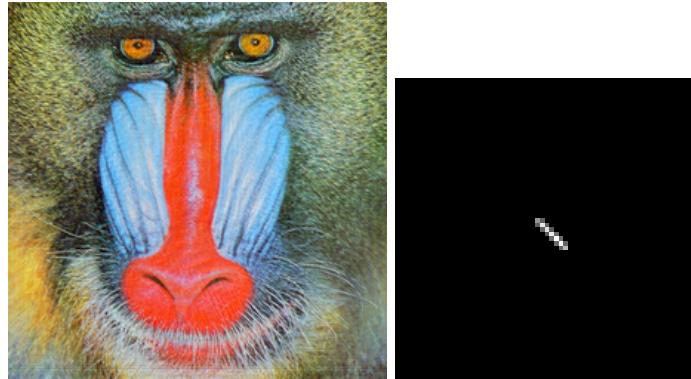


(a) Notre approche

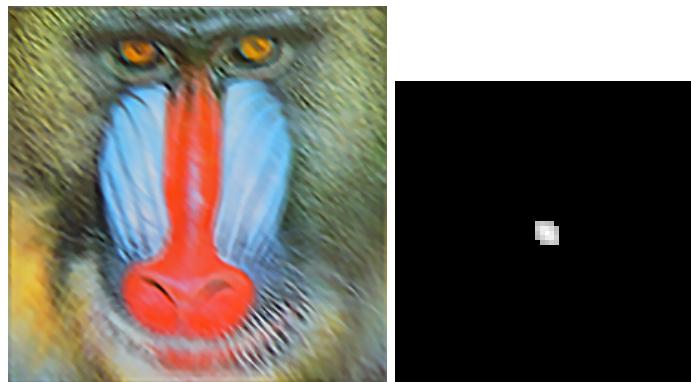


(b) Approche de Kaftory *et al.*

FIGURE 5.15 – Résultat du test comparatif sur l'image *Lena* défocalisée (Fig. 5.14 (a)), sans ajout de bruit.



(a) Notre approche



(b) Approche de Kaftory *et al.*

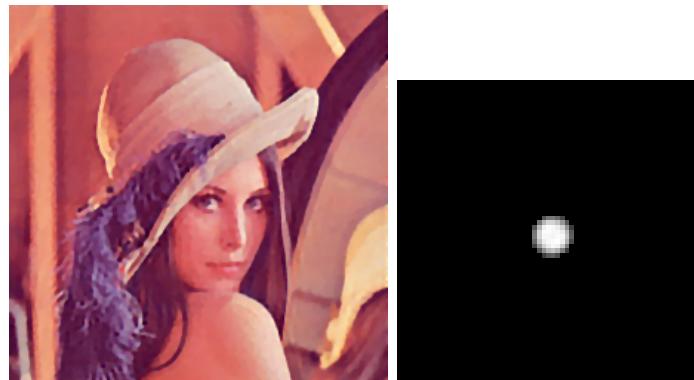
FIGURE 5.16 – Résultat du test comparatif sur l'image *Baboon* avec mouvement (Fig. 5.14 (b)), sans ajout de bruit.

du noyau, qui semble tout juste présenter l'orientation exacte, mais en aucun cas la longueur réelle du support. Le flou de mouvement est donc encore fortement visible dans l'image déconvoluée.

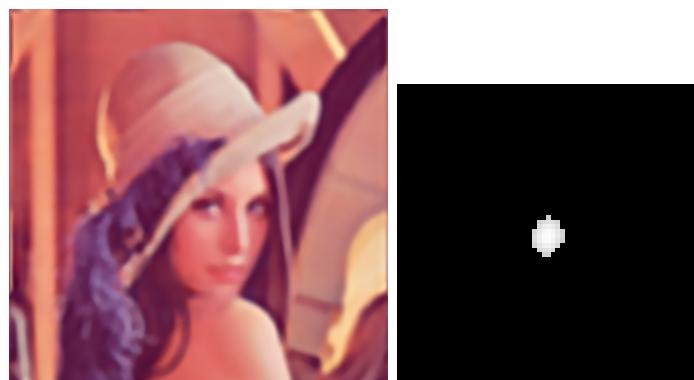
Avec ajout de bruit. L'ajout de bruit dégrade bien évidemment les résultats obtenus, mais ceux-ci restent tout à fait satisfaisants avec notre approche. En Fig. 5.17, on donne ceux concernant l'image *Lena*. De nouveau, nous estimons bien un disque, plutôt régulier, et cette bonne estimation du noyau permet d'arriver à un déflouage satisfaisant de l'image. Notons que, dans ce cas (ainsi que pour le suivant), l'itération de point fixe se fait par critère d'arrêt, et que les paramètres sont réglés à $\alpha_1 = 20$ et $\alpha_2 = 10^{-5}$. L'image résultante de l'approche de Kaftory *et al.* exhibe les mêmes problèmes que précédemment, et la restauration reste donc plus limitée.

Pour l'image *Baboon*, les résultats obtenus sont présentés en Fig. 5.18. Nous avons obtenu le meilleur résultat également pour $\alpha_1 = 20$ et $\alpha_2 = 10^{-5}$. De même que pour le cas sans bruit, nous estimons un noyau de très bonne qualité, et obtenons donc également une image bien restaurée. Ceci à la différence de la méthode concurrente, qui s'avère de nouveau incapable de reconstruire efficacement h , et par conséquent f .

Afin de synthétiser l'ensemble des résultats des indicateurs qualitatifs, nous proposons

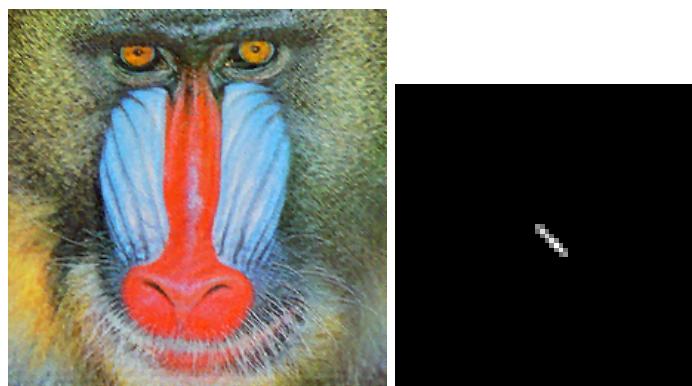


(a) Notre approche

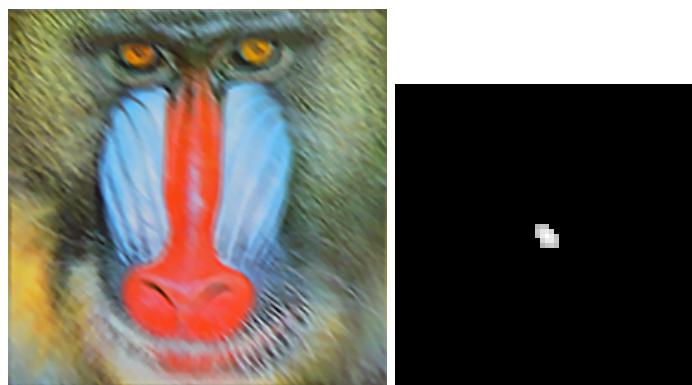


(b) Approche de Kaftory *et al.*

FIGURE 5.17 – Résultat du test comparatif sur l'image *Lena* défocalisée (Fig. 5.14 (a)), avec ajout de bruit ($\sigma = 2$).



(a) Notre approche



(b) Approche de Kaftory *et al.*

FIGURE 5.18 – Résultat du test comparatif sur l'image *Baboon* avec mouvement (Fig. 5.14 (b)), avec ajout de bruit ($\sigma = 2$).

	$\sigma = 0$		$\sigma = 2$	
	Image	Noyau	Image	Noyau
TV couplé seuillé	30,14 dB / 0,8464	79,77 dB	29,66 dB / 0,8582	80,05 dB
Double Beltrami	25,5 dB / 0,7737	68,83 dB	25,67 dB / 0,7517	68,63 dB

TABLEAU 5.3 – Indicateurs de qualité de restauration pour les tests comparatifs sur l'image *Lena*. PSNR et SSIM pour l'image, PSNR pour le noyau.

	$\sigma = 0$		$\sigma = 2$	
	Image	Noyau	Image	Noyau
TV couplé seuillé	28,77 dB / 0,8937	75,20 dB	25,29 dB / 0,7740	71,48 dB
Double Beltrami	21,53 dB / 0,5055	61,19 dB	21,85 dB / 0,5038	61,30 dB

TABLEAU 5.4 – Indicateurs de qualité de restauration pour les tests comparatifs sur l'image *Baboon*. PSNR et SSIM pour l'image, PSNR pour le noyau.

tout d'abord le Tab. 5.3, qui résume, pour notre approche et celle de Kaftory *et al.*, les PSNR et SSIM obtenus pour l'image *Lena*. Nous proposons de même le Tab. 5.4, qui présente lui les valeurs correspondantes, obtenues via les deux algorithmes, pour l'image *Baboon*. De toute évidence, nos valeurs se situent dans une plage bien supérieure à celle de l'approche concurrente.

6 Synthèse

Nous avons présenté dans ce chapitre une mise en œuvre d'une méthode de déconvolution aveugle innovante, basée sur la double régularisation TV pour les images en couleurs, avec contrainte de compacité sur le flou. Cette méthode est une adaptation de l'approche étudiée au Chapitre 3 pour le cas des images monochromes. Nous avons montré en particulier expérimentalement qu'il est indispensable de considérer un couplage des canaux couleur, et qu'une restauration naïve, qui consisterait à déflouer indépendamment les différents canaux les uns des autres est en général inefficace, et donc inappropriée.

Nous avons obtenu des résultats très satisfaisants sur des images dégradées par des flous synthétiques, et ce même en présence de bruit ajouté. La couleur semble même permettre des restaurations de qualité légèrement meilleure qu'en monochrome, à en croire les valeurs des SSIM mesurées sur les images déflouées.

Des expérimentations ont en outre été présentées sur des images réelles acquises par un drone en vol. Nous avons dans tous les cas réussi à obtenir des images plus nettes, plus agréables visuellement, et sur lesquelles les caractéristiques étaient plus facilement identifiables.

Enfin, nous avons pu fournir une comparaison expérimentale de notre algorithme avec une technique de l'état de l'art en déconvolution aveugle couleur, proposée par Kaftory *et al.*, et basée sur l'utilisation d'une double régularisation de type Beltrami. Sur tous les exemples traités, notre approche s'est révélée bien supérieure, en raison de ses capacités plus élevées pour la reconstruction du noyau de flou affectant l'image.

En perspective de développement pour cette méthode, et sur base des résultats obtenus avec ces schémas dans le chapitre précédent, on pourrait envisager une extension à une régularisation sur l'image de type Mumford-Shah dans ses différentes variantes [11]. De même pourrait-on envisager une régularisation de Beltrami, tout en conservant la régularisation TV pour le flou, avec dans tous les cas utilisation de la procédure de seuillage mise en œuvre. Mais ceci allongerait cependant la durée de la procédure de déconvolution. Il nous semble alors très intéressant d'envisager d'autres techniques de minimisation de la fonctionnelle traitée que celle basée sur l'itération de point fixe. D'autre part, il nous apparaît plausible d'envisager la faisabilité de méthodes d'optimisation sous contrainte, afin de gérer d'une manière plus rigoureuse les contraintes telles que la positivité des valeurs de luminance de l'image et du noyau [45].

Chapitre 6

Déconvolution aveugle paramétrique pour les images monochromes et couleurs

1 Introduction

Dans les chapitres précédents, nous nous sommes attachés à la reconstruction d'opérateurs de flou génériques, dans le sens où nous ne considérons pas d'information importante quelconque permettant de les caractériser de manière plus précise. On se place dorénavant dans un cadre qualifié par certains auteurs de « semi-aveugle ». Cela signifie, comme déjà évoqué précédemment dans ce travail, que l'on n'a toujours pas la connaissance du flou, mais qu'en revanche, certaines informations sont disponibles sur sa forme, informations permettant de savoir à quelle classe de noyaux il appartient (défocalisation, mouvement, gaussienne, etc.).

Nous allons donc envisager ici deux cas, pouvant se rapprocher à notre avis des modèles réels que l'on peut observer pour des applications concrètes. Il s'agit du cas du flou de défocalisation, modélisé par un unique paramètre : le rayon ρ du disque de défocalisation, et du cas du flou de mouvement uniforme linéaire (ou rectiligne), défini lui par deux paramètres : sa longueur et son orientation¹. Dans ce qui suit, on nommera ce type de paramètres « intrinsèques », afin de bien les distinguer des paramètres de régularisation.

Dans le premier cas, la reconstruction du noyau de flou revient donc à l'estimation précise d'un paramètre, et non plus à la reconstruction directe de tout un opérateur, tandis que dans le deuxième, il faut en estimer deux, ce qui est sensiblement plus délicat.

Ce type de problème a par exemple été relativement récemment examiné dans le cadre de noyaux gaussiens par Bar *et al.* [13], et ce avec une approche variationnelle basée sur la double régularisation, comme nous l'avons fait jusqu'à présent dans le cas de noyaux de flou non paramétriques.

On rappelle que le noyau de défocalisation est déterminé par un unique paramètre ρ :

$$h_\rho(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi\rho^2} & \text{si } \sqrt{x^2 + y^2} \leq \rho \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases} \quad (6.1)$$

1. Cf. Chapitre 1, Section 1.6, p. 12.

Le noyau de mouvement linéaire uniforme, lui, est déterminé par deux paramètres, l et θ :

$$h_{l,\theta}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{l} & \text{si } \sqrt{x^2 + y^2} \leq \frac{l}{2} \quad \text{et} \quad \tan \theta = \frac{y}{x} \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases} \quad (6.2)$$

2 Sur les difficultés de la double régularisation paramétrique

On pourrait penser que les méthodes développées dans les chapitres précédents, et en particulier celle utilisant une double régularisation à variation totale, pourraient être rapidement et efficacement transposées au cas de noyaux paramétriques. Là où notre problème de reconstruction du flou pouvait être vu, par le réglage heuristique de son paramètre de régularisation α_2 et du paramètre de seuillage ζ , comme un moyen visant à éviter de reconstruire directement toute la surface bidimensionnelle h (soit un ensemble de coefficients), les choses se présentent différemment dans le cas paramétrique, puisque cette surface devient alors naturellement plate².

Nous n'avons alors pour ces noyaux paramétrisés plus que leurs paramètres intrinsèques à estimer : un dans le cas de la défocalisation, deux dans le cas du mouvement rectiligne, et ceci a priori sans nécessité d'un paramètre de régularisation α_2 . En effet, la pertinence de régulariser des noyaux déjà si fortement contraints semble assez incongrue, puisque tous les coefficients des noyaux ont la même valeur, et que rajouter une contrainte de régularisation ne présente donc aucun intérêt, puisque celle-ci a alors pour but d'avoir un effet lissant sur les zones homogènes. Le seul intérêt d'une telle régularisation peut alors porter - comme on l'a vu pour la méthode de Chan et Wong - sur son influence possible envers la taille du noyau reconstruit. On rappelle en effet que la valeur de α_2 doit être fixée, dans cette approche, proportionnellement à la taille du noyau *inconnu* ; ce qui est assez paradoxal en soi. En outre, notre procédure de seuillage est forcément inutile ici, et peut être mise de côté.

2.1 Modèles variationnels de déconvolution paramétriques

Plaçons nous pour le moment dans le contexte monocanal, et envisageons un modèle générique de déconvolution à double régularisation avec flou paramétrique, dont une régularisation TV sur l'image. Nous notons Ξ l'ensemble des paramètres intrinsèques du noyau de flou, noté h_Ξ . On peut alors envisager le problème variationnel

$$\min_{f,\Xi} \mathcal{J}(f,h_\Xi) = \min_{f,\Xi} \frac{1}{2} \|h_\Xi * f - g\|_{L^2}^2 + \alpha_1 \int_{\Omega} |\nabla f| + \alpha_2 \mathcal{R}_2(h_\Xi). \quad (6.3)$$

D'après Chan et Shen [39] cependant, la régularisation sur le noyau peut ne porter que sur l'ensemble de ses paramètres, et non nécessairement sur la fonction de dispersion h_Ξ elle-même. Cela conduit alors à la formulation

$$\min_{f,\Xi} \mathcal{J}(f,h_\Xi) = \min_{f,\Xi} \frac{1}{2} \|h_\Xi * f - g\|_{L^2}^2 + \alpha_1 \int_{\Omega} |\nabla f| + \alpha_2 \mathcal{R}_2(\Xi); \quad (6.4)$$

le tout étant alors de savoir quelle forme doit prendre la fonction \mathcal{R}_2 dans ce cas.

Un problème majeur se pose alors avec les noyaux discontinus auxquels nous nous intéressons, à savoir le flou de défocalisation et le flou de mouvement rectiligne. En effet, le gradient de h_ρ est nul presque partout³, de même que celui de $h_{l,\theta}$. Ceci allant de soi dans

2. Voir pour s'en convaincre la représentation tridimensionnelle des noyaux considérés.

3. Au sens mathématique : sauf dans sur un ensemble de mesure nulle.

la mesure où ces noyaux sont plats. On ne peut donc pas fondamentalement considérer une régularisation invoquant leur gradient, ou toute autre dérivée d'ordre supérieur (telle que le laplacien), puisque ceci ramènerait alors à une sorte de régularisation sur h_{Ξ} nulle. L'utilisation de la variation totale permet cependant de s'affranchir de cette limitation, puisque des fonctions discontinues sont autorisées.

Décrivons un possible modèle paramétrique générique avec double régularisation TV. Les noyaux que nous étudions ne sont pas continus, ni différentiables. Mais on peut explicitement calculer leur variation totale comme étant la somme des longueurs de leurs discontinuités. Pour une défocalisation, soit avec $\Xi = \{\rho\}$, on a

$$\text{TV}(h_{\Xi}) = \text{TV}(h_{\rho}) = \frac{1}{\pi\rho^2} \cdot 2\pi\rho = \frac{2}{\rho}, \quad (6.5)$$

et pour un noyau de mouvement, soit avec $\Xi = \{l, \theta\}$,

$$\text{TV}(h_{\Xi}) = \text{TV}(h_{l,\theta}) = \frac{1}{l} \cdot l = 1. \quad (6.6)$$

Le modèle à double régularisation s'écrit alors de manière générale

$$\min_{f, \Xi} \mathcal{J}(f, h_{\Xi}) = \min_{f, \Xi} \frac{1}{2} \|h_{\Xi} * f - g\|_{L^2}^2 + \alpha_1 \int_{\Omega} |\nabla f| + \alpha_2 \text{TV}(h_{\Xi}), \quad (6.7)$$

ce qui donne, dans le cas particulier d'une défocalisation :

$$\min_{f, \rho} \mathcal{J}(f, h_{\rho}) = \min_{f, \rho} \frac{1}{2} \|h_{\rho} * f - g\|_{L^2}^2 + \alpha_1 \int_{\Omega} |\nabla f| + \frac{\alpha_2}{\rho}, \quad (6.8)$$

et d'un mouvement :

$$\min_{f, l, \theta} \mathcal{J}(f, h_{l,\theta}) = \min_{f, l, \theta} \frac{1}{2} \|h_{l,\theta} * f - g\|_{L^2}^2 + \alpha_1 \int_{\Omega} |\nabla f| + \alpha_2. \quad (6.9)$$

Dans ce dernier cas, l'ajout d'une constante finale α_2 n'apporte aucune information utile au problème. Cette « pseudo- » régularisation sur $h_{l,\theta}$ peut donc être omise.

Comme nous l'avons en outre déjà dit, régulariser des noyaux paramétrisés n'a a priori pas beaucoup de sens. En effet, aucune amplification de bruit n'est alors vraiment possible dans leur reconstruction, puisque, dans l'exemple d'un noyau de défocalisation, une fois le rayon estimé, le disque correspondant⁴ sera dans tous les cas lisse. Un réglage $\alpha_2 = 0$ semblerait donc logique. Si l'on considère un tel modèle paramétrique sans régularisation sur le flou, alors nous obtenons le problème variationnel simplifié

$$\min_{f, \Xi} \mathcal{J}(f, h_{\Xi}) = \min_{f, \Xi} \frac{1}{2} \|h_{\Xi} * f - g\|_{L^2}^2 + \alpha_1 \int_{\Omega} |\nabla f|. \quad (6.10)$$

De manière assez étrange, la régularisation sur h est tout de même considérée chez Bar *et al.* [13], mais la pertinence de la présence de ce terme n'est pas discutée. Envisageons tout de même une technique de minimisation pour des approches telles que (6.7), afin de mettre en exergue le comportement de tels modèles.

4. ...à la surface du cylindre représentant ce noyau en 3D...

2.2 Essai de minimisation et problèmes de convergence

Cas de la défocalisation. Ici, $\Xi = \{\rho\}$. La minimisation de la fonctionnelle en (6.7) résultante est obtenue, comme pour les cas non-paramétriques, en y appliquant les conditions d'optimalité de premier ordre, sur f et sur le paramètre ρ recherché. Cela donne :

$$\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial f} = (h_\rho * f - g) * h_\rho^\circledast - \alpha_1 \operatorname{div} \left(\frac{\nabla f}{|\nabla f|} \right) = 0 \quad (6.11)$$

et

$$\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \rho} = \int_{\Omega} (h_\rho * f - g) \left(\frac{\partial h_\rho}{\partial \rho} * f \right) - \frac{\alpha_2}{\rho^2} = 0, \quad (6.12)$$

où

$$\frac{\partial h_\rho}{\partial \rho} = \begin{cases} \frac{-2}{\pi \rho^3} & \text{si } \sqrt{x^2 + y^2} \leq \rho \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases} \quad (6.13)$$

La première équation est la même que celle qui est obtenue dans la résolution du modèle non-paramétrique du Chapitre 3, Section 5, et nous ne reviendrons pas dessus ici.

La deuxième est une simple équation numérique à une variable, qui, de manière discrète, prend alors la forme :

$$\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \rho} = \sum_{i,j \in \Omega} (h_\rho * f - g) \left(\frac{\partial h_\rho}{\partial \rho} * f \right)_{i,j} - \frac{\alpha_2}{\rho^2} = 0. \quad (6.14)$$

Celle-ci peut être résolue facilement par une technique basique telle que la méthode de dichotomie. Nous avons utilisé pour la solutionner la fonction de résolution des équations à une variable `fzero` du logiciel MATLAB®.

Nous allons cependant voir que résoudre les deux équations (6.11) et (6.12) dans un schéma de minimisation alternée ne mène pas à la convergence de l'algorithme vers le rayon réel du noyau, et ce, que la régularisation \mathcal{R}_2 soit présente ou non.

Cas du flou de mouvement. On a dans ce cas $\Xi = \{l, \theta\}$, et le modèle de déconvolution paramétrique avec régularisation TV suivant (6.7) devient par suite (6.9). La minimisation de cette fonctionnelle est cependant insoluble sous cette forme via les conditions d'Euler. En effet, bien que pour la première variable, la condition d'optimalité s'écrive

$$\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial l} = \int_{\Omega} (h_{l,\theta} * f - g) \left(\frac{\partial h_{l,\theta}}{\partial l} * f \right) = 0, \quad (6.15)$$

celle portant sur le deuxième paramètre θ du noyau donnerait

$$\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \theta} = \int_{\Omega} (h_{l,\theta} * f - g) \left(\frac{\partial h_{l,\theta}}{\partial \theta} * f \right) = 0. \quad (6.16)$$

Or, $h_{l,\theta}$ ne dépendant pas explicitement de θ , il n'est pas possible de dériver de la sorte par rapport à cette variable. Quand bien même pourrions-nous trouver une formulation alternative, les mêmes problèmes de convergence qu'avec les noyaux monoparamétrés de défocalisation se feraient jour, comme nous allons le voir dans ce qui suit. Le problème posé sous cette forme demeure alors ouvert. C'est pourquoi nous proposerons un peu plus loin une approche visant à s'attaquer directement à l'estimation des paramètres intrinsèques, sans passer par une formulation comportant, comme ici, des paramètres de régularisation à régler en sus.

Problèmes de convergence avec noyau de défocalisation. L'étude publiée par Bar *et al.* dans [13], outre son intérêt quant à la mise en œuvre d'une régularisation de type Mumford-Shah, en conjonction avec la reconstruction paramétrique d'un noyau gaussien, laisse cependant apercevoir une lacune importante, consistant en la non prise en compte de l'influence du paramètre de régularisation utilisé sur ce noyau. Nous souhaitons mettre en évidence cette influence de manière numérique, dans le contexte du modèle de déconvolution que nous considérons.

Ci-dessous, nous présentons à titre d'exemple, et afin d'étayer notre propos, quelques résultats d'estimation du rayon de défocalisation obtenus par déconvolution de l'image *Lena* (taille 256×256), dégradée par un flou de rayon $\rho = 5$, suivant le modèle de déconvolution

$$\min_{f,\rho} \mathcal{J}(f,h_\rho) = \min_{f,\rho} \frac{1}{2} \|h_\rho * f - g\|_{L^2}^2 + \alpha_1 \int_{\Omega} |\nabla f| + \frac{\alpha_2}{\rho}. \quad (6.17)$$

Sans régularisation sur le flou. Nous avons d'abord considéré le cas du paramètre de régularisation α_2 nul, soit une absence de régularisation sur le noyau. La valeur initiale du rayon est fixée à $\rho = 1$. En Fig. 6.1, on montre différentes données permettant d'appréhender le comportement de l'algorithme de minimisation. On constate que l'évolution des itérations mène à une décroissance du rayon initial choisi (voir (c)). On notera que ceci se produit quelque soit la valeur initiale choisie, et ce dans tous les cas similaires que nous avons envisagés, en particulier avec d'autres tailles de noyau, et d'autres images. Il apparaît donc que, bien que ceci ne semble pas avoir de sens physique, il faille considérer un paramètre α_2 non nul, et donc une régularisation sur h_ρ , afin d'obtenir une croissance du rayon de départ fourni.

Avec régularisation sur le flou. Nous avons ensuite considéré un réglage du paramètre $\alpha_2 = 10^4$. La Fig. 6.2 récapitule l'ensemble des données observées lors du processus de reconstruction du noyau. La valeur initiale du rayon est fixée à $\rho = 1$, comme pour le cas ci-dessus. On constate cette fois une croissance du rayon estimé, mais celle-ci s'avère lente, et est encore loin de s'approcher de la valeur réelle $\rho = 5$ après 300 itérations ! En outre, il est à noter que cette croissance présente une forme un peu particulière, puisque l'on observe une brusque cassure dans la courbe, après environ 50 itérations.

En Fig. 6.3, nous considérons $\alpha_2 = 10^5$. On s'aperçoit tout d'abord qu'il n'y a pas convergence de l'algorithme, ce qui est le plus rédhibitoire. Ensuite, on voit qu'une sorte de « pseudo-convergence » se produit aux alentours de $\rho = 5$, après un brusque saut dans l'estimation, mais que, malheureusement, cette valeur est dépassée par la suite, menant finalement à la divergence de l'algorithme.

Tout ceci met bien en évidence qu'il semble ne pas y avoir de convergence de l'algorithme de minimisation alternée pour des noyaux discontinus⁵. Ce genre d'approche n'est donc absolument pas robuste, et il est bien plus judicieux de s'intéresser directement à la recherche de la valeur effective de ρ , plutôt que d'essayer de la déterminer via une régularisation dont le fondement physique n'apparaît pas clairement. En effet, passer par la détermination d'un paramètre de régularisation α_2 pour arriver à l'estimation d'un autre paramètre intrinsèque ρ ne présente aucun sens en soi.

5. On notera que dans [39], il est donné une preuve de convergence de l'algorithme de minimisation alternée avec estimation paramétrique du noyau, mais seulement dans le cas où celui-ci est continu.

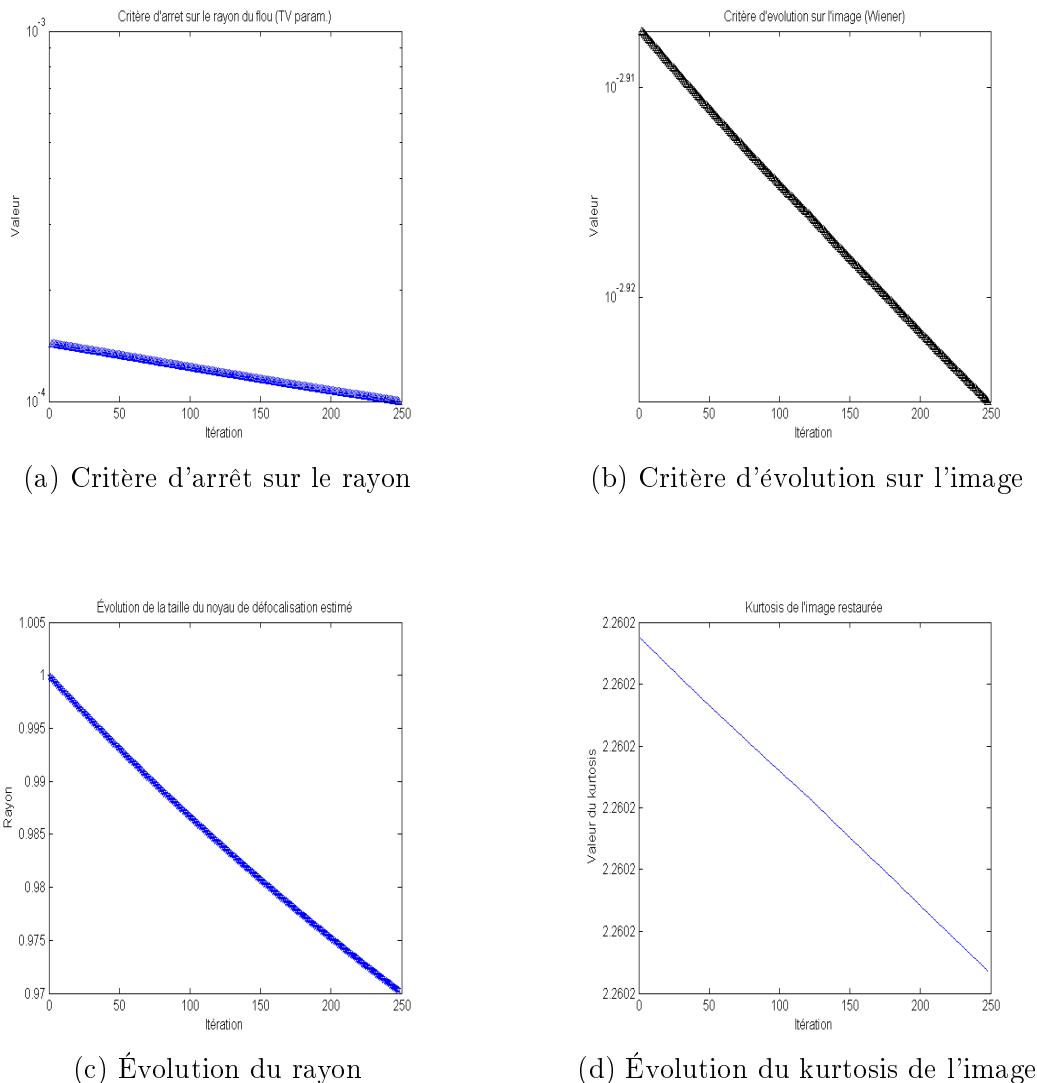


FIGURE 6.1 – Déconvolution aveugle paramétrique de l'image *Lena* défocalisée, avec $\alpha_2 = 0$.

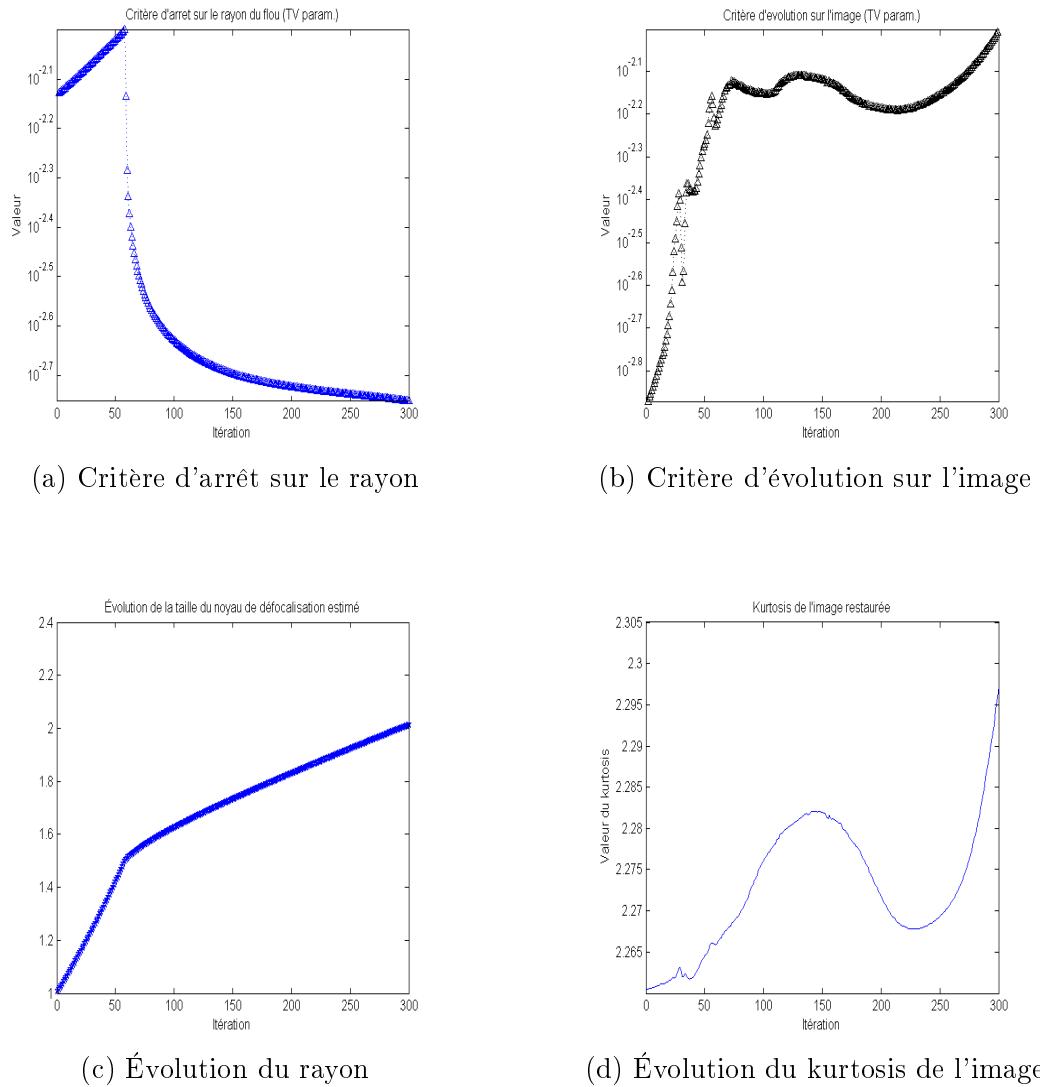
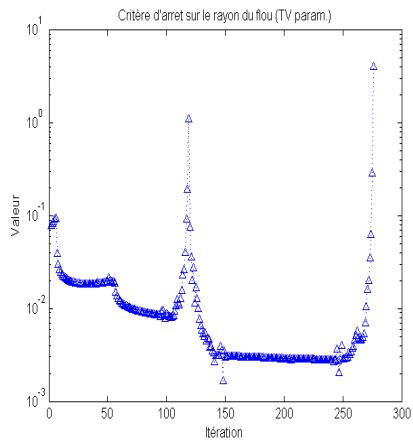
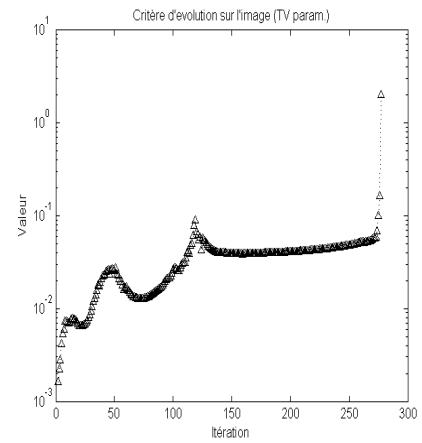


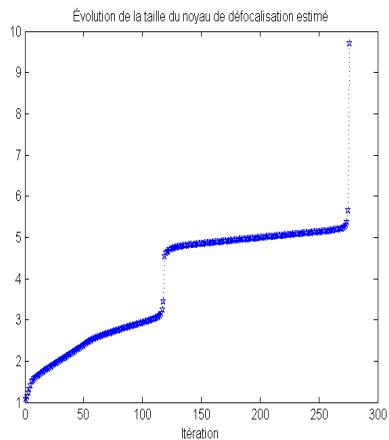
FIGURE 6.2 – Déconvolution aveugle paramétrique de l'image *Lena* défocalisée, avec $\alpha_2 = 10^4$.



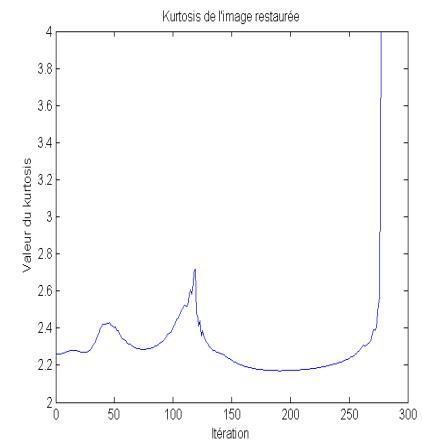
(a) Critère d'arrêt sur le rayon



(b) Critère d'évolution sur l'image



(c) Évolution du rayon



(d) Évolution du kurtosis de l'image

FIGURE 6.3 – Déconvolution aveugle paramétrique de l'image *Lena* défocalisée, avec $\alpha_2 = 10^5$.

3 Pré-estimation des flous par filtrage de choc

On présente ici une approche originale visant à obtenir une première estimation grossière des paramètres intrinsèques d'un noyau de flou. Pour cela, on va employer une technique évoquée en Section 2.1.5 du Chapitre 2, et appelée « filtrage de choc » (cf. p. 31).

Le filtrage de choc est une technique qui a été introduite par Osher et Rudin dans [151]. Celle-ci consiste, de manière très générale, à rehausser les contours lissés d'une image. Pour cela, l'idée fondamentale des auteurs était de s'inspirer de la physique des chocs et des fronts d'onde. Par résolution numérique d'une équation aux dérivées partielles d'évolution dans le temps, l'image traitée voit ses bords adoucis accentués au fur et à mesure d'un processus itératif.

Cette image aux contours rehaussés peut alors être utilisée comme une approximation de l'image nette recherchée⁶.

On peut alors utiliser ces deux images, l'image filtrée, et l'image floue de départ, afin de déterminer le noyau qui, convolué avec la première, donne la deuxième. Ceci fournit alors une première approximation du flou effectif affectant l'image dégradée.

3.1 Différents types de filtres de choc et leurs spécificités

Donnons tout d'abord la formulation générale de ces filtres⁷. Chacun présente des avantages et inconvénients propres que nous évoquons brièvement dans ce qui suit.

Un filtre de choc générique bidimensionnel définit, pour une image donnée $g(x,y)$, une classe d'images filtrées $\{u(x,y,t) | t \geq 0\}$ décrites par évolution de g suivant l'équation suivante :

$$u_t = -\phi(u_{\zeta\zeta}) |\nabla u| \quad (6.18)$$

$$u(x,y,0) = g(x,y), \quad (6.19)$$

dans laquelle les indices ζ représentent les dérivées partielles, ϕ est une fonction telle que $\phi(0) = 0$ et $\phi(s) \text{ sign}(s) \geq 0$, et ζ est la direction du gradient ∇u . Plus précisément, on a :

$$u_{\zeta\zeta} = \frac{1}{|\nabla u|^2} (u_x^2 u_{xx} + 2u_x u_y u_{xy} + u_y^2 u_{yy}). \quad (6.20)$$

La condition initiale (6.19) assure que le processus démarre en $t = 0$ avec l'image originale g .

Filtre de Osher-Rudin. Le filtre de choc d'Osher-Rudin (OR) [151] est formulé en considérant dans (6.19) la fonction $\phi(s) = \text{sign}(s)$. On arrive alors à l'expression

$$u_t = -\text{sign}(u_{\zeta\zeta}) |\nabla u|. \quad (6.21)$$

Si l'on considère un pixel qui se trouve dans la zone d'influence d'un maximum où $u_{\zeta\zeta}$ est négatif, alors

$$u_t = |\nabla u|, \quad (6.22)$$

6. Mais elle ne saurait cependant être sérieusement considérée elle-même comme une image restaurée, dans la mesure où ce type de filtre vise essentiellement le traitement des discontinuités, et ne permet en rien la reconstruction des textures et/ou zones homogènes en dehors de ces bords

7. Nous ne rentrons pas ici dans des considérations de discrétilisation des équations correspondantes, ni de leur résolution. On consultera à cette fin les références citées.

ce qui produit au temps t une dilatation avec un élément structurant [79] en forme de disque de rayon t . De même, dans la zone d'influence d'un minimum avec $u_{\zeta\zeta} < 0$, l'expression (6.21) devient

$$u_t = -|\nabla u| , \quad (6.23)$$

ce qui correspond à une érosion, également avec un élément structurant en forme de disque.

On constate donc que, quand le temps t augmente, le rayon de l'élément structurant croît, jusqu'à ce qu'il atteigne un zéro de $u_{\zeta\zeta}$, où la zone d'influence d'un minimum et d'un maximum se rencontrent. Les zéros de $u_{\zeta\zeta}$ servent donc ici de détecteur de bords, où un choc est produit afin de séparer des segments adjacents. Les processus d'érosion et de dilatation assurent que, dans un segment, l'image devienne constante par morceaux.

Bien que ce filtre puisse être efficace dans le cas où il vise à traiter des images non bruitées, la présence de bruit peut rendre son utilisation délicate, en raison d'une haute sensibilité, intrinsèque à cette méthode. Ceci peut donc mener à une utilisation inadaptée dans certaines situations concrètes, et il devra être réservée à une utilisation avec des données non bruitées.

Filtre de Alvarez-Mazorra. Le filtre de choc d'Alvarez-Mazorra (AM) [3] considère, lui, un couplage entre choc et diffusion [204], permettant une meilleure robustesse au bruit et autres petits détails d'échelle. La dérivée seconde de l'image est, pour cela, simplement convoluée avec un filtre passe-bas, ayant la forme d'une gaussienne Γ_σ d'écart-type σ . La formulation du filtre est alors donnée par :

$$u_t = -\text{sign}(\Gamma_\sigma * u_{\zeta\zeta}) |\nabla u| + c u_{\kappa\kappa} , \quad (6.24)$$

avec les mêmes notations que pour le filtre d'Osger-Rudin, et κ étant la direction perpendiculaire au gradient ∇u . Le terme $u_{\kappa\kappa}$ représente donc une diffusion de u dans la direction orthogonale à son gradient $|\nabla u|$. Sa présence a pour but de lisser u sur les deux côtés d'un bord, en lissant le moins possible le bord lui-même. Le compromis entre l'effet de cette diffusion anisotrope et celui du choc défini par le premier terme est contrôlé par la constante c .

Filtre de Gilboa-Sochen-Zeevi. Le filtre de choc de Gilboa *et al.* (GSZ) [76] est lui également basé sur un processus de diffusion, mais ce dernier est alors à valeurs complexes. La valeur imaginaire sert de détecteur robuste pour les bords, et permet donc un bon contrôle du bruit. Le filtre complexe permet d'éviter la nécessité de convoluer l'image à chaque itération en conservant des estimations lissées. Sa formulation s'écrit

$$u_t = -\frac{2}{\pi} \arctan \left(a \text{Im} \left(\frac{u}{\theta} \right) \right) |\nabla u| + c_1 u_{\zeta\zeta} + c_2 u_{\kappa\kappa} , \quad (6.25)$$

où $c_1 = r \exp(i\theta)$ est un scalaire complexe (avec θ petit), c_2 un scalaire réel, et Im la fonction de partie imaginaire d'un complexe.

Exemples. La Fig. 6.4 illustre deux images floues initiales, sans et avec bruit blanc gaussien ($\sigma = 20$). La Fig. 6.5 montre, elle, ces images floues traitées par les trois différents filtres de choc (« choquées »), dont nous avons présenté le principe ci-dessus. On aperçoit effectivement dans chacun des cas un rehaussement incontestable des contours de l'image, qui apparaissent nets. En revanche, comme nous l'avions dit, rien en dehors des discontinuités n'est reconstruit. Néanmoins, on peut penser que la localisation de ces bords

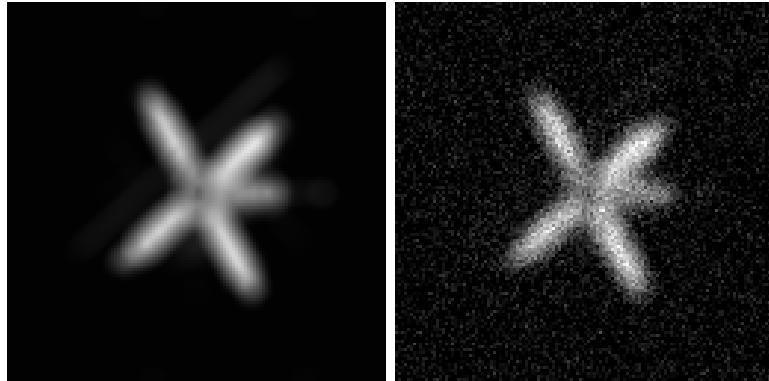


FIGURE 6.4 – Image *Satellite* floue sans ajout de bruit (g.), et avec ajout de bruit blanc gaussien d'écart-type $\sigma = 20$ (d.).

rehaussés correspond à celle des bords de l'image nette que l'on cherche à reconstruire. Disposant de g et de l'approximation de référence g^r de f obtenue par filtrage de choc, nous pouvons donc en déduire une approximation h^r de h , comme proposé par Money et Kang dans [135]. Nous verrons dans la Section 3.2 ci-dessous plus en détails comment.

Si l'on regarde de plus près ce qu'il ressort de chaque filtre, dans le premier cas (sans ajout de bruit), on peut supposer que le filtre d'Alvarez-Mazorra serait le mieux à même d'être utilisé pour une estimation du flou h , dans la mesure où ce filtre fait bien ressortir les contours, tout en lissant fortement l'image. En revanche, dans le cas avec ajout de bruit, c'est le filtre de Gilboa *et al.* qui semble le plus adéquat. En effet, les autres filtres n'arrivent pas suffisamment à lisser le niveau de bruit considéré.

3.2 Estimation du flou à partir d'une image choquée

Nous présentons ici l'approche que nous utilisons afin de déterminer les valeurs approximatives du ou des paramètres intrinsèques de noyaux de défocalisation et de mouvement uniforme affectant une image floue. Cette approche ne requiert que cette dernière image floue, en sus de son homologue traitée par filtrage de choc.

3.2.1 Cas monochrome

Après avoir utilisé un filtre de choc sur une image dégradée g , on obtient une image dite de « référence » g^r . À partir des deux images, on peut calculer une estimation h_{Ξ}^r du noyau réel h_{Ξ} , en utilisant un schéma de déconvolution simple, tel qu'une méthode des moindres carrés. Le problème à résoudre correspondant s'écrit alors :

$$\min_{\Xi} \frac{1}{2} \|h_{\Xi}^r * g^r - g\|_{L^2}^2, \quad (6.26)$$

où Ξ représente l'ensemble des paramètres caractérisant le noyau.

Pour une défocalisation, nous n'avons qu'un paramètre ρ à estimer, ce qui réduit (6.26) à

$$\min_{\rho} \frac{1}{2} \|h_{\rho} * g^r - g\|_{L^2}^2. \quad (6.27)$$

Bien évidemment, et nous y reviendrons brièvement plus loin (cf. Section 7), l'approche peut également être utilisée dans le cas plus général d'un noyau non-paramétrique, pour

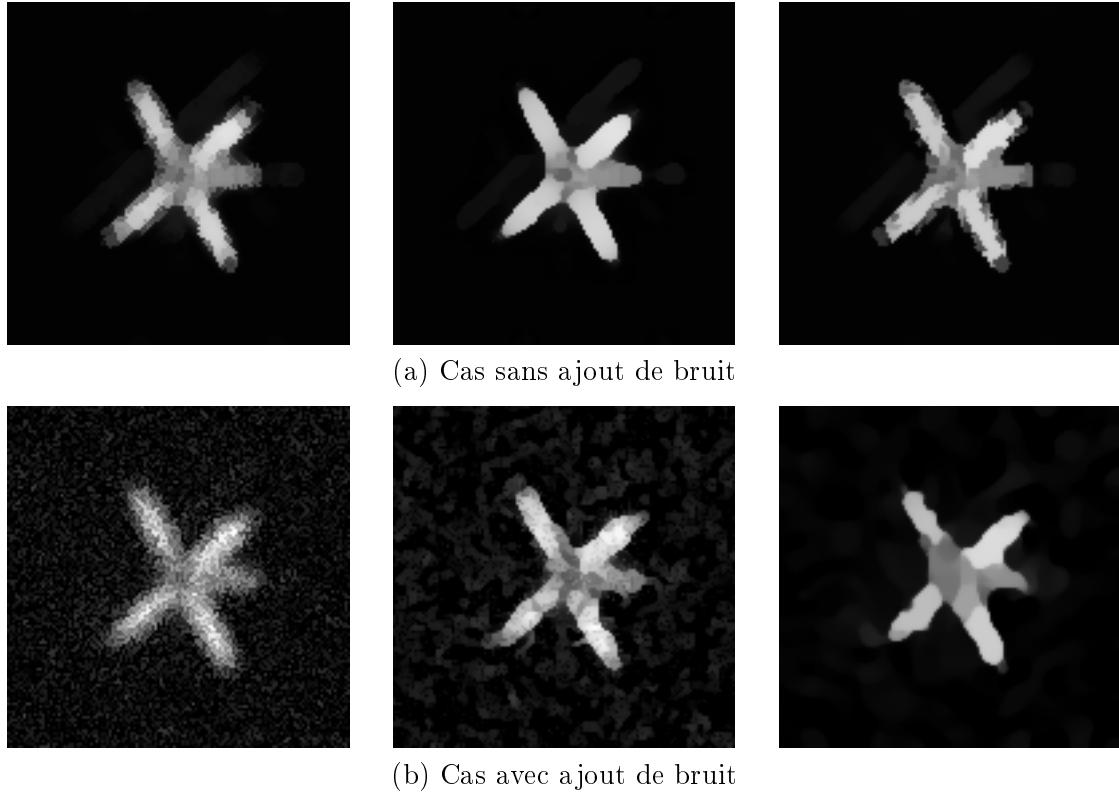


FIGURE 6.5 – Exemple de filtrage de choc par les techniques respectives OR, AM et GSZ, sur l'image *Satellite*, sans, et avec ajout de bruit ($\sigma = 20$).

lequel on doit alors résoudre sur h le problème

$$\min_h \frac{1}{2} \|h * g^r - g\|_{L^2}^2. \quad (6.28)$$

Néanmoins, dans ce cas, l'estimée de h peut théoriquement être bruitée, ou présenter des artefacts, vu l'absence de contrainte forte telle que la paramétrisation. On devra alors envisager d'ajouter ici une régularisation sur h .

La résolution de (6.27) se fait via la condition d'Euler ; celle-ci donne :

$$\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \rho} = \int_{\Omega} (h_{\rho} * g^r - g) \left(\frac{\partial h_{\rho}}{\partial \rho} * g^r \right), \quad (6.29)$$

où

$$\frac{\partial h_{\rho}}{\partial \rho} = \begin{cases} \frac{-2}{\pi \rho^3} & \text{si } \sqrt{x^2 + y^2} \leq \rho \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} . \quad (6.30)$$

De manière discrète, on obtient donc

$$\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \rho} = \sum_{i,j \in \Omega} (h_{\rho} * g^r - g) \left(\frac{\partial h_{\rho}}{\partial \rho} * g^r \right)_{i,j} = 0. \quad (6.31)$$

Il s'agit, comme pour (6.14), d'une simple équation numérique à une variable, qu'on résout via une technique de type dichotomie⁸.

8. Nous avons utilisé en pratique la fonction Matlab® `fzero`.

En revanche, si le flou à estimer après le filtrage de choc est un noyau de mouvement, il nous faut alors considérer la minimisation

$$\min_{l,\theta} \frac{1}{2} \|h_{l,\theta} * g^r - g\|_{L^2}^2. \quad (6.32)$$

Ici, il n'est pas possible d'utiliser les conditions d'Euler de manière homologue au cas de la défocalisation. En effet, la condition portant sur θ , soit $\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \theta}$, ne s'exprime pas facilement, étant donné que l'expression $h_{l,\theta}$ ne dépend pas explicitement de θ . Nous devons donc utiliser ici un schéma d'optimisation numérique multivariable⁹.

3.2.2 Cas couleur

Pour le cas d'une image couleur affectée par un flou de défocalisation, l'estimation d'un noyau de référence h^r via filtrage de choc nous amène à traiter le problème de minimisation sur ρ

$$\min_{\rho} \mathcal{J}(h_{\rho}) = \min_{\rho} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \|h_{\rho} * g_i^r - g_i\|_{L^2}^2, \quad (6.33)$$

où i est l'indice des différents canaux couleurs. La condition d'Euler résultante sur ρ est alors

$$\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \rho} = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^3 (h_{\rho} * g_i^r - g_i) \left(\frac{\partial h_{\rho}}{\partial \rho} * g_i^r \right) = 0, \quad (6.34)$$

où, comme pour le cas monochrome,

$$\frac{\partial h_{\rho}}{\partial \rho} = \begin{cases} \frac{-2}{\pi \rho^3} & \text{si } \sqrt{x^2 + y^2} \leq \rho \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}. \quad (6.35)$$

Pour un flou de mouvement, ce même problème de minimisation devient

$$\min_{l,\theta} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \|h_{l,\theta} * g_i^r - g_i\|_{L^2}^2, \quad (6.36)$$

et ne peut être résolu en passant par les conditions d'Euler, pour la même raison que dans le cas monochrome. On utilise donc également pour sa résolution un schéma d'optimisation numérique multivariable.

4 Identification précise du flou par extrémisation du kurtosis

On a vu dans ce qui précède comment obtenir, à partir d'une image floue, une première estimation des paramètres intrinsèques du noyau de flou affectant une image, en utilisant la technique du filtrage de choc. À partir de cette estimation, en général relativement grossière, on peut déterminer plus facilement les valeurs précises de ces paramètres intrinsèques. C'est ce que l'on présente dans ce qui suit.

Une méthode rapide d'identification des paramètres d'un noyau de flou a été proposée par Li *et al.* dans [116]. Cette approche se base sur l'utilisation de la statistique d'ordre supérieur appelée *kurtosis*, et a été présentée dans notre état de l'art¹⁰. Cette statistique

9. La définition de telles méthodes ne relevant pas directement de notre propos, nous avons à cette fin utilisé la fonction `fmincon` de Matlab®. Celle-ci se base par défaut sur un algorithme de type « région de confiance » [54].

10. Chapitre 2, Section 2.1.5, p. 31.

a également été utilisée dans d'autres travaux de déconvolution aveugle, tels que [216]. Le principe de base est d'étudier les variations du kurtosis de l'image restaurée en fonction de la valeur des paramètres intrinsèques du flou. On fait donc varier ces paramètres, et on examine le kurtosis de l'image restaurée. C'est ce qu'ont fait Li *et al.* dans le cas de noyaux gaussiens. Nous y reviendrons plus loin.

On rappelle que cette caractéristique permet de mesurer l'importance du caractère lisse ou non d'une image, sa « pointicité » (angl. *peakedness*), et qu'elle est définie, pour une variable aléatoire X , par

$$k(X) = \frac{\mathbb{E}(X - \mu)^4}{\sigma^4}, \quad (6.37)$$

où μ est la moyenne de X , σ son écart-type, et \mathbb{E} la fonction d'espérance mathématique.

Si X suit une distribution de probabilité gaussienne, on a $k = 3$. Ce type de distribution est caractérisé par une queue de longueur modérée, et est qualifiée de « mésokurtique ». Dans la pratique, il est assez improbable de la rencontrer.

De même, on appelle distribution « platykurtique » une distribution dans laquelle la plupart des valeurs ont à peu près la même probabilité d'occurrence. La courbe représentant une telle distribution est plutôt plate, et possède une queue relativement courte. Ceci est par exemple le cas pour des distributions uniformes, pour lesquelles le kurtosis présente alors une valeur $k < 3$. Pour ce type de distribution, plus élevé est le kurtosis, et plus lisse est la donnée X . Inversement, et par conséquence, plus une image floue est rendue nette, et plus la valeur de son kurtosis diminue. Une image platykurtique à pointicité « optimale » implique donc un kurtosis minimal.

Enfin, une distribution présentant une longue queue sera qualifiée de « leptokurtique », et exhibera des valeurs de kurtosis $k > 3$. À contrario des images platykurtiques, plus une image leptokurtique présente une valeur de kurtosis élevée, moins lisse est la réalisation de la variable X . Et donc, plus une telle image est rendue nette, et plus son kurtosis augmente. À une image leptokurtique déflouée correspond donc un kurtosis maximal.

Nous avons choisi d'utiliser cette caractéristique de la même façon que Li *et al.*, mais en l'étendant à des flous de défocalisation et de mouvement rectiligne, et à des images autant platykurtiques que leptokurtiques. Le problème de leur approche est que la recherche du (ou des) paramètre(s) doit se faire à l'intérieur d'un espace Ω de taille « raisonnable ». Seulement, en l'absence d'indication sur la valeur effective de ces paramètres, il est bien délicat de définir un tel espace. Et ce d'autant plus que sa taille pourra rapidement devenir considérable en présence d'un noyau à plusieurs paramètres intrinsèques, comme c'est le cas pour le mouvement rectiligne.

C'est donc ici qu'intervient notre estimation paramétrique par filtrage de choc, puisque celle-ci nous fournit alors une première valeur de référence des paramètres intrinsèques, raisonnablement proche de leur valeur réelle. Il nous suffit alors de nous placer dans un intervalle autour de cette estimation, et d'étudier les variations du kurtosis de l'image restaurée en utilisant le noyau caractérisé par les valeurs des paramètres situées dans cet intervalle, ceci afin de déterminer l'extremum du kurtosis. Si l'estimation de départ obtenue par le filtre de choc est effectivement pertinente, alors on peut supposer que la valeur recherchée est relativement proche, et un extremum du kurtosis devrait y correspondre. Selon que l'on traitera d'une image platykurtique ou leptokurtique, on

recherchera respectivement le minimum ou le maximum du kurtosis.

On va donc effectuer, dans un intervalle autour des valeurs de référence des paramètres caractérisant le noyau - ces valeurs étant obtenues via filtrage de choc - une restauration avec une méthode rapide, en l'occurrence le filtre de Wiener¹¹, en considérant un flou défini par les valeurs dans cet intervalle. On mesurera ensuite à chaque fois la pointicité de l'image restaurée, en se basant sur la valeur exhibée par son kurtosis. Un extremum (minimum ou maximum suivant la distribution des valeurs de gris de l'image) de celui-ci indiquera que nous sommes en présence probable de la valeur effective des paramètres intrinsèques.

Une fois le noyau de flou précisément caractérisé par ses paramètres, on peut alors l'utiliser dans un schéma de déconvolution à noyau connu plus performant que le filtre de Wiener, par exemple une technique variationnelle avec régularisation à prise en compte des discontinuités. Néanmoins, en présence d'une incertitude sur l'estimation obtenue, on pourra envisager dans cette technique variationnelle non plus un problème de minimisation de type moindres carrés $\|h * f - g\|_{L^2}$, mais de minimisation de moindre norme L^1 : $\|h * f - g\|_{L^1}$, que certains auteurs ont annoncé être plus adapté au traitement de données incertaines ou contenant des valeurs aberrantes (angl. *outliers*), en l'occurrence l'estimation du noyau ici. Nous rentrons plus en détails dans ce sujet dans la section suivante.

5 Gestion des incertitudes via fidélité aux données en norme L^1

Les modèles variationnels de restauration d'image à flou connu considèrent quasi systématiquement des termes de fidélité aux données $\Phi(g - h * f)$ quadratiques, c'est-à-dire en norme L^2 :

$$\min_f \mathcal{J}(f) = \min_f \frac{1}{2} \|h * f - g\|_{L^2}^2 + \alpha_1 \mathcal{R}_1(f). \quad (6.38)$$

À ceci, nous voyons deux raisons principales : d'une part, la présence quasi-exclusive dans les images traitées de bruit pouvant être assimilé à une distribution gaussienne, pour lequel ces schémas de type moindres carrés sont performants, d'autre part simplement pour des raisons de plus grande facilité de manipulation et de mise en œuvre par rapport à des opérateurs non-quadratiques potentiels. Néanmoins, nous avions montré dans notre état de l'art que ceux-ci existent et commencent à être de plus en plus utilisés¹².

Welk *et al.* [207] ont proposé une approche utilisant une norme L^1 sur le terme de fidélité aux données, dans le but de gérer l'incertitude qu'il peut y avoir quant à la connaissance disponible du flou. Notons que ceci est également utilisé dans d'autres travaux, par exemple en présence de bruit de type impulsif dans les images à traiter [12].

Nous proposons d'utiliser un tel modèle de restauration dans la mesure où l'estimation de la valeur des paramètres qui est obtenue après utilisation de la technique d'extrémisation du kurtosis peut ne pas être parfaite. Nous comparerons cependant ce modèle à son homologue à fidélité aux données quadratique, afin de nous rendre réellement

11. En pratique, via la fonction Matlab® `deconvwnr`.

12. Cf. Chapitre 2, Section 2.2.1, p. 33.

compte de la pertinence ou non d'un tel choix dans notre cas.

Revenons sur la fonctionnelle à minimiser dans le cadre d'un terme de fidélité en norme L^1 , soit non-quadratique, avec une régularisation TV. Cette fonctionnelle mène au modèle

$$\min_f \mathcal{J}(f) = \min_f \|h * f - g\|_{L^1} + \alpha_1 \int_{\Omega} |\nabla f| \quad (6.39)$$

$$= \min_f \int_{\Omega} |h * f - g| + \alpha_1 \int_{\Omega} |\nabla f|. \quad (6.40)$$

Pour sa minimisation, nous passons, comme pour le cas L^2 , par l'écriture des conditions d'Euler :

$$\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial f} = \frac{h * f - g}{|h * f - g|} * h^{\otimes} - \alpha_1 \operatorname{div} \left(\frac{\nabla f}{|\nabla f|} \right) = 0. \quad (6.41)$$

Cette dernière équation peut être résolue par un schéma itératif de point fixe en f modifié, d'après celui mis en œuvre avec fidélité quadratique dans les chapitres précédents, et comme utilisé dans [135] :

$$\frac{(h * f_{l+1} - g)}{|h * f_l - g|} * h^{\otimes} - \alpha_1 \operatorname{div} \left(\frac{\nabla f_{l+1}}{|\nabla f_l|} \right) = 0. \quad (6.42)$$

6 Expérimentations

Dans ce qui suit, nous allons fournir plusieurs expérimentations tendant à illustrer la pertinence de l'approche envisagée. Nous envisagerons dans un premier temps le cas monoparamétrique des noyaux de défocalisation, pour des images en couleur. Nous donnerons à chaque fois la valeur du paramètre estimé via l'utilisation des différents filtres de choc appliqués à l'image dégradée ; ceci permettant de définir une plage de valeurs possibles du paramètre à identifier. Puis, nous présenterons la variation du kurtosis des images restaurées par filtrage de Wiener, en utilisant des valeurs du paramètre comprises dans cette plage de valeurs. Ceci permettant alors d'extraire l'extremum global correspondant au paramètre du flou de défocalisation affectant l'image considérée. Enfin, à partir de ce noyau finalement estimé, on proposera une restauration variationnelle avec une régularisation TV, en considérant deux cas possibles pour le terme de fidélité aux données $\Phi(h * f - g)$: en norme L^2 , façon « traditionnelle », et en norme L^1 , afin de déterminer si celle-ci est en mesure d'apporter un bénéfice au vu de l'erreur potentielle sur le rayon du noyau utilisé, déterminé par extrémisation du kurtosis.

Dans un deuxième temps, nous étendrons cette approche aux noyaux biparamétriques de mouvement rectiligne, tout d'abord sur une image monochrome, puis sur une image en couleur. On verra alors que l'on obtient également dans ces cas là des résultats très satisfaisants.

6.1 Tests sur des images affectées par un flou de défocalisation

Premier test. Nous effectuons un premier test sur l'image *Lena* en couleur, dégradée par un noyau de paramètre $\rho = 4$, sans ajout de bruit, soit avec $\sigma = 0$. Cette image est de taille 128×128 pixels, et est présentée en Fig. 6.6.

Les images choquées avec les trois filtres envisagés sont présentées à titre indicatif en Fig. 6.7. Une chose importante est ici à préciser, et qui est nettement visible sur l'image issue du filtre d'Alvarez-Mazorra : des aberrations chromatiques se produisent le long des

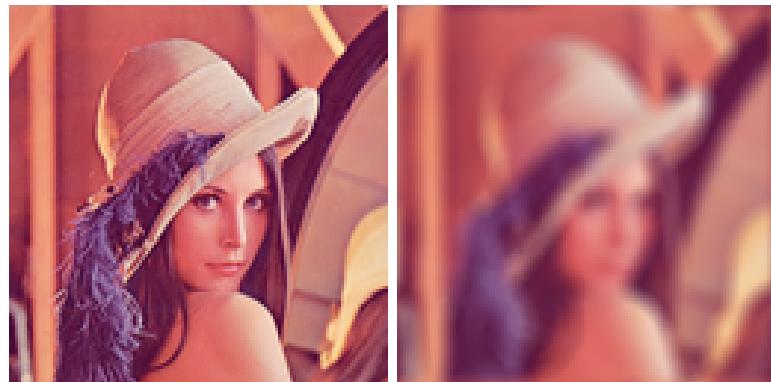


FIGURE 6.6 – Image *Lena* originale, et image défocalisée par un noyau de rayon $\rho = 4$, sans ajout de bruit.



FIGURE 6.7 – Image *Lena* défocalisée (Fig. 6.6) après filtrage de choc de type respectif : OR, AM et GSZ.

discontinuités, ceci traduisant un défaut d’alignement des canaux couleurs. La cause de ceci est que le filtre de choc est une technique qui n’existe à l’heure actuelle que pour des images à niveaux de gris, et que, dans le cas couleur, nous sommes contraints de l’appliquer indépendamment canal par canal. Il n’est alors pas exclu que la précision du rayon qui sera estimé par (6.33), reposant intrinsèquement sur les discontinuités identifiées dans l’image, soit affectée par cette limitation.

Les résultats de pré-estimation du paramètre de défocalisation ρ par filtrage de choc, suivant la technique exposée en Section 3.2, sont donnés dans le Tab. 6.1. On s’aperçoit que les estimations $\tilde{\rho}$ données par les filtres d’Alvarez-Mazorra (AM) et de Gilboa-Sochen-Zeevi (GSZ) sont les meilleures ; celle donnée via le filtre d’Osher-Rudin (OR) étant entachée d’une erreur bien plus importante.

Nous utilisons alors la procédure de raffinement de ces valeurs du paramètre du noyau obtenu via les filtres de choc, par extrémisation du kurtosis de l’image restaurée. L’image étant platykurtique¹³, on cherche donc un minimum du kurtosis. Ceci est illustré en Fig. 6.8 (a) et (b), pour lesquelles l’intervalle d’investigation a été centré, de une, sur la valeur donnée par le filtre d’Osher-Rudin, et de deux, sur celle donnée par le filtre d’Alvarez-Mazorra. On a l’illustration typique de l’importance de pouvoir disposer d’une valeur de départ de ρ , ou d’un intervalle de recherche, relativement bons : alors que dans

13. Soit de kurtosis $k < 3$, ce qu’on obtient par un simple calcul sur l’image floue donnée.

Filtre	Rayon estimé	Erreur sur ρ (%)
OR	2,42	39,75
AM	4,79	19,74
GSZ	3,23	19,20
Moyenne	3,48	12,99

TABLEAU 6.1 – Rayon de défocalisation identifié sur l’image *Lena* floue, via les trois filtres de choc (valeur réelle : $\rho = 5$).

Norme de fidélité	L^1	L^2
$\alpha = 2 \cdot 10^{-1}$	27,55	27,58
$\alpha = 5$	30,05	30,01

TABLEAU 6.2 – PSNR (dB) de l’image *Lena* restaurée en fonction de la valeur choisie pour le paramètre de régularisation et de la norme de fidélité aux données utilisée, après identification du paramètre de flou par extrémisation du kurtosis.

l’intervalle $[\tilde{\rho} - 50\%; \tilde{\rho} + 50\%]$ ¹⁴ un minimum apparaît bien clairement dans le deuxième cas (AM), il n’en est rien du premier (OR), pour lequel l’estimation de départ n’est pas suffisamment fiable.

De ceci, on extrait un minimum unique, correspondant à un paramètre de défocalisation identifié à $\rho = 3,95$. Ceci étant tout à fait en accord avec la valeur réelle considérée de $\rho = 4$.

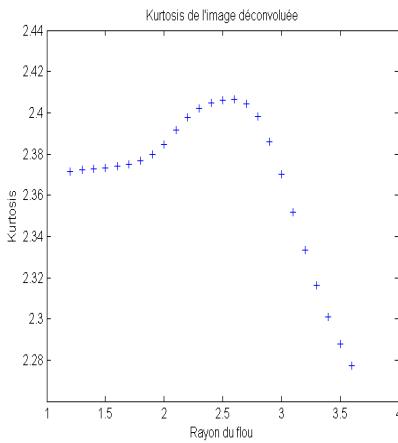
On peut alors envisager une restauration avec un schéma plus efficace qu’un filtre de Wiener. Il est à mettre en exergue ici qu’une régularisation est alors totalement nécessaire. Ceci en raison du fait que le noyau identifié comporte une erreur de mesure. Une simple restauration par filtrage inverse mènerait immanquablement à des phénomènes de suroscillation (angl. *ringing*) et apparition d’autres d’artefacts indésirables qu’il convient d’éviter.

Ces essais de restauration sont montrés sur les autres graphiques de la Fig. 6.8. On a ici utilisé la minimisation de (6.38) (avec $\mathcal{R}_1(f) = \text{TV}(f)$) et de (6.40), suivant deux valeurs du paramètre de régularisation α : $\alpha = 2 \cdot 10^{-1}$ et $\alpha = 5$. Globalement, la qualité obtenue avec chacun des termes L^1 et L^2 d’attache aux données est très similaire, comme cela peut se voir par la mesure des PSNR illustrée en Tab. 6.2.

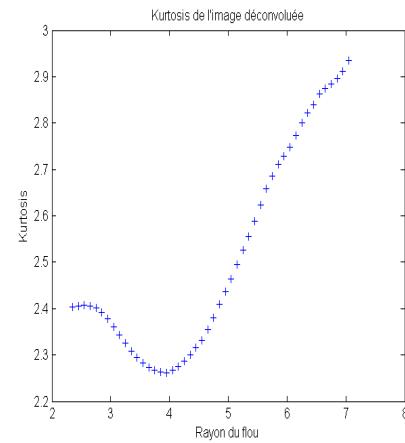
Deuxième test. Nous nous intéressons maintenant au cas de l’image platykurtique *Nid de cailloux* que nous avons utilisée dans les chapitres précédents pour les tests impliquant une défocalisation, c’est-à-dire avec un rayon $\rho = 5$. Nous avons considéré cette image dans les deux cas monochrome et couleur.

Commençons par examiner le cas dans lequel nous n’ajoutons pas de bruit. En Fig. 6.9 sont exhibées les images couleur obtenues après traitement par les trois filtres de choc. La même démarche de filtrage de choc a été effectuée sur les mêmes images en niveaux de gris, ceci afin de pouvoir déterminer expérimentalement par la suite dans quelle mesure la couleur, et surtout le non-couplage des canaux couleurs, pouvait avoir une influence sur

14. Soit sur l’intervalle $[\tilde{\rho} - \frac{50\tilde{\rho}}{100}; \tilde{\rho} + \frac{50\tilde{\rho}}{100}]$.



(a) OR



(b) AM


 (c) Fidélité L^2 , $\alpha = 2.10^{-1}$

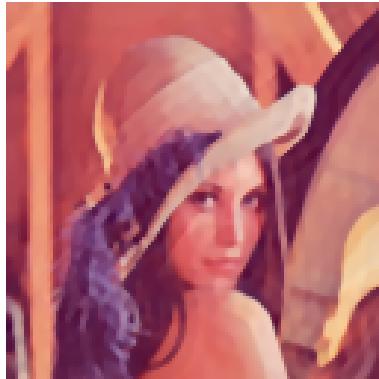
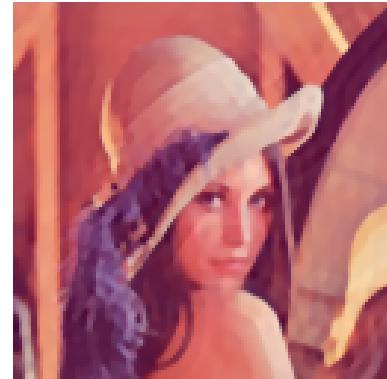
 (d) Fidélité L^1 , $\alpha = 2.10^{-1}$

 (e) Fidélité L^2 , $\alpha = 5$

 (f) Fidélité L^1 , $\alpha = 5$

FIGURE 6.8 – (a)-(b) Variation du kurtosis de l'image *Lena* déflouée, autour des valeurs de ρ fournies via deux filtres de choc (cf. Tab. 6.1). (c)-(f) Images restaurées par modèle TV, après estimation du paramètre de défocalisation par filtrage de choc et raffinement par minimisation du kurtosis ($\tilde{\rho} = 3,95$).



FIGURE 6.9 – Image *Nid de cailloux* défocalisée, après filtrage de choc de type respectif : OR, AM, et GSZ.

Filtre	Rayon estimé	Erreur sur ρ (%)
OR	4,32	13,62
AM	8,96	79,17
GSZ	5,43	8,55
Moyenne	6,23	24,6

TABLEAU 6.3 – Rayon de défocalisation identifié sur l'image *Nid de cailloux* monochrome floue, via les trois filtres de choc (valeur réelle : $\rho = 5$).

la valeur ρ estimée par cette procédure.

À partir de ces images aux contours rehaussés, nous avons obtenu des estimations différentes de ρ , qui sont données dans le Tab. 6.3 pour le cas monochrome, et le Tab. 6.4 pour le cas couleur (sans, et avec ajout de bruit blanc gaussien, tel que $\sigma = 6$).

Ce qu'il ressort tout d'abord des données de ces tableaux est qu'il n'y a pas de différence majeure entre les estimées de ρ issues des trois filtres de choc pour l'image monochrome, et les estimées obtenues de manière homologue pour l'image couleur. Les taux d'erreurs se trouvent dans une fenêtre très proche. Notre questionnement concernant l'influence des petites aberrations chromatiques présentes sur les images couleur choquées, aberrations dues au non-couplage des canaux dans les filtres de choc, n'a donc pas lieu d'être ici¹⁵.

15. Ceci ne voulant cependant pas dire que ce fait puisse être généralisé à tous les cas. Néanmoins, on peut raisonnablement penser pour la suite que ce non-couplage des canaux du filtrage de choc n'est pas d'une importance primordiale dans l'estimation des paramètres des noyaux.

Bruit	$\sigma = 0$		$\sigma = 6$		
	Filtre	Rayon estimé	Erreur sur ρ (%)	Rayon estimé	Erreur sur ρ (%)
	OR	4,33	13,4	1,70	66
	AM	8,95	79,0	7,68	53,6
	GSZ	5,58	11,6	5,09	1,8
	Moyenne	6,29	25,8	4,82	40,47

TABLEAU 6.4 – Rayons de défocalisation identifiés sur l'image *Nid de cailloux* couleur floue, via les trois filtres de choc (valeur réelle : $\rho = 5$).

En Fig. 6.10, nous avons représenté les variations du kurtosis de l'image couleur restaurée par le filtre de Wiener, avec un ensemble de noyaux présentant des valeurs de ρ comprises dans un intervalle centré sur l'estimation donnée par les trois filtres de choc, estimation que nous avions fournie dans le Tab. 6.4 évoqué précédemment. Sur la colonne de gauche figure le cas sans ajout de bruit, et dans celle de droite, celui avec ajout de bruit. Ceci permet de mettre en évidence l'influence de ce dernier sur la recherche du paramètre de défocalisation. L'image considérée étant platykurtique, on recherche le minimum du kurtosis. Comme constaté jusqu'ici, il apparaît clairement que l'utilisation du filtre d'Osher-Rudin doit être proscrite en présence de bruit important, l'estimation obtenue du niveau de flou étant alors largement sous-évaluée, et rendant délicate la recherche du minimum du kurtosis. L'estimation initiale via le filtre d'Alvarez-Mazorra est trop grande, mais un minimum du kurtosis à $\rho = 5,15$ est cependant visible dans les deux cas sans, et avec bruit. Pour le filtre de Gilboa-Sochen-Zeevi, on observe une (très) bonne estimation initiale dans les deux cas, et un minimum à $\rho = 5,15$ est donc également bien visible dans la procédure de balayage du kurtosis.

Nous obtenons donc une valeur de défocalisation identifiée de $\rho = 5,15$, ceci en accord avec la valeur réelle $\rho = 5$ utilisée. Les images - initialement ne contenant pas d'ajout de bruit - restaurées avec ce noyau sont présentées en Fig. 6.11, et ont été - de même que précédemment - obtenues en utilisant le schéma de restauration variationnel avec régularisation TV, à normes L^1 et L^2 pour le terme de fidélité aux données. On a pris pour le réglage du paramètre de régularisation deux possibilités : $\alpha = 1$, de même que $\alpha = 10^{-1}$, ceci afin d'illustrer son influence.

De toute évidence, ici non plus, l'intérêt de l'utilisation d'une norme L^1 pour le terme d'attache aux données n'apparaît pas réellement. C'est clairement davantage la régularisation qui joue un rôle décisif, plutôt que l'utilisation d'un terme de fidélité non-quadratique, pour pallier les oscillations de bord induites par l'erreur sur le noyau utilisé par rapport au noyau original.

6.2 Tests sur des images affectées par un flou de mouvement

Nous testons maintenant notre approche avec un flou de mouvement linéaire uniforme, soit un noyau biparamétrique. Le fait d'avoir à estimer deux paramètres rend encore bien davantage important le fait de pouvoir disposer d'une première approximation, via filtrage de choc, qui soit la plus précise possible. Ceci afin que les combinaisons de valeurs à tester par la suite, dans la phase d'optimisation du kurtosis, ne soient pas en nombre trop élevé, ce qui résulterait en des temps de calculs prohibitifs.

6.2.1 Cas monochrome

Commençons par réexaminer le cas de l'image monochrome *Nid de cailloux*. Nous considérons une dégradation avec le noyau de mouvement de caractéristiques $l = 11$, et $\theta = 45^\circ$. On n'ajoute pas de bruit dans un premier temps.

Le Tab. 6.5 donne les résultats d'identification des deux paramètres du flou via les filtres de choc, suivant la minimisation (6.32). Le plus mauvais résultat est donné par le filtre d'Osher-Rudin (OR), qui sous-estime la valeur réelle de la longueur des supports, comme celle des rayons dans le cas précédent de la défocalisation. Le filtre d'Alvarez-Mazorra (AM) donne la meilleure estimation, avec une erreur inférieure à 10% sur les deux paramètres, tandis que celle commise par le filtre de Gilboa-Sochen-Zeevi (GSZ) tourne

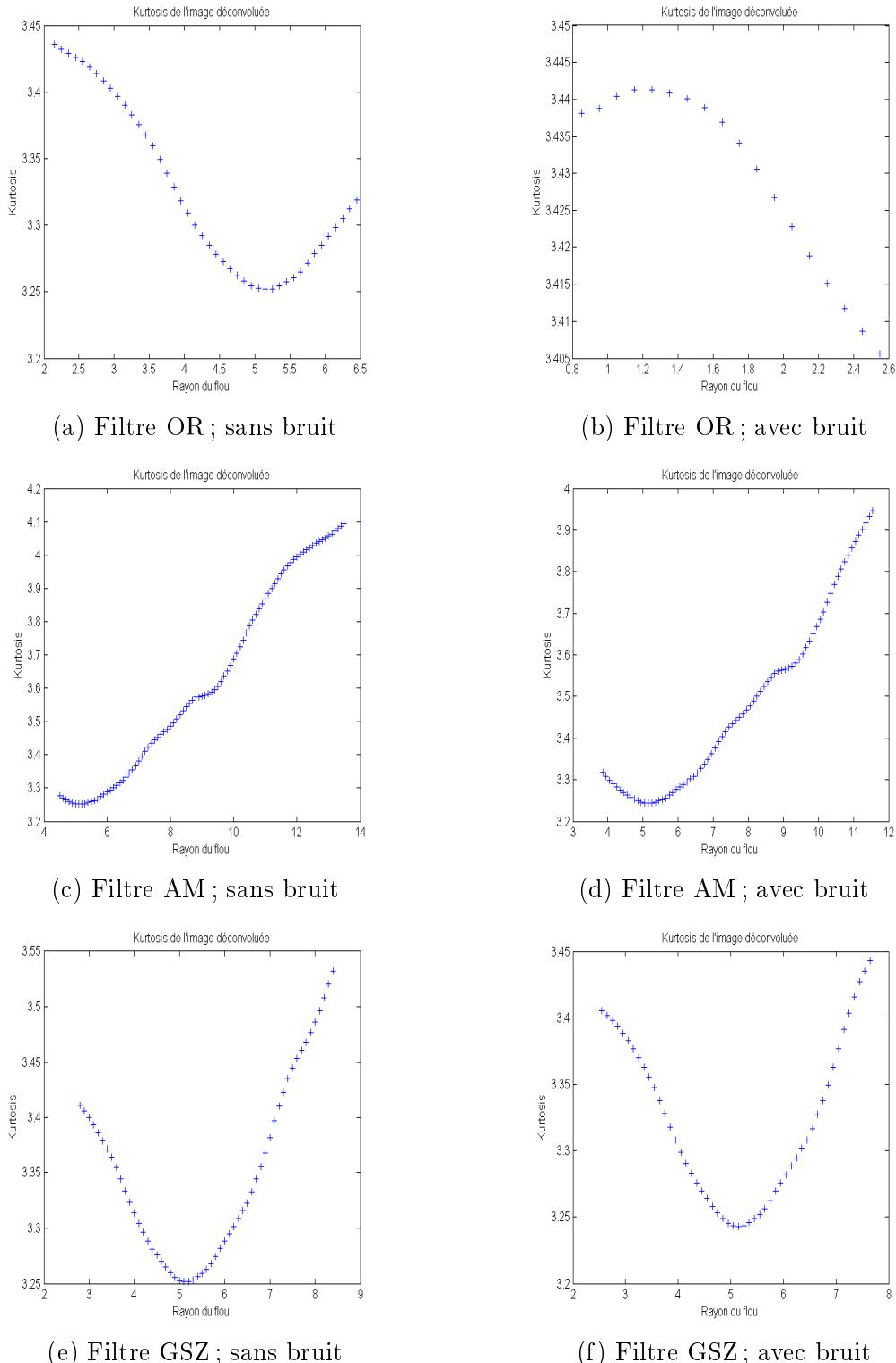


FIGURE 6.10 – Variation du kurtosis de l'image couleur *Nid de cailloux* déflouée, autour des valeurs de ρ fournies via les trois filtres de choc, pour les cas sans et avec ajout de bruit (cf. Tab. 6.4).



(a) Fidélité L^2 , $\alpha = 1$



(b) Fidélité L^1 , $\alpha = 1$



(c) Fidélité L^2 , $\alpha = 10^{-1}$



(d) Fidélité L^1 , $\alpha = 10^{-1}$

FIGURE 6.11 – Image *Nid de cailloux* restaurée par modèle TV, après estimation du paramètre de défocalisation par filtrage de choc et raffinement par minimisation du kurtosis ($\tilde{\rho} = 5,15$).

Filtre	Longueur l (pix.)	Erreur sur l (%)	Angle θ (deg.)	Erreur sur θ (%)
OR	6,48	41,09	42,09	6,47
AM	10,21	7,18	42,59	5,36
GSZ	9,30	15,45	51,78	15,06
Moyenne	8,66	21,22	45,48	1,07

TABLEAU 6.5 – Longueur et angle de flou de mouvement identifiés sur l'image *Nid de cailloux* monochrome floue sans ajout de bruit, via les trois filtres de choc (valeurs réelles : $l = 11$, $\theta = 45^\circ$).

Filtre	Longueur l (pix.)	Erreur sur l (%)	Angle θ (deg.)	Erreur sur θ (%)
OR	3,03	72,45	50,92	13,16
AM	11	0	59,47	32,16
GSZ	8,34	24,18	28,26	37,2
Moyenne	7,45	32,27	46,3	2,89

TABLEAU 6.6 – Longueur et angle de flou de mouvement identifiés sur l'image *Nid de cailloux* monochrome floue avec ajout de bruit ($\sigma = 10$), via les trois filtres de choc (valeurs réelles : $l = 11$, $\theta = 45^\circ$).

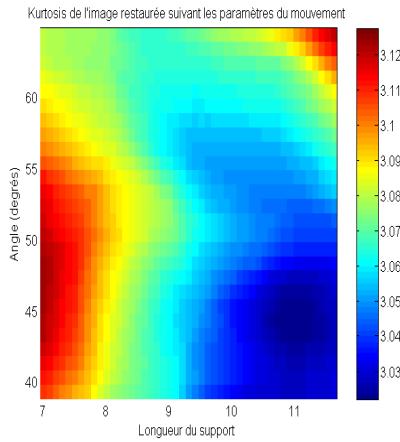
autour de 15%.

Ensuite, nous appliquons la procédure de raffinement du noyau obtenu, par minimisation du kurtosis des images restaurées, en testant les combinaisons de paramètres de l'ensemble $[\tilde{l} - 50\%; \tilde{l} + 50\%] \times [\tilde{\theta} - 50\%; \tilde{\theta} + 50\%]$, où les \tilde{l} et $\tilde{\theta}$ sont les estimées par filtre de choc. Ceci est illustré en (a) de la Fig. 6.12, et les valeurs des paramètres induisant un minimum dans la variation du kurtosis sont $l = 10,98$ et $\theta = 44,85^\circ$, soit des estimations de grande qualité.

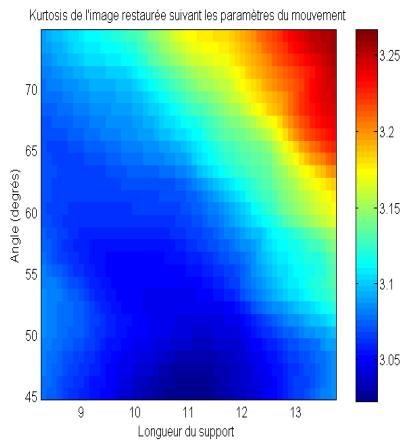
Celles-ci permettent d'arriver aux restaurations avec régularisation TV présentées en Fig. 6.13 (a)-(d). Pour obtenir ces images, on a considéré deux valeurs du paramètre de régularisation : $\alpha = 10^{-1}$ et $\alpha = 10^{-2}$. Encore une fois, aucune différence majeure visible ne se fait jour entre l'utilisation d'une norme L^1 ou L^2 pour la fidélité aux données dans le schéma variationnel de restauration.

Le même cas est repris, avec ajout d'un (fort) bruit blanc gaussien d'écart-type $\sigma = 10$. Les résultats d'estimation des paramètres l et θ par filtrage de choc sont synthétisés dans le Tab. 6.6. Les variations du kurtosis des restaurations par filtre de Wiener sont elles représentées en (b) et (c) de la Fig. 6.12, qui illustrent une recherche centrée sur l'estimée donnée par le filtre AM (pour laquelle le minimum est tout juste dans l'intervalle étudié), et sur les valeurs réelles des paramètres. On obtient alors une identification à peine moins précise que pour le cas sans ajout de bruit, et ce, $l = 11,05$ et $\theta = 44,78^\circ$.

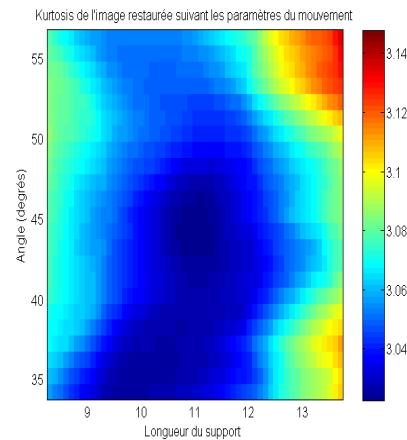
Des tentatives de restauration TV ont ensuite été faites, en réglant le paramètre de régularisation à $\alpha = 10$, ce qui est illustré en Fig. 6.13 également, sur les deux images (e) et (f). Il est ici par contre flagrant que la contamination par du bruit blanc gaussien a un effet majeur sur la restauration avec le terme de fidélité aux données en norme L^1 : alors que dans le cas quadratique, l'amplification du bruit est bien lissée, ce n'est pas le cas ici,



(a) Filtre GSZ ; $\sigma = 0$

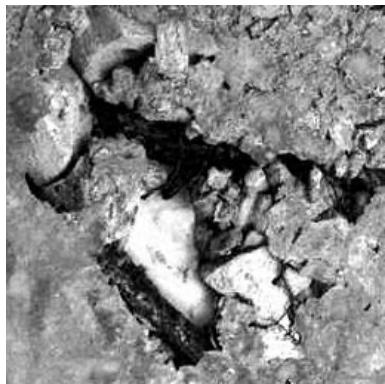


(b) Filtre AM ; $\sigma = 10$

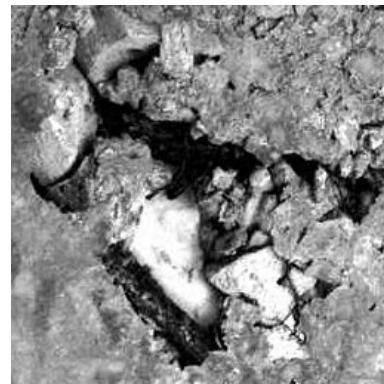


(c) Autour des valeurs effectives ; $\sigma = 10$ (cas « idéal »)

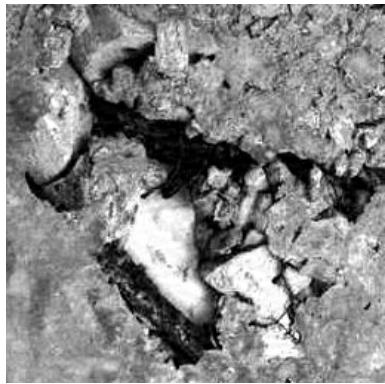
FIGURE 6.12 – Variation du kurtosis de l'image monochrome *Nid de cailloux* déflouée, autour des valeur de l et θ fournies via deux filtres de choc, pour les cas sans et avec ajout de bruit (cf. Tab. 6.5 et Tab. 6.6).



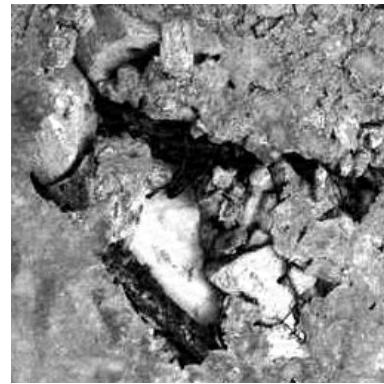
(a) $\sigma = 0$, fidélité L^2 , $\alpha = 10^{-1}$



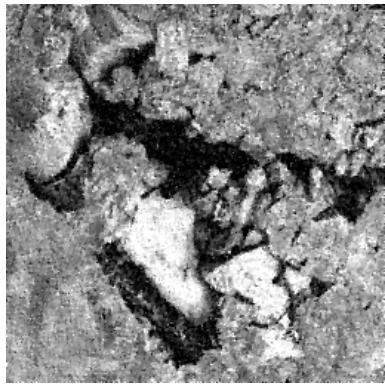
(b) $\sigma = 0$, fidélité L^1 , $\alpha = 10^{-1}$



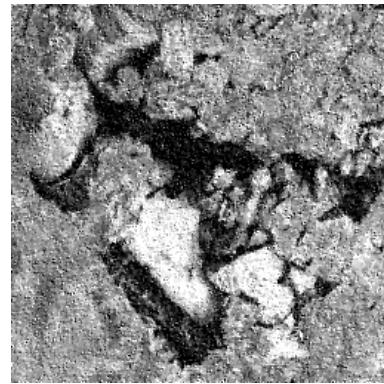
(c) $\sigma = 0$, fidélité L^2 , $\alpha = 10^{-2}$



(d) $\sigma = 0$, fidélité L^1 , $\alpha = 10^{-2}$



(e) $\sigma = 10$, fidélité L^2 , $\alpha = 10$



(f) $\sigma = 10$, fidélité L^1 , $\alpha = 10$

FIGURE 6.13 – Image *Nid de cailloux* restaurée par modèle TV, après estimation des paramètres de mouvement par filtrage de choc et raffinement par minimisation du kurtosis ($\hat{l} = 10,98$ et $\hat{\theta} = 44,85^\circ$).



FIGURE 6.14 – Image *Reprise de béton* avec mouvement et ajout de bruit ($\sigma = 6$), après filtrage de choc de type respectif : OR, AM, et GSZ.

Filtre	Longueur l (pix.)	Erreurs sur l (%)	Angle θ (deg.)	Erreurs sur θ (%)
OR	4,74	56,91	43,52	3,29
AM	14,19	29	42,86	4,75
GSZ	13,49	22,64	40,75	9,44
Moyenne	10,81	1,73	42,38	5,82

TABLEAU 6.7 – Longueur et angle du noyau de mouvement identifiés sur l'image *Reprise de béton* couleur floue sans ajout de bruit, via les trois filtres de choc (valeurs réelles : $l = 11$, $\theta = 45^\circ$).

où ce bruit est bien davantage présent. Ceci rejoint le fait bien connu [97] qu'une fidélité aux données en norme L^1 n'est en mesure de lisser que des bruits de type impulsionnel, et qu'elle se révèle inefficace en présence de bruit de type blanc et gaussien.

6.2.2 Cas couleur

Premier test. Nous effectuons maintenant une expérimentation sur l'image leptokurtique *Reprise de béton*, dégradée par le même noyau que précédemment ($l = 11$ et $\theta = 45^\circ$). Nous avons considéré des niveaux progressifs de bruit blanc gaussien ajouté : $\sigma = 0$, $\sigma = 3$ et finalement $\sigma = 6$. L'effet des filtres de choc dans le dernier cas (le plus délicat) est montré en Fig. 6.14. Une différence notable apparaît entre les trois scènes : on a en effet l'impression qu'un grain affecte l'image traitée par le filtre d'Osher-Rudin (OR), trahissant la présence de bruit dans l'image originale. D'après les expérimentations précédentes, on peut alors penser que l'estimée fournie par la minimisation (6.36) sera dans ce cas sous-évaluée.

Les résultats d'estimation des paramètres du noyau sont donnés, par cette dernière minimisation, et pour le cas sans ajout de bruit, dans le Tab. 6.7. Pour les cas avec ajout de bruit, ceux-ci sont disponibles respectivement dans les Tab. 6.8 ($\sigma = 3$) et Tab. 6.9 ($\sigma = 6$).

Pour le cas sans ajout de bruit, l'angle θ du noyau est correctement estimé par les trois filtres. En revanche, sa longueur l est déjà sous-estimée avec le filtre d'Osher-Rudin (OR). On peut imaginer que les fines textures présentes dans cette image aient un rôle perturbant, assimilable dans une certaine mesure par l'algorithme à une présence de bruit, pour lequel cette approche n'est pas robuste. Pour les cas avec ajout de bruit, cette valeur obtenue via OR présente la même sous-estimation, avec une erreur corrélée au niveau de

Filtre	Longueur l (pix.)	Erreur sur l (%)	Angle θ (deg.)	Erreur sur θ (%)
OR	3,93	64,27	24,66	45,2
AM	13,28	20,73	49,60	10,22
GSZ	11,32	2,91	43,67	2,96
Moyenne	9,51	13,54	39,31	12,64

TABLEAU 6.8 – Longueur et angle du noyau de mouvement identifiés sur l'image *Reprise de béton* couleur floue avec ajout de bruit ($\sigma = 3$), via les trois filtres de choc (valeurs réelles : $l = 11$, $\theta = 45^\circ$).

Filtre	Longueur l (pix.)	Erreur sur l (%)	Angle θ (deg.)	Erreur sur θ (%)
OR	3,82	65,27	23,26	48,31
AM	13,64	24	46,47	3,27
GSZ	12,28	11,64	51,41	14,24
Moyenne	9,91	9,91	40,38	21,94

TABLEAU 6.9 – Longueur et angle du noyau de mouvement identifiés sur l'image *Reprise de béton* couleur floue avec ajout de bruit ($\sigma = 6$), via les trois filtres de choc (valeurs réelles : $l = 11$, $\theta = 45^\circ$).

bruit. Globalement, les valeurs identifiées par les filtres AM et GSZ sont assez similaires, avec toutefois une différence dans le θ reconnu pour les cas avec ajout de bruit : alors que GSZ est plus performant pour le cas $\sigma = 3$, c'est AM qui l'est davantage dans le cas $\sigma = 6$. On pourrait alors simplement imaginer qu'un estimateur basé sur la moyenne de AM et GSZ serait assez pertinent ; ceci restant à confirmer par des essais plus poussés.

De par le raffinement des valeurs identifiées par maximisation du kurtosis¹⁶, nous obtenons les graphiques de la Fig. 6.15. Les trois supérieurs (a)-(c) illustrent le cas sans ajout de bruit, avec recherche des paramètres centrée sur les estimations fournies par les différents filtres de choc. Alors que pour AM et GSZ un maximum est clairement visible, la recherche via la valeur donnée par OR ne renvoie elle aucun point selle pouvant correspondre à un tel maximum. Les paramètres identifiés dans les deux premiers cas sont alors $l = 10,7$ et $\theta = 45,5^\circ$. Ceux-ci présentent de nouveau une valeur satisfaisante.

Pour les deux cas incluant un ajout de bruit ($\sigma = 3$ et $\sigma = 6$), la recherche de l'extremum est également illustrée en Fig. 6.15, par les deux derniers graphiques (d)-(e). Ici aussi, un maximum apparaît clairement, à $l = 11,3$ et $\theta = 44,8^\circ$, et à $l = 9,5$ et $\theta = 45,5^\circ$, pour respectivement les cas $\sigma = 3$ et $\sigma = 6$. Seule l'estimée de l est alors affectée d'une erreur sensible dans cette dernière configuration.

En Fig. 6.16, nous montrons l'image restaurée obtenue à partir de ces valeurs des paramètres du noyau, en considérant toujours une régularisation TV, à couplage de canaux (comme présenté au Chapitre 5), avec les deux termes de fidélité L^1 et L^2 envisagés. Ceci pour les trois cas de bruit testés, celui sans ajout de bruit ayant été considéré avec

16. Vu que l'image est leptokurtique, nous cherchons en effet le maximum du kurtosis. Notons cependant que, du fait que cette mesure n'est pas directement applicable à des données couleurs, nous sommes obligés de convertir les images restaurées en images monochromes, ceci entraînant dans les graphiques de variation un décalage de l'échelle des valeurs du kurtosis.

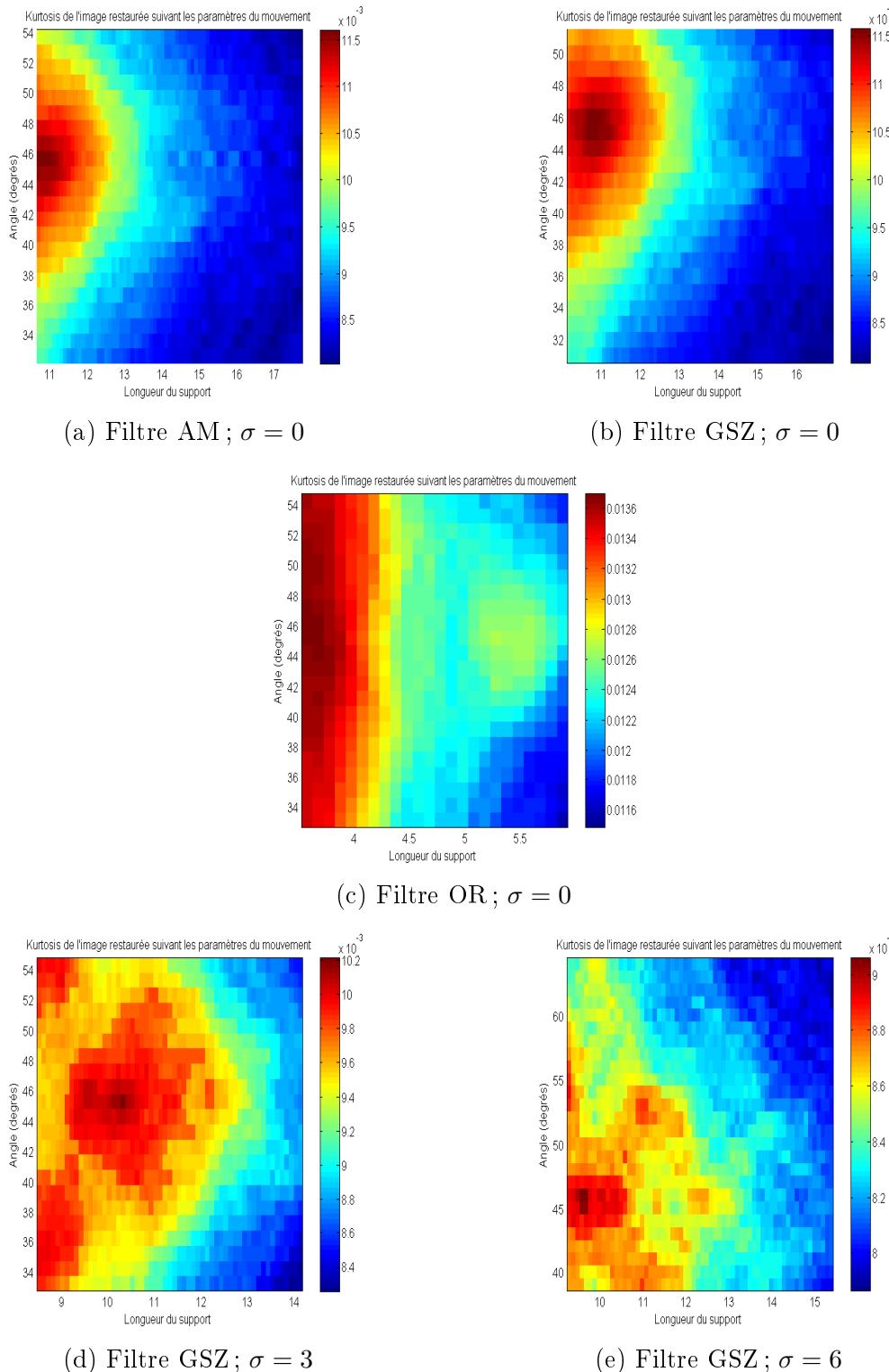


FIGURE 6.15 – Variation du kurtosis de l'image couleur *Reprise de béton* déflouée, autour des valeurs de l et θ fournies via les trois filtres de choc, pour les cas sans et avec ajout de bruit (cf Tab. 6.7, Tab. 6.8 et Tab. 6.9).

Filtre	Longueur l (pix.)	Erreur sur l (%)	Angle θ (deg.)	Erreur sur θ (%)
OR	4,12	54,22	112,88	12,88
AM	11,19	24,33	129,49	29,49
GSZ	8,08	10,22	126,97	26,97
Moyenne	7,79	13,37	123,11	23,11

TABLEAU 6.10 – Longueur et angle du noyau de mouvement identifiés sur l'image *Baboon* floue avec ajout de bruit ($\sigma = 6$) via les trois filtres de choc (valeurs réelles : $l = 9$, $\theta = 100^\circ$).

$\alpha = 10^{-1}$. Comme pour les cas précédents, l'utilisation de la norme L^1 n'est pas en mesure de compenser l'erreur d'estimation du noyau, des distorsions apparaissant de manière identique au cas avec fidélité en norme L^2 . Pour le cas $\sigma = 3$, nous avons pris $\alpha = 10$ comme paramètre de régularisation¹⁷. Le lissage est sans surprise meilleur avec le terme quadratique, puisque nous rappelons que la fidélité L^1 n'est pas adaptée à un traitement du bruit blanc gaussien. Il en est également de même pour le dernier cas de bruit, pour lequel, à paramètre de régularisation équivalent ($\alpha = 10^2$), la supériorité de la norme L^2 est nettement visible.

Deuxième test. En test final, nous reprenons l'image *Baboon* du chapitre précédent. Celle-ci est également leptokurtique ($k > 3$). Afin de tester la robustesse de notre approche, nous considérons un noyau différent, de paramètres $l = 9$ et $\theta = 100^\circ$. Nous ajoutons également un bruit blanc gaussien d'écart-type $\sigma = 6$, ceci afin de perturber l'estimation par les filtres de choc. Notons cependant qu'en pratique, dans l'application visée, et quand une modélisation paramétrique du flou est pertinente, le problème de présence de bruit devrait être mineur, voire quasi-inexistant.

Les images obtenues après application des trois filtres de choc sont montrées en Fig. 6.17. Visuellement, c'est le filtre GSZ qui semble le mieux délimiter les contours. Ceci est bien confirmé par les valeurs estimées des paramètres intrinsèques selon (6.36), récapitulées dans le Tab. 6.10 ; c'est en effet dans ce cas précis que la longueur l du mouvement est la mieux estimée.

La Fig. 6.18 contient les estimations des paramètres après maximisation du kurtosis dans les cas de l'utilisation des filtres AM et GSZ, de même qu'une tentative de restauration avec terme de fidélité en norme L^2 et en norme L^1 . Pour la première étape, un extremum a été enregistré pour $l = 9,2$ et $\theta = 104,1^\circ$. La recherche effectuée autour des valeurs fournies via le filtre GSZ, visible en (b), illustre une difficulté de cette approche par optimisation : la présence de plusieurs extrema, qu'il est alors bien difficile de discriminer. D'où l'intérêt de pouvoir bénéficier d'une première estimation, a contrario de ce qui était proposé dans [116].

Enfin, pour l'étape de restauration à partir du noyau identifié, nous avons sélectionné $\alpha = 10^2$. Sans surprise, c'est l'image obtenue avec utilisation du terme de fidélité aux données quadratique qui est la meilleure, et ce, toujours à cause de la présence du bruit blanc gaussien, dont l'importance prend le pas sur l'importance de l'incertitude sur le noyau.

17. Bien noter que ces valeurs ne sont pas forcément optimales et n'ont pas été choisies dans le but de donner la meilleure restauration possible.



(a) $\sigma = 0$, fidélité L^2 , $\alpha = 10^{-1}$



(b) $\sigma = 0$, fidélité L^1 , $\alpha = 10^{-1}$



(c) $\sigma = 3$, fidélité L^2 , $\alpha = 10$



(d) $\sigma = 3$, fidélité L^1 , $\alpha = 10$



(e) $\sigma = 6$, fidélité L^2 , $\alpha = 10^2$

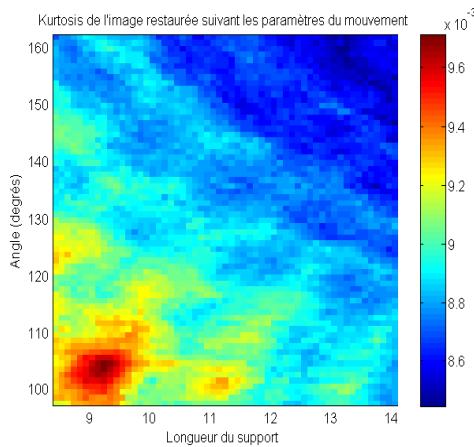


(f) $\sigma = 6$, fidélité L^1 , $\alpha = 10^2$

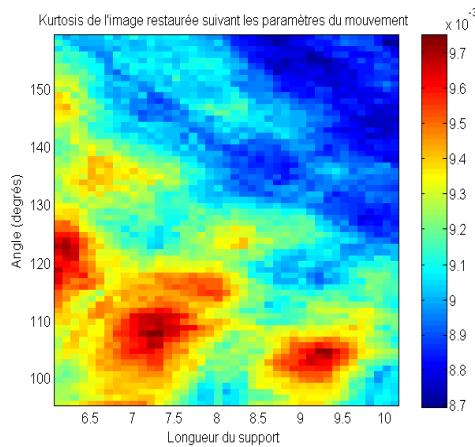
FIGURE 6.16 – Image *Reprise de béton* restaurée par modèle TV, après estimation des paramètres de mouvement par filtrage de choc et raffinement par maximisation du kurtosis.



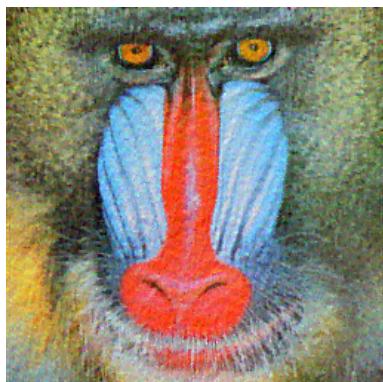
FIGURE 6.17 – Image *Baboon* avec mouvement et ajout de bruit ($\sigma = 6$), après filtrage de choc de type respectif : OR, AM, et GSZ.



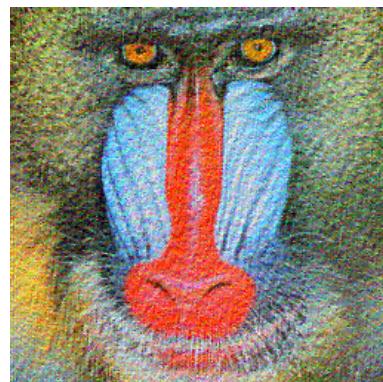
(a) Filtre AM



(b) Filtre GSZ



(c) Fidélité L^2



(d) Fidélité L^1

FIGURE 6.18 – (a)-(b) Variation du kurtosis de l'image *Baboon* déflouée, autour des valeurs de l et θ fournies via deux filtres de choc (cf. Tab. 6.10). (c) Image restaurée par modèle TV, après estimation des paramètres de mouvement par filtrage de choc et raffinement par maximisation du kurtosis, avec $\alpha = 10^2$ ($\tilde{l} = 9,2$ et $\tilde{\theta} = 104,1^\circ$).

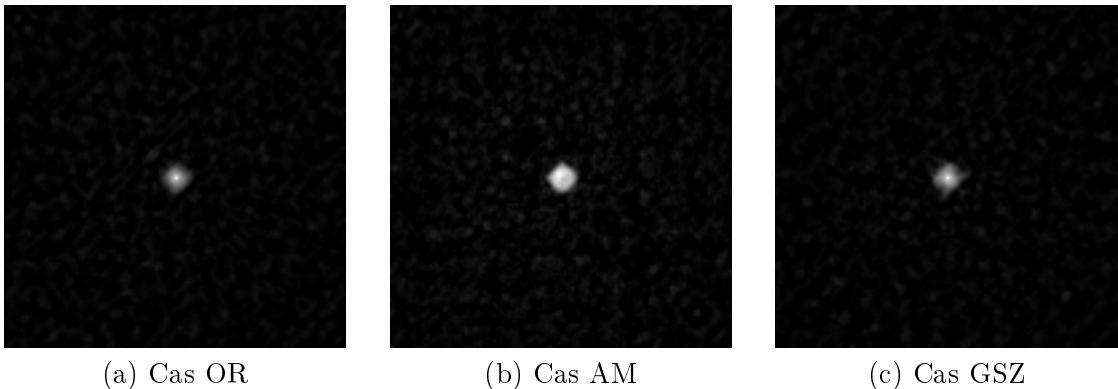


FIGURE 6.19 – Noyaux de référence estimés à partir des images *Satellite* choquées par les trois filtres.

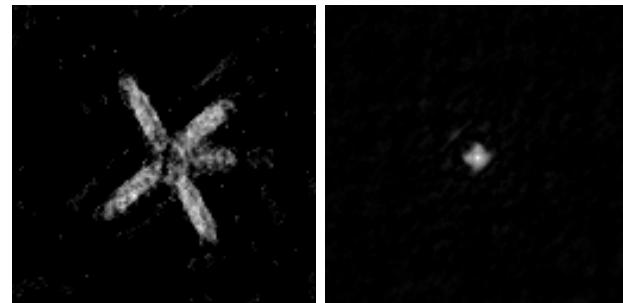
7 Initialisation non-paramétrique par filtre de choc

Bien que nous ayons dans ce qui précède utilisé les filtres de chocs afin d'estimer les paramètres caractérisant des noyaux de flou, cette approche peut tout à fait être envisagée pour le cas de noyaux généraux, non nécessairement paramétrisés. Nous évoquions ceci par (6.28). On peut utiliser cette méthode afin d'initialiser h dans toute sorte de méthode itérative, par exemple pour les schémas originels de Chan et Wong, de You et Kaveh, ou encore de Richardson-Lucy. En effet, disposer d'une estimation autrement plus pertinente que celle consistant à utiliser une impulsion de Dirac peut permettre un gain significatif en temps de calcul, en rapidité de convergence (quand convergence il y a), ou en qualité de restauration à nombre identique d'itérations fixées. On pourra consulter [120] à ce sujet.

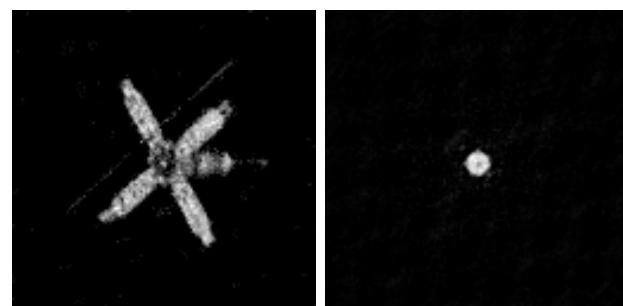
Afin d'illustrer ceci, et à simple titre d'exemple, considérons le cas des images *Satellite* choquées de la Fig. 6.5 (a). La minimisation de (6.28) nous permet d'arriver à une première estimation non-paramétrique des noyaux de défocalisation pour chaque filtre de choc, comme illustré en Fig. 6.19. Clairement, les noyaux reconstruits sont plus proches de la défocalisation recherchée qu'une simple impulsion de Dirac, en particulier celui obtenu via le filtre d'Alvarez-Mazorra.

Si nous utilisons ces estimations comme des initialisations de l'algorithme de Chan et Wong (originel, i.e. sans seuillage du noyau) et fixons a priori un nombre d'itérations de minimisation alternée (ici 5), avec $\alpha_1 = 10^{-3}$ et $\alpha_2 = 10^{-1}$, alors nous obtenons les images restaurées de la Fig. 6.20, pour laquelle les résultats sont bien plus probants qu'avec initialisation par impulsion de Dirac, et ce particulièrement pour le cas AM, pour lequel nous disposons de la meilleure estimation du flou, et pour lequel nous obtenons donc la meilleure reconstruction du satellite.

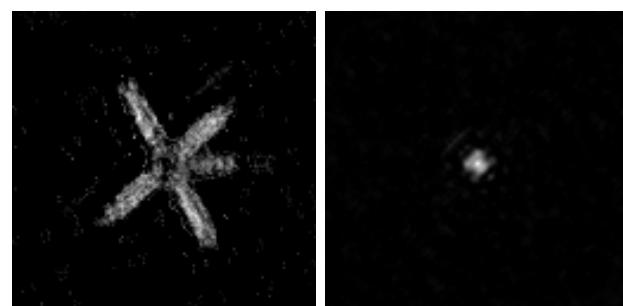
Notons cependant que cette approche avec calcul d'une initialisation ne semble pas être en mesure de « ratrapper » une méthode de déconvolution démarrant avec une impulsion de Dirac, et qui ne fonctionnerait pas : si le schéma considéré ne converge pas, ou plus généralement n'améliore pas, avec initialisation par une impulsion de Dirac, l'image floue, alors il y a peu de chances d'après nos expérimentations qu'une autre initialisation remédie à ceci. D'autres part, les quelques tests que nous avons tenté sur des images sans fond noir n'ont pas révélé d'avantage à utiliser une telle initialisation par filtrage de choc.



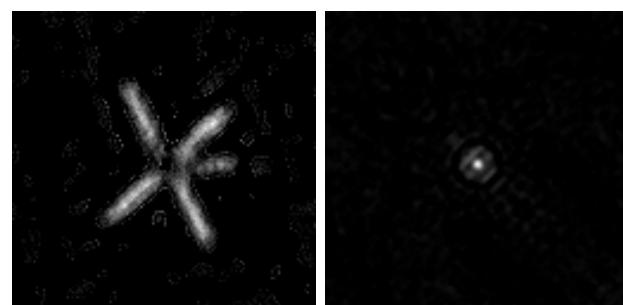
(a) Cas OR



(b) Cas AM



(c) Cas GSZ



(d) Cas impulsion de Dirac

FIGURE 6.20 – Image *Satellite* restaurée et noyau de flou reconstruit, après 5 itérations de l’algorithme (originel) de Chan et Wong, initialisé par les noyaux calculés via les différents filtre de choc.

8 Synthèse

Nous avons présenté dans ce chapitre une approche pour la déconvolution d'images monochromes et couleurs, dans le cas où seule la forme paramétrique du noyau de flou est connue. On a alors un ou plusieurs paramètres à estimer à partir de l'image floue, et non plus tout un opérateur.

On a mis tout d'abord en exergue certains problèmes de convergence se faisant jour lorsque les approches de type double régularisation sont transposées à ce contexte paramétrique. On a vu que celles-ci n'avaient pas réellement d'intérêt dans le cas des noyaux de défocalisation, car elles nécessitaient le réglage d'un paramètre de régularisation sur le noyau, bien qu'il n'y ait fondamentalement qu'un paramètre à identifier pour un tel modèle de flou, ce qui s'avérait incongru. Pour le cas des noyaux de mouvement, les choses apparaissent comme encore plus délicates, en raison de la difficulté à poser mathématiquement le problème.

Nous avons alors proposé une approche relativement simple, basée sur l'utilisation de la statistique d'ordre supérieur dénommée *kurtosis*, qui permet de mesurer la pointicité d'une image. Ceci nous a permis de tester une certaine plage de valeurs de paramètres caractérisant le noyau considéré. Cette plage a elle été fixée grâce à une estimation de référence du flou, estimation donnée par une technique de rehaussement des contours dénommée filtre de choc. Nous en avons envisagé trois types, avec des niveaux de complexité différents, dont les filtres d'Alvarez-Mazorra (AM) et de Gilboa-Sochen-Zeevi (GSZ), qui nous ont permis d'arriver aux estimations les plus précises, en particulier en présence de fines textures et/ou de bruit.

En outre, nous avons alors envisagé une restauration finale avec le noyau de flou caractérisé par les paramètres identifiés, et ceci en considérant deux schémas de déconvolution à régularisation TV : avec terme de fidélité quadratique (norme L^2), et non-quadratique (norme L^1). Il en est ressorti que, malgré ce qui est affirmé par certains auteurs, l'utilisation d'un terme en norme L^1 ne permet pas une amélioration de la reconstruction dans le cas d'utilisation d'un noyau comportant une erreur, par rapport au terme en norme L^2 . En outre, la présence de bruit blanc gaussien exclut l'utilisation d'un tel terme de fidélité, qui se révèle alors inadapté.

Un point nous semblant pouvoir présenter un intérêt de développement futur est le développement d'un filtre de choc qui puisse prendre en compte un couplage des canaux dans le cas des images couleurs, afin de pouvoir peut-être augmenter la précision de l'estimation du flou obtenue. De plus, il nous semble important d'étudier à l'avenir les fondements mathématiques des problèmes de convergence mis au jour avec les schémas de déconvolution à double régularisation avec noyaux paramétriques.

Conclusion générale

Cette thèse s'est voulue une contribution au problème du déflouage d'images. Nous nous sommes placés dans le cadre délicat de la restauration dite aveugle, pour laquelle l'opérateur de flou affectant la scène considérée est inconnu.

La motivation de ce travail était double : la première pourrait être qualifiée d'académique, dans la mesure où le nombre de travaux traitant de cette problématique aveugle est assez restreint, et ce d'autant plus que l'on se place dans le contexte des images en couleur. La deuxième était la prise en compte d'une application pratique sous-jacente, qui était d'examiner la faisabilité de l'emploi de telles techniques à la restauration d'images obtenues par un drone en vol, à des fins d'auscultation d'ouvrages de génie civil particuliers.

En outre, il est dans ce contexte - et dans bien d'autres - de toute évidence, que pouvoir disposer de données en couleur est autrement plus agréable, et plus pertinent, de par la différence d'information contenue. C'est un point sur lequel nous nous sommes efforcés de travailler ici, en ayant comme finalité de développer des approches efficaces pour traiter des images couleurs, dans la mesure où l'essentiel des techniques existantes sont développées pour des images monocanales.

Nous avons dans une première phase dégagé les principaux éléments théoriques nécessaires à la compréhension du problème fondamental de restauration d'images floues, qui se modélise principalement sous la forme d'une déconvolution. Celui-ci rentre dans la classe des problèmes inverses mal posés, c'est-à-dire instables. Nous avons mis en évidence les liens existants entre la restauration classique, c'est-à-dire à noyau de flou connu, et la restauration aveugle.

Nous nous sommes alors évertués à donner un état de l'art le plus complet possible des différents méthodes pouvant exister en déconvolution d'images (autant mono que multicanal). Celui-ci nous a permis de bénéficier d'un aperçu global des techniques disponibles, de leurs performances supposées, et de pouvoir retirer celles qui apparaissaient les plus performantes, les plus robustes, et les plus adaptées à notre contexte. C'est vers les approches basées sur le principe de double régularisation que nous nous sommes alors orientés, en raison de la solidité mathématique de ce concept. Ces méthodes reposent sur une formulation variationnelle, et leur solution consiste donc en la recherche d'un extremum d'une fonctionnelle donnée, dont la minimisation modélise le problème de déconvolution.

Nous avons dans un premier temps envisagé un modèle de déconvolution basé sur l'utilisation d'une régularisation à variation totale (TV), comme proposé par Chan et Wong, ceci pour le traitement d'images monochromes. Nous avons montré expérimentalement les défauts de la mise en œuvre de ces auteurs, de même que son impossibilité à traiter des images sans support compact, autrement dit sans fond noir. En analysant les fondements

de ces défauts, nous avons pu proposer une approche modifiée, qui s'est révélée être bien plus efficace sur tout type d'images, même affectées par des flous importants. Pour cela, notre contribution essentielle a été de proposer une contrainte de seuillage lors de la reconstruction itérative du noyau, et d'optimiser le réglage de certains paramètres inhérents à la technique de minimisation utilisée.

Nous avons dans un deuxième temps étudié l'apport que pouvait avoir l'utilisation de termes de régularisation non-convexes, en raison de leur capacité présumée à restituer des bords très vifs, ce qui peut avoir un intérêt dans l'application visée, dans laquelle la caractérisation des fissures prend par exemple une place importante. Nous avons à cette fin proposé un schéma dérivé du précédent, mais utilisant un opérateur de type Mumford-Shah comme terme de régularisation sur l'image. Nous avons pu mettre en évidence qu'en effet, il était parfois possible d'obtenir des reconstructions encore plus nette que via l'utilisation de la régularisation TV, bien que ceci passe alors par un réglage fastidieux de plusieurs autres paramètres de régularisation. En pratique, il est alors nécessaire d'utiliser la première approche afin de fixer les paramètres optimaux principaux, avant d'essayer d'améliorer la reconstruction par cette méthode.

Dans un troisième temps, nous nous sommes attaqués à la mise en œuvre de notre schéma de déconvolution adapté de Chan et Wong, pour des images couleurs, ou multicanales de manière générale. Nous avons pris en compte les recommandations existantes consistant à prendre garde au fait que chaque canal doit bien s'aligner avec les autres dans le processus de reconstruction, et qu'une régularisation couplée est alors nécessaire. Notre approche s'est révélée très efficace, et les tests comparatifs menés vis-à-vis d'une technique de l'état de l'art se sont avérés très satisfaisants.

Enfin, nous avons envisagé pour finir le cas plus particulier de la déconvolution semi-aveugle, dans lequel les noyaux de flou sont partiellement connus de par leur forme paramétrique. Nous avons tout d'abord mis en évidence la difficulté à appliquer le principe de double régularisation à de tels cas, en raison de problèmes de convergence des estimations, et d'une incongruité majeure (devoir régler un paramètre expérimentalement pour en estimer un autre). Nous avons alors envisagé une approche s'appliquant autant à des images monochromes que couleur. Celle-ci s'est basée sur une approximation de la scène originale par un filtrage de choc, permettant de rehausser les contours lissés d'une image. À partir de là, nous avons pu mettre en œuvre un schéma permettant d'arriver à une première estimation des paramètres des noyaux. Nous avons ensuite utilisé une technique basée sur l'emploi de la statistique d'ordre supérieure dénommée kurtosis pour raffiner cette estimation et en obtenir une bien meilleure précision. Nous avons alors employé une des techniques de restauration variationnelle classiques (à flou connu), à la fois avec un terme de fidélité quadratique et non-quadratique, afin de déterminer si ce dernier pouvait apporter un bénéfice, au vu de l'erreur commise sur les paramètres caractérisant le flou considéré. Nous avons cependant constaté qu'il n'en était rien, et que - surtout en présence de bruit - il valait mieux utiliser un opérateur quadratique, de type moindres carrés.

Il reste dans ce sujet de nombreuses voies à explorer, et les perspectives de développement sont très riches. Parmi celles qui nous semblent présenter un intérêt majeur, on pourra citer entre autre :

- Une meilleure définition des contraintes physiques à imposer aux noyaux de flou. On a vu par exemple que des mouvements non-rectilignes étaient beaucoup plus délicats

à traiter que des mouvements linéaires. On pourrait alors envisager d'instaurer une contrainte visant à forcer la reconstruction à former un noyau ayant la forme d'une ligne courbe, continue. Il pourrait aussi être judicieux, dans certains cas, d'imposer à chaque pixel de ce noyau reconstruit une valeur identique, de sorte que son énergie ne soit pas concentrée systématiquement au centre de celui-ci, mais bien « étalée » sur toute la longueur du support.

- Bien entendu, l'ajout de telles contraintes ne serait pas sans poser de sérieux problèmes dans la définition de schémas de minimisation. Nous pensons qu'une manière plus pertinente de traiter ces contraintes serait alors d'envisager des algorithmes d'optimisation sous contrainte, afin d'éviter les méthodes usuelles procédant avec des algorithmes non-contraints suivis de diverses normalisation, seuillage, et autres opérations fortement non-linéaires. Ces dernières années ont vu l'émergence de ces méthodes en restauration variationnelle à noyau connu, mais leur utilisation dans un contexte aveugle reste encore à développer [107].
- Pour ce qui est de la déconvolution avec noyaux paramétriques, notre approche pourrait sans doute voir sa précision et/ou sa robustesse améliorée par l'utilisation de filtres de choc adaptés aux images couleurs, qui viseraient à bien aligner les canaux de l'image. Cela n'est pas à proprement parlé une perspective de développement de restauration d'image, mais peut présenter un intérêt certain en traitement de l'image de manière plus générale.
- Une voie de développement toute autre, propre à l'application visée, est à chercher dans la possibilité de disposer de données vidéos, ou d'une séquence d'images. On pourrait alors mesurer de manière efficace les vibrations de l'engin en vol à partir de deux ou plusieurs images floues successives [201], et en déduire une approximation assez précise de l'opérateur de dégradation [165].
- Enfin, dans le même ordre d'idées, insistons sur le fait que, pour qu'un essai de déconvolution aveugle fournit un résultat acceptable, il est primordial de disposer du maximum d'informations sur la scène que l'on observe et/ou sur la dégradation en jeu. À ce titre, il nous paraît fondamental que soit bien définis dans l'application les éléments que l'on observe, et que l'on souhaite voir ou détecter, avec leurs caractéristiques précises. Ceci afin d'arriver à des modèles d'images plus précis que ceux qui ont pu être mis en œuvre dans ce travail. On a par exemple pu observer des modèles prenant en compte la distribution des valeurs de gradient dans les images [60], et ceci avec des résultats intéressants.

Ces perspectives et recommandations ne sont bien sûr pas exhaustives, et le sujet de la déconvolution aveugle reste pour sûr un domaine de recherche encore rempli de potentialités, potentialités qui se développeront parallèlement à l'augmentation des capacités de calcul des ordinateurs, permettant d'exécuter en un temps acceptable des algorithmes de plus en plus complexes.

Annexe A

Estimation des paramètres de régularisation optimaux pour les problèmes TV non-aveugles

Cette annexe recense les réglages des paramètres de régularisation optimaux qui ont été obtenus expérimentalement pour les deux problèmes de déconvolution que nous qualifions de « simples » et « associés » au modèle de Chan et Wong

$$\min_{f,h} \mathcal{J}(f,h) = \min_{f,h} \frac{1}{2} \|h * f - g\|_{L^2}^2 + \alpha_1 \int_{\Omega} |\nabla f| + \alpha_2 \int_{\Omega} |\nabla h|. \quad (\text{A.1})$$

Ces deux problèmes sont la restauration de l'image floue g à partir de la connaissance du noyau de flou h , ce qui se fait par la minimisation

$$\min_f \mathcal{J}_1(f,h) = \min_f \frac{1}{2} \|h * f - g\|_{L^2}^2 + \alpha_1 \int_{\Omega} |\nabla f|, \quad (\text{A.2})$$

et la reconstruction du noyau de flou, à partir de l'image dégradée g et de la donnée de l'image nette f , en considérant alors

$$\min_h \mathcal{J}_2(f,h) = \min_h \frac{1}{2} \|h * f - g\|_{L^2}^2 + \alpha_2 \int_{\Omega} |\nabla h|. \quad (\text{A.3})$$

La connaissance des paramètres optimaux α_1 et α_2 pour ces problèmes disjoints peut alors nous permettre d'avoir une meilleure compréhension des réglages couplés nécessaires lors de la résolution du problème joint (A.1). Pour cela on procède en considérant les deux problèmes suivants : estimer α_1 , paramètre de régularisation sur l'image à partir du problème (A.2), et α_2 , paramètre de régularisation sur le flou, à partir du problème (A.3).

Nous allons ici également considérer les deux cas de flous traités au Chapitre 3 : flou de défocalisation, de rayon $\rho = 5$, et flou de mouvement rectiligne, de longueur $l = 11$ et d'angle $\theta = 45^\circ$. Dans chacun de ces deux cas, nous observons l'influence de l'ajout de bruit blanc gaussien. Nous utilisons les indicateurs de PSNR et SSIM pour mesurer la fidélité de la reconstruction de l'image, et le PSNR pour celle du noyau de flou.

1 Estimation du paramètre optimal sur les images

Nous commençons par déterminer les valeurs optimales du paramètre de régularisation α_1 pour les deux images *Nid de cailloux* et *Reprise de béton* flouées, avec, pour chacune, le cas sans ajout de bruit, et les trois niveaux d'ajout de bruit blanc gaussien d'écart-type

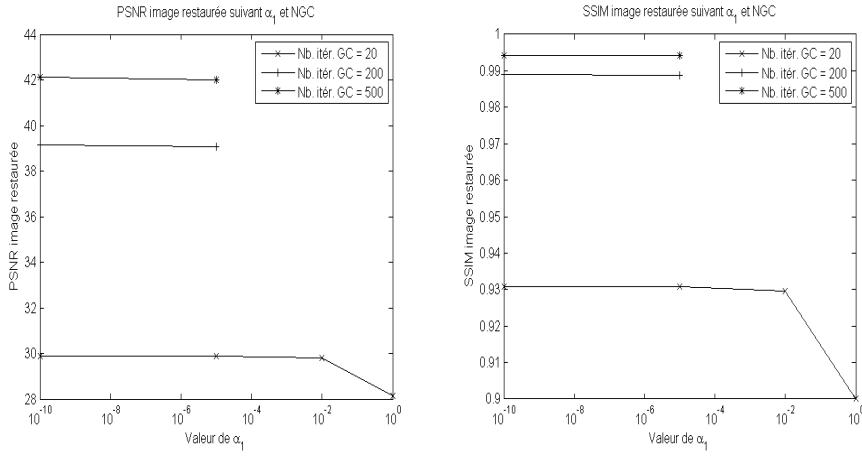


FIGURE A.1 – Variation des PSNR et SSIM de l'image *Nid de cailloux* défocalisée restaurée (sans ajout de bruit), suivant la valeur du paramètre de régularisation α_1 et le nombre d'itérations de gradient conjugué autorisé.

$\sigma = 3,6,9$. Nous considérons alors ici la minimisation (A.2). Celle-ci est effectuée grâce à l'algorithme de linéarisation par point fixe présenté au Chapitre 3. Nous imposons un critère d'arrêt basé sur l'évolution de

$$\frac{\|f_{n+1} - f_n\|}{\|f_{n+1}\|}. \quad (\text{A.4})$$

Si la valeur de ce critère est inférieure à $\epsilon = 10^{-3}$ à l'itération n , alors l'algorithme s'arrête.

1.1 Cas de l'image *Nid de cailloux* défocalisée

Cas sans ajout de bruit. On pourrait a priori penser que la régularisation n'est ici pas nécessaire et même à proscrire, puisqu'aucun bruit n'a été ajouté à l'image. Mais, comme nous l'avons déjà précisé auparavant, et comme le montrent les résultats suivants, un bruit inhérent à tout système d'acquisition est présent, et la valeur optimale pour α_1 est identifiée comme étant différente de zéro.

On constate ici (cf. Fig A.1) que le réglage de α_1 a relativement peu d'influence sur la qualité de la reconstruction, tant que sa valeur reste « assez » petite ; la plage de valeurs acceptables restant assez large, comme le montre le graphique. Par contre, on peut remarquer qu'une limitation trop forte du nombre d'itérations de l'algorithme de gradient conjugué (NCG), dans la résolution de (3.43)¹, mène à une reconstruction de qualité bien inférieure par rapport au cas avec nombre d'itérations plus élevé.

Cas avec ajout de bruit, $\sigma = 3$. L'image flouée bruitée présente ici un SNR de 33,5 dB. Le schéma de déconvolution classique avec régularisation TV est utilisé, avec un NCG fixé à trois valeurs différentes : 20, 200 et 500. Les paramètres optimaux identifiés pour les trois cas sont indiqués dans le Tab. A.1 (a). On constate que ceux-ci ne dépendent pas vraiment du nombre d'itérations permis. La Fig. A.2 (a) présente l'évolution du PSNR et du SSIM de l'image reconstruite suivant les valeurs de α_1 .

1. Pour l'inversion de $A(\mathbf{f}_l)$.

Nb. itérations gradient conjugué	α_1 optimal (PSNR)	α_1 optimal (SSIM)
20	20	20
200	30	20
500	30	20

 (a) Cas $\sigma = 3$

Nb. itérations gradient conjugué	α_1 optimal (PSNR)	α_1 optimal (SSIM)
20	60	50
200	80	60
500	90	60

 (b) Cas $\sigma = 6$

Nb. itérations gradient conjugué	α_1 optimal (PSNR)	α_1 optimal (SSIM)
20	100	90
200	200	100
500	200	100

 (c) Cas $\sigma = 9$

 TABLEAU A.1 – Paramètres optimaux de régularisation α_1 sur l'image *Nid de cailloux* défocalisée, suivant le niveau de bruit ajouté et le nombre d'itérations de gradient conjugué autorisé.

Cas avec ajout de bruit, $\sigma = 6$. Le SNR de l'image est maintenant de 27,5 dB. Les paramètres optimaux identifiés, pour les différentes valeurs maximum de NCG, sont donnés en Tab. A.1 (b). On constate une plus grande sensibilité du PSNR au réglage, et que le SSIM est, lui, plus stable. Ceci illustre bien le fait que les deux indicateurs mesurent des choses assez différentes : une distance globale entre les deux images pour le PSNR, contre une similarité structurelle plus locale pour le SSIM. La Fig. A.2 (b) illustre la variation des indicateurs suivant α_1 .

Cas avec ajout de bruit, $\sigma = 9$. L'ajout d'un tel bruit correspond pour l'image dégradée à un SNR de 24 dB. Les paramètres optimaux de régularisation obtenus sont donnés en Tab. A.1 (c) ; les indicateurs d'évolution de la qualité (PSNR et SSIM) en Fig. A.2 (c). De manière non surprenante, le α_1 optimal croît avec le niveau de bruit présent dans l'image. On constate cependant que son évolution n'est pas extrêmement importante (un facteur inférieur à 10 d'après les données que nous obtenons, par rapport au cas $\sigma = 3$).

Synthèse Le graphique en Fig. A.3, illustre la valeur optimale de α_1 , paramètre de régularisation sur l'image, suivant le niveau de bruit ajouté. Comme on peut le constater, il ressort une évolution relativement linéaire si le critère de mesure de qualité retenu est le SSIM, et une évolution un peu plus « exponentielle » si l'on prend en compte l'observation du PSNR. Ces données doivent cependant être considérées avec prudence, dans la mesure où il ne s'agit que d'une observation sur une image particulière, et avec seulement trois différents niveaux de bruit envisagés.

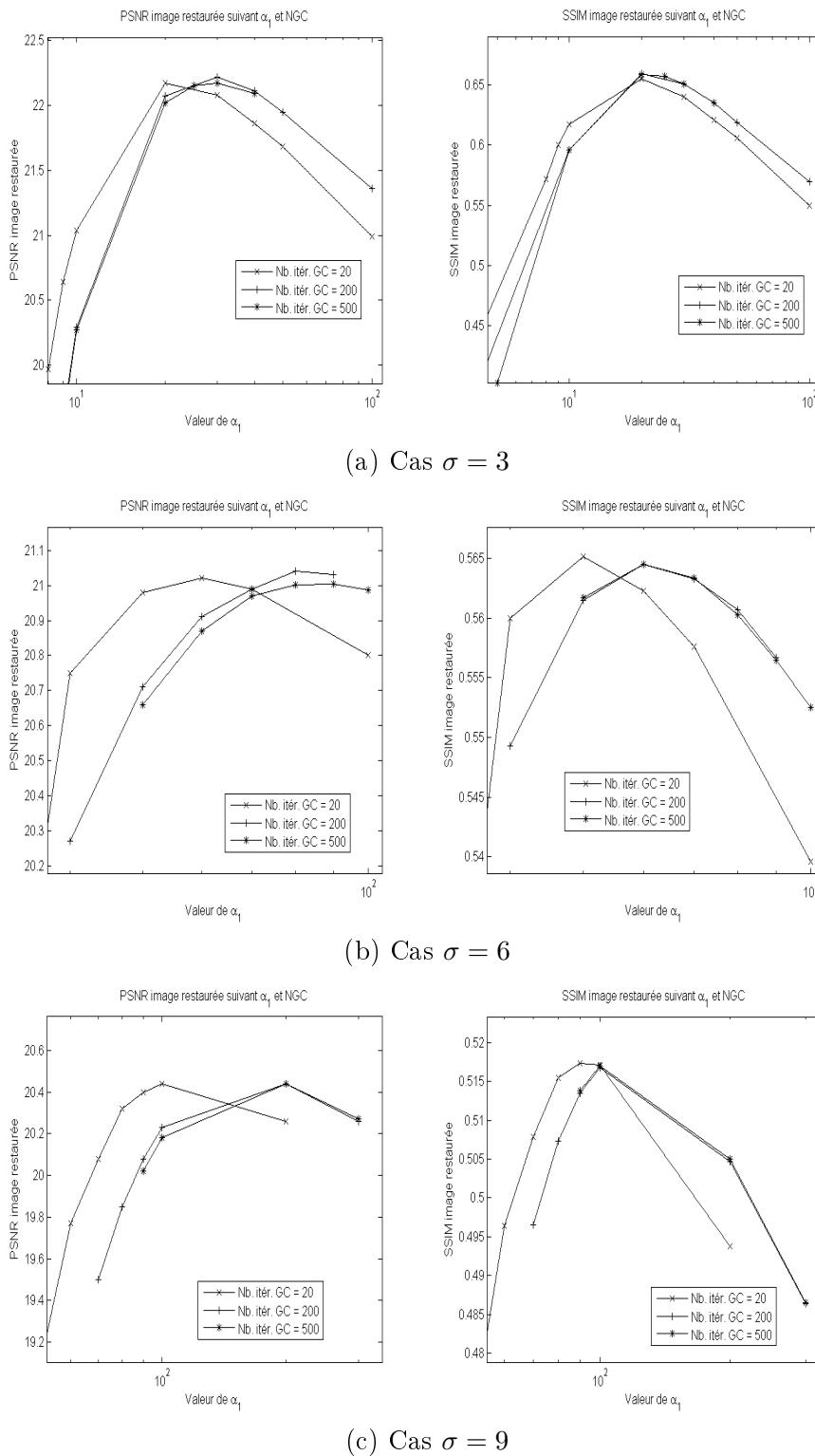


FIGURE A.2 – Variation des PSNR et SSIM de l'image *Nid de cailloux* défocalisée restaurée, suivant le niveau de bruit ajouté, la valeur du paramètre de régularisation α_1 , et le nombre d'itérations de gradient conjugué autorisé.

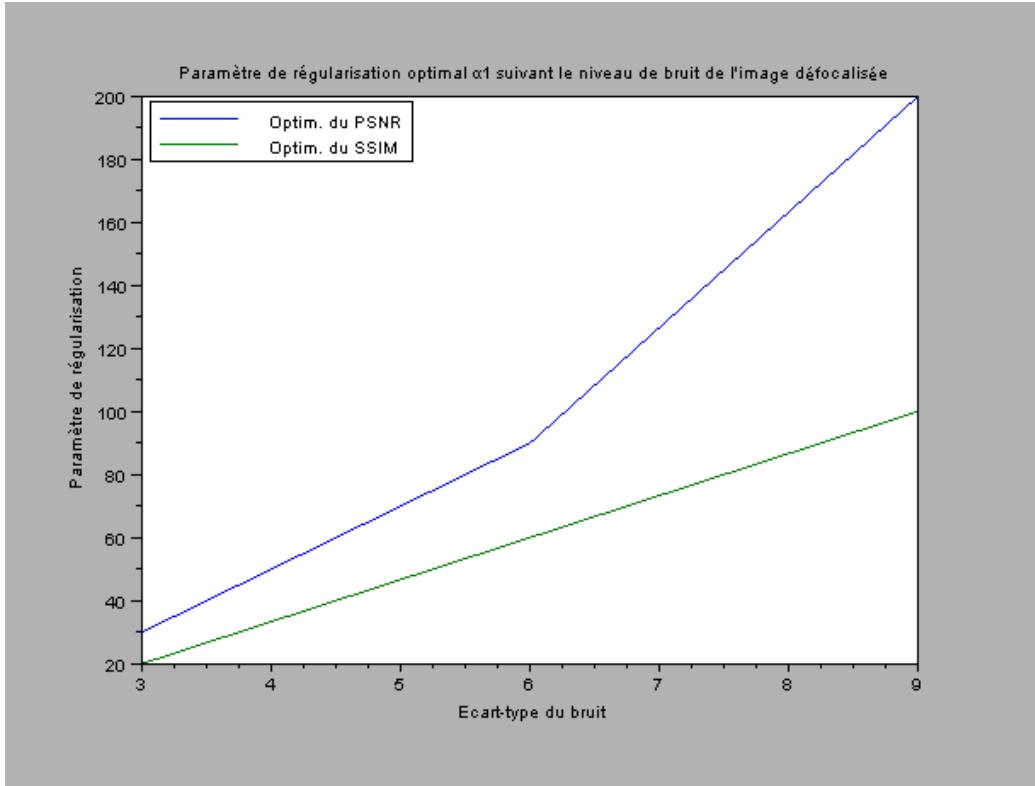


FIGURE A.3 – Paramètre de régularisation α_1 optimal pour l'image *Nid de cailloux* défocalisée, suivant le niveau de bruit ajouté, dans le cadre du problème simple à noyau connu.

1.2 Cas de l'image *Reprise de béton* avec mouvement rectiligne

Nous entreprenons ici la même démarche que pour l'image *Nid de cailloux* défocalisée, cette fois pour l'image *Reprise de béton*, dégradée par le flou de mouvement rectiligne : étude du paramètre de régularisation α_1 suivant l'évolution du niveau de bruit ajouté, et suivant différentes valeurs maximales du NCG.

Cas sans ajout de bruit. Comme précédemment, ce cas n'est pas réellement significatif, et il est impossible de déterminer une valeur du paramètre de régularisation vraiment discriminante pour une restauration optimale de l'image. C'est là un ensemble de paramètres qui donne les meilleurs résultats.

Cas avec ajout de bruit, $\sigma = 3$. L'image affectée par ce bruit présente un SNR de 35,4 dB. Les paramètres optimaux identifiés (de l'ordre de $\alpha_1 = 30$) sont présentés dans le Tab. A.2 (a), et l'évolution des indicateurs PSNR et SSIM en Fig. A.4 (a).

Cas avec ajout de bruit, $\sigma = 6$. L'image affectée par ce bruit présente maintenant un SNR de 29,4 dB. Les paramètres optimaux identifiés sont présentés dans le Tab. A.2 (b). On constate, comme pour l'image défocalisée, une variation sensible entre la valeur optimale au sens du PSNR et du SSIM. L'évolution de ces derniers indicateurs étant disponible en Fig. A.4 (b).

Cas avec ajout de bruit, $\sigma = 9$. L'image est maintenant affectée par un bruit important, résultant en un SNR de 25,8 dB. Les paramètres optimaux identifiés (tous égaux à

Nb. itérations gradient conjugué	α_1 optimal (PSNR)	α_1 optimal (SSIM)
20	30	30
200	40	30
500	40	30

(a) Cas $\sigma = 3$

Nb. itérations gradient conjugué	α_1 optimal (PSNR)	α_1 optimal (SSIM)
20	100	80
200	100	90
500	100	90

(b) Cas $\sigma = 6$

Nb. itérations gradient conjugué	α_1 optimal (PSNR)	α_1 optimal (SSIM)
20	200	200
200	200	200
500	200	200

(c) Cas $\sigma = 9$

TABLEAU A.2 – Paramètres optimaux de régularisation α_1 sur l'image *Reprise de béton* affectée par le flou de mouvement, suivant le niveau de bruit ajouté et le nombre d'itérations de gradient conjugué autorisé.

$\alpha_1 = 200$) sont présentés dans le Tab. A.2 (c), et l'évolution des indicateurs PSNR et SSIM en Fig. A.4 (c). On constate une évolution moins importante du paramètre optimal entre ce cas et le précédent ($\sigma = 6$), qu'entre le premier niveau de bruit ($\sigma = 3$) et le deuxième.

Synthèse Comme pour le cas de l'image défocalisée, nous proposons le graphique en Fig. A.5, qui illustre la valeur optimale de α_1 , suivant le niveau de bruit ajouté. On note une évolution assez équivalente au cas précédent pour ce qui est de la mesure de qualité par PSNR. Avec le SSIM, la croissance est plus marquée et ne présente que beaucoup moins ce caractère linéaire. Bien entendu, et comme déjà évoqué, ces données sont cependant à considérer avec réserve, vu le cas particulier qu'elles représentent.

2 Estimation du paramètre optimal sur les noyaux de flou

Nous allons maintenant nous pencher sur l'évaluation des paramètres α_2 portant sur les noyaux de flou. Nous rappelons qu'en effet, le schéma de déconvolution par double régularisation se rapporte à une séquence de problèmes de déconvolution « simples » (que l'on comprend ici par : à une seule inconnue), dans lesquels nous « déflouons » alternativement l'image à partir du flou, et le flou à partir de l'image.

Nous allons procéder comme précédemment en identifiant d'abord les paramètres optimaux pour le flou de défocalisation associé à l'image *Nid de cailloux*, puis ceux du flou de mouvement rectiligne associé à l'image *Reprise de béton*.

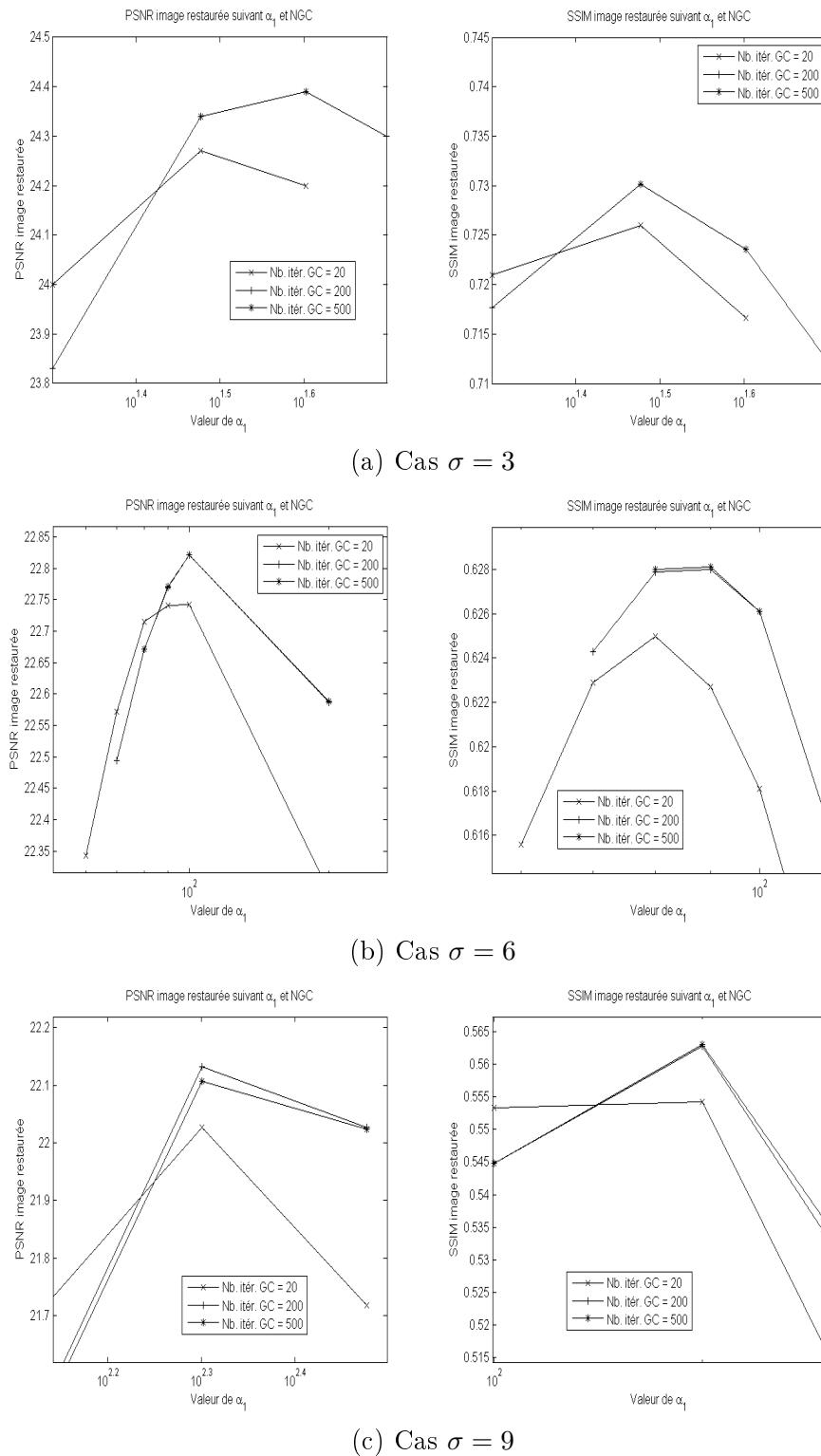


FIGURE A.4 – Variation du PSNR et du SSIM de l'image *Reprise de béton* affectée par le flou de mouvement restaurée, suivant le réglage du paramètre de régularisation α_1 et le nombre d'itérations de gradient conjugué autorisé.

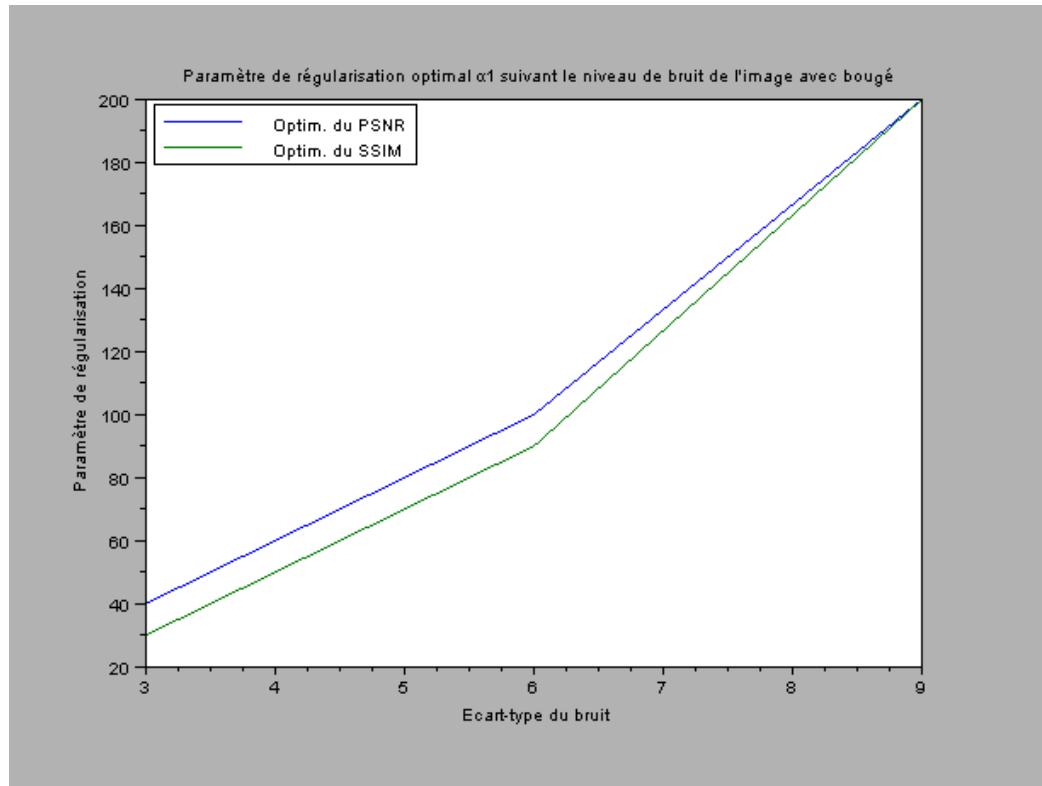


FIGURE A.5 – Paramètre de régularisation α_1 optimal pour l'image *Reprise de béton* affectée par le flou de mouvement, suivant le niveau de bruit ajouté, dans le cadre du problème simple à noyau connu.

2.1 Cas du noyau de défocalisation

Le problème de minimisation que nous considérons est (A.3), homologue de (A.2) utilisé pour l'étude des paramètres de régularisation α_1 sur l'image.

Comme pour la restauration de l'image précédemment, le cas sans ajout de bruit ($\sigma = 0$) n'est pas pertinent, et n'est donc pas explicité dans ce qui suit.

Nous observons le PSNR obtenu pour la reconstruction du flou en utilisant les différentes valeurs pour le NCG dans l'algorithme de point fixe : 20, 200 et 500 itérations.

Cas avec ajout de bruit, $\sigma = 3$. Les valeurs de α_2 correspondant aux PSNR optimaux pour les différents réglages sont présentés dans le Tab. A.3 (a). En Fig. A.6, nous pouvons observer les variations du PSNR suivant la valeur de α_2 . Notons que le NCG n'atteint jamais les 200 (mais dépasse les 20). Les α_2 optimaux obtenus pour 200 et 500 itérations sont donc les mêmes.

Cas avec ajout de bruit, $\sigma = 6$. Le même phénomène que précédemment se produit ici, à savoir que le NCG n'atteint jamais une valeur supérieure à 200. Nous n'indiquons donc pas dans le Tab. A.3 (b) de valeur optimale de α_2 pour ce cas, puisqu'il s'agit de la même que pour le cas avec 200 itérations au maximum. Les PSNR obtenus pour la reconstruction sont indiqués en Fig. A.6 (b).

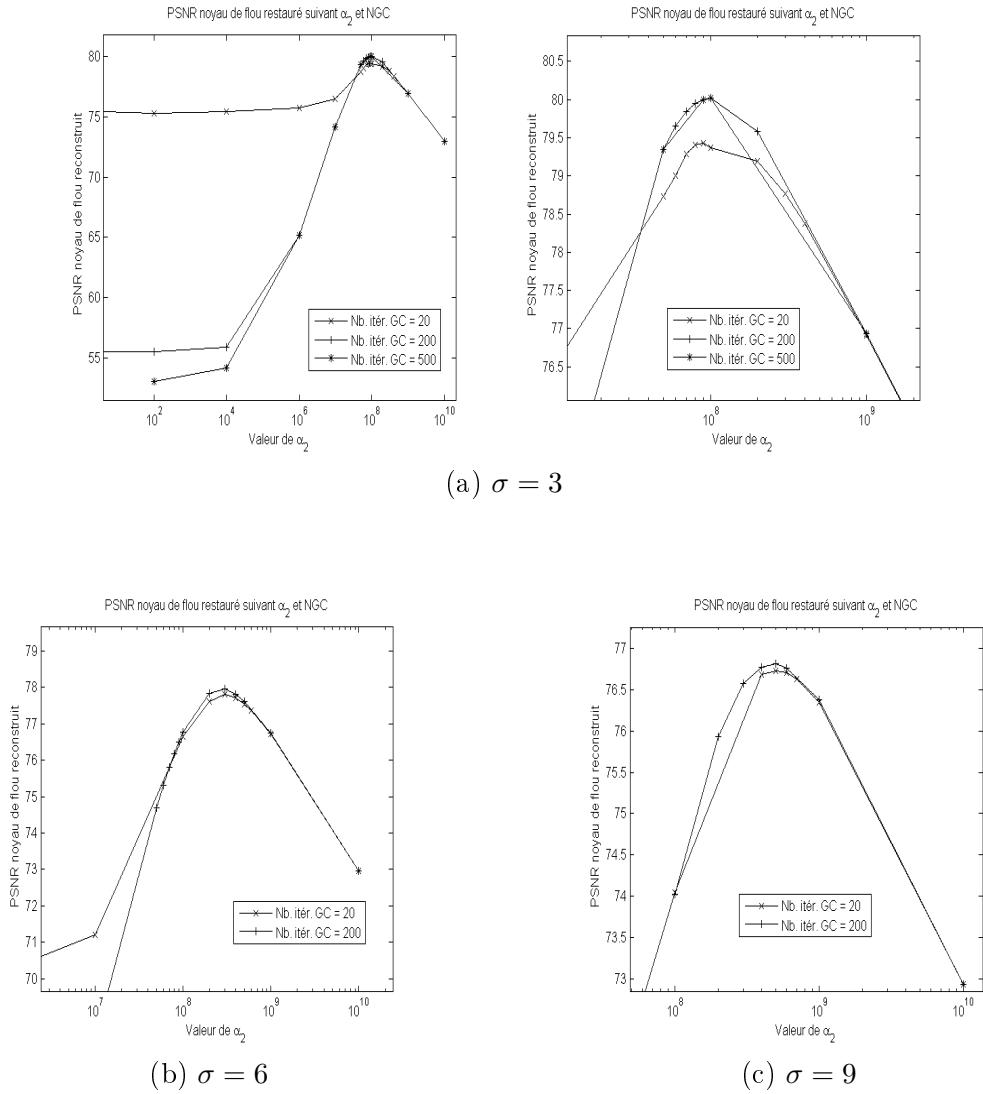


FIGURE A.6 – Variation du PSNR du flou de défocalisation affectant l'image *Nid de cailloux* reconstruit, suivant le réglage du paramètre de régularisation α_2 et le nombre d'itérations de gradient conjugué autorisé.

Nb. itérations gradient conjugué	α_2 optimal (PSNR)
20	9.10^7
200	10^8
500	10^8

(a) Cas $\sigma = 3$

Nb. itérations gradient conjugué	α_2 optimal (PSNR)
20	4.10^8
200	3.10^8

(b) Cas $\sigma = 6$

Nb. itérations gradient conjugué	α_2 optimal (PSNR)
20	5.10^8
200	5.10^8

(c) Cas $\sigma = 9$

TABLEAU A.3 – Paramètres optimaux de régularisation α_2 sur le flou de défocalisation affectant l'image *Nid de cailloux*, suivant le nombre d'itérations de gradient conjugué autorisé.

Cas avec ajout de bruit, $\sigma = 9$. Pour cette valeur de bruit ajouté, le paramètre α_2 optimal croît légèrement (cf. Tab. A.3 (c)). L'évolution des PSNR obtenus est donnée en Fig. A.6 (c).

Synthèse. Pour conclure, nous proposons le graphique en Fig. A.7, qui illustre la valeur optimale de α_2 suivant le niveau de bruit ajouté. Comme on peut le constater, il ressort une évolution très linéaire du PSNR. Mais les mêmes indications de prudence que données précédemment restent valables ici.

2.2 Cas du noyau de mouvement

On rappelle que les caractéristiques de ce noyau de fou sont les suivantes : longueur $l = 11$ et angle $\theta = 45^\circ$. De même que dans la section précédente, on étudie empiriquement les valeurs optimales du paramètre de régularisation α_2 , au sens du PSNR.

Cas avec ajout de bruit, $\sigma = 3$. Les valeurs optimales de α_2 sont données dans le Tab. A.4 (a) pour ce cas ; l'évolution des PSNR en Fig. A.8 (a).

Cas avec ajout de bruit, $\sigma = 6$. Le paramètre optimal α_2 augmente ici toujours conformément avec le niveau de bruit (cf. Tab A.4 (b)). L'évolution du PSNR est visible en Fig. A.8 (b).

Cas avec ajout de bruit, $\sigma = 9$. Pour ce cas de bruit, le plus élevé, la valeur optimale de α_2 est quasi identique à la précédente (voir Tab. A.4 (c)), mais, en revanche, le niveau de PSNR obtenu à la reconstruction du noyau est plus faible (cf. Fig A.8 (c)).

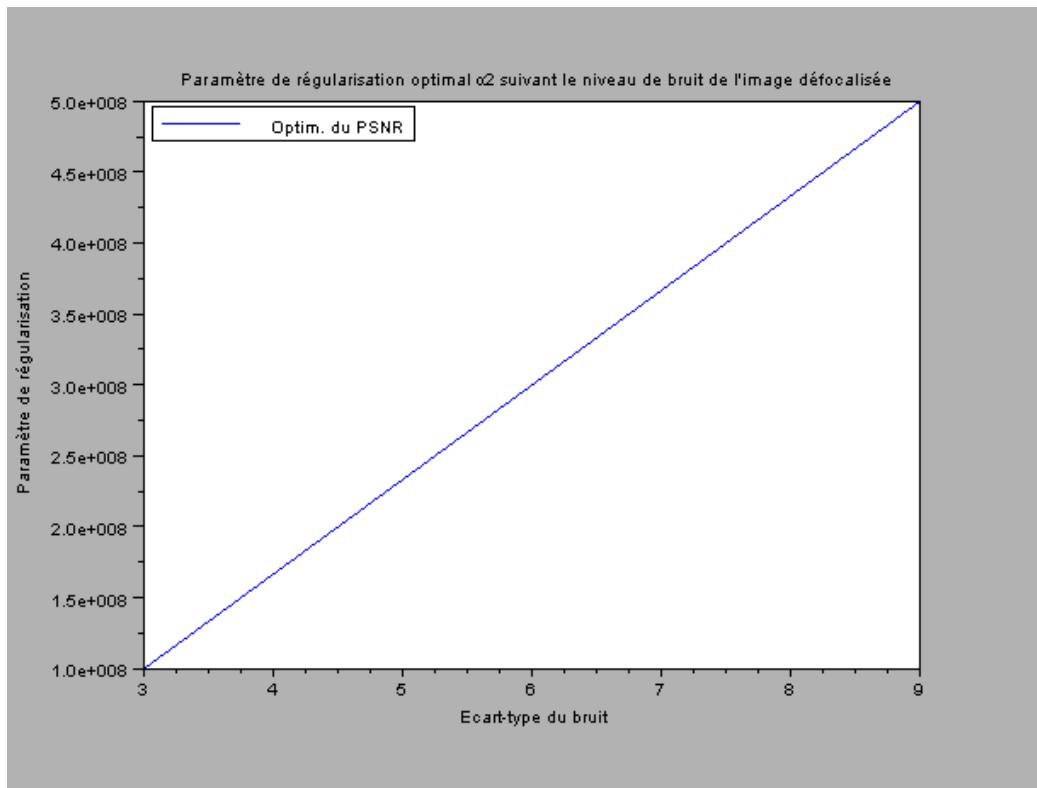


FIGURE A.7 – Paramètre de régularisation α_2 optimal sur le noyau de l'image *Nid de cailloux* défocalisée, suivant le niveau de bruit ajouté, dans le cadre du problème simple à image nette connue.

Nb. itérations gradient conjugué	α_2 optimal (PSNR)
20	2.10^7
200	5.10^6

(a) Cas $\sigma = 3$

Nb. itérations gradient conjugué	α_2 optimal (PSNR)
20	10^8
200	8.10^7

(b) Cas $\sigma = 6$

Nb. itérations gradient conjugué	α_2 optimal (PSNR)
20	10^8
200	10^8

(c) Cas $\sigma = 9$

TABLEAU A.4 – Paramètres optimaux de régularisation α_2 sur le flou de mouvement affectant l'image *Reprise de béton*, suivant le nombre d'itérations de gradient conjugué autorisé.

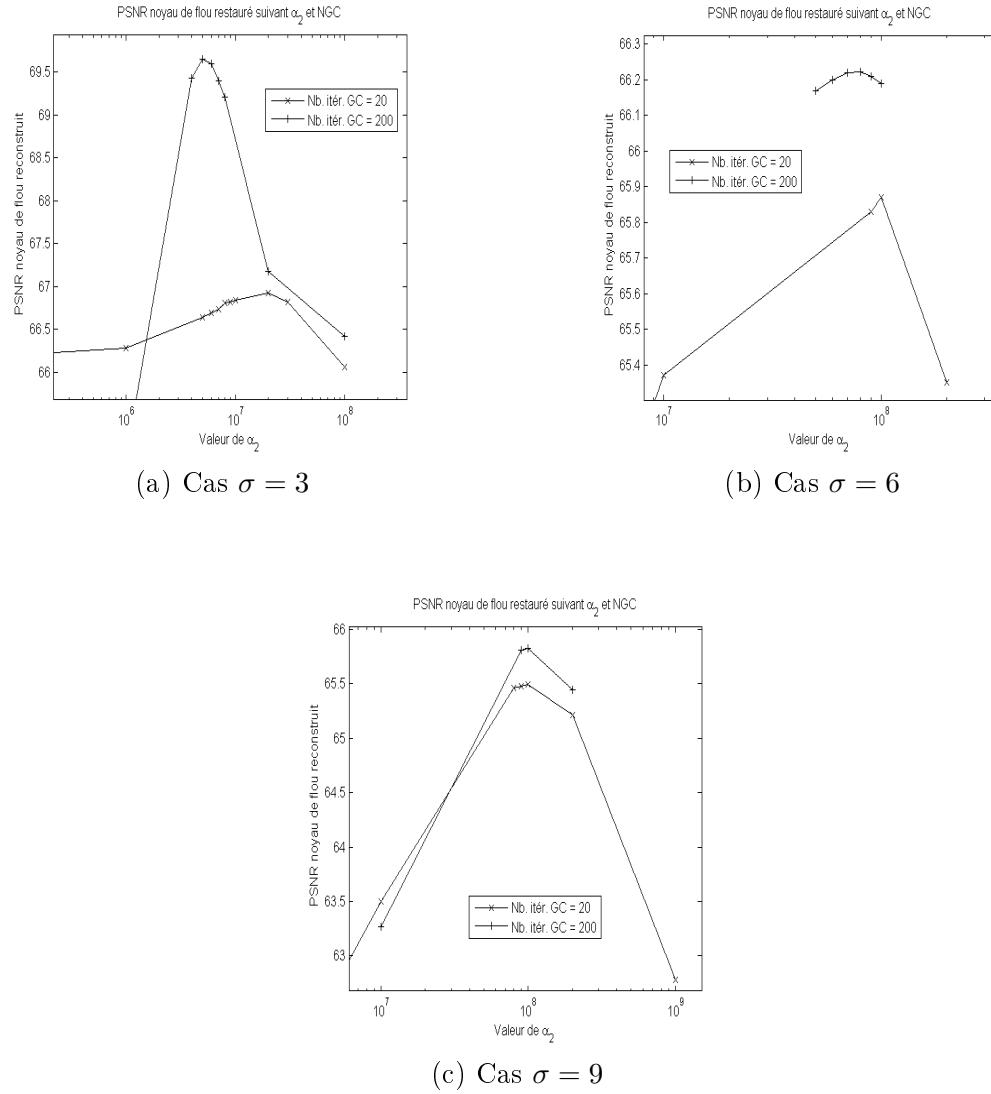


FIGURE A.8 – Variation du PSNR du flou de mouvement affectant l'image *Reprise de béton* reconstruit, suivant le réglage du paramètre de régularisation α_2 et le nombre d'itérations de gradient conjugué autorisé.

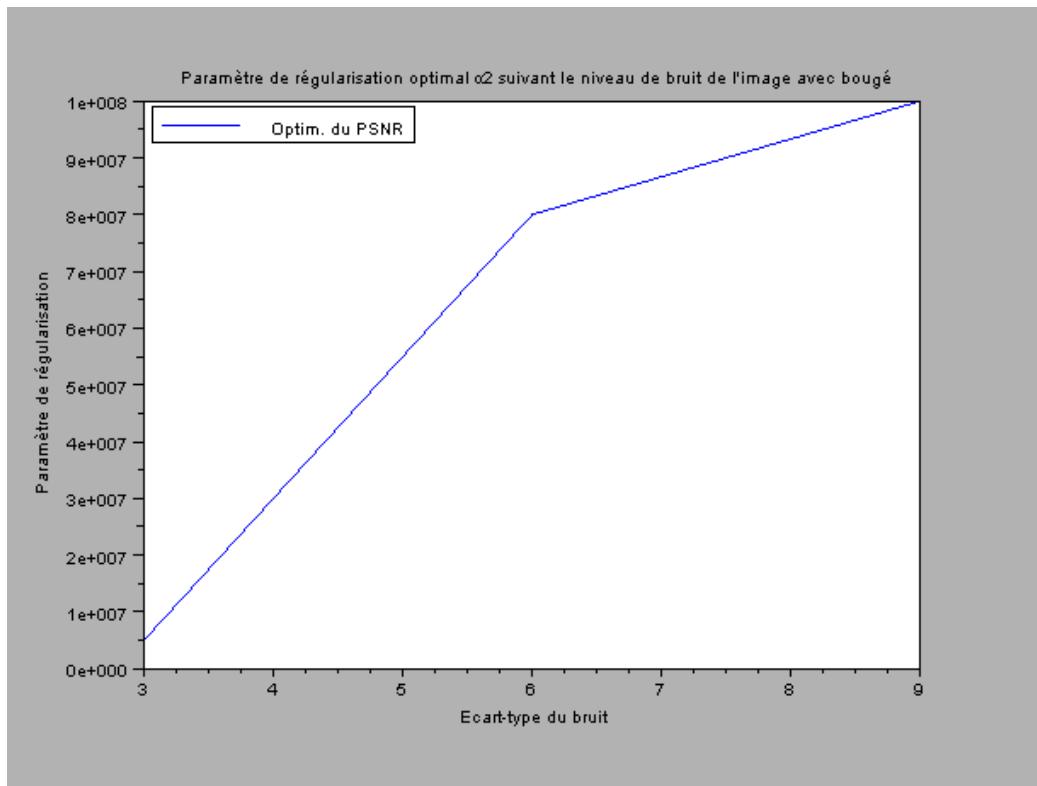


FIGURE A.9 – Paramètre de régularisation α_2 optimal sur le noyau de l'image *Reprise de béton*, suivant le niveau de bruit ajouté, dans le cadre du problème simple à image nette connue.

Synthèse En résumé, nous synthétisons les résultats dans le graphique en Fig. A.9, qui illustre la valeur optimale de α_2 suivant le niveau de bruit ajouté. On observe là une croissance de forme logarithmique, pour laquelle la valeur optimale du paramètre de régularisation α_2 croît moins fortement que pour le cas de la défocalisation.

De manière générale, on peut constater un fait intéressant : dans le cas présent du flou de mouvement, la valeur optimale pour α_2 est à chaque fois inférieure à celle qui est obtenue pour le cas du flou de défocalisation, à niveau de bruit identique. Or, comme on l'a vu en Section 4 du Chapitre 1, le conditionnement du noyau de défocalisation considéré (i.e. de rayon $\rho = 5$) est sensiblement plus élevé que pour le noyau de mouvement ($4,6 \cdot 10^{16}$ contre $3,6 \cdot 10^{18}$). Il est donc tout à fait normal que celui-ci soit plus sensible au bruit présent, et requiert donc une régularisation plus importante.

Annexe B

Éléments d'optimisation

Cette annexe fournit quelques rappels concernant des algorithmes et techniques d'optimisation utilisées tout au long de cette thèse.

1 Algorithme de gradient conjugué

Version non-linéaire permettant la minimisation d'une fonctionnelle $\mathcal{J}(\mathbf{f})$ qui n'est alors pas nécessairement quadratique :

```
i := 0
f0 := estimation initiale
g0 := grad J(f0)
p0 := -g0
delta_0 = ||g0||^2
Début des itérations de GC
• tau_i := argmin_{tau > 0} J(f_i + tau p_i)
• f_{i+1} := f_i + tau_i p_{i+1}
• g_{i+1} = grad J(f_{i+1})
• delta_{i+1} := ||g_{i+1}||^2
• beta_i := delta_{i+1}/delta_i
• p_{i+1} := -g_{i+1} + beta_i p_i
• i := i + 1
Fin des itérations de gradient conjugué
```

À convergence, le minimum de \mathcal{J} est donc atteint en \mathbf{f}_i . Notons qu'il s'agit ici de la version de l'algorithme suivant Fletcher et Reeves [63]. D'autres approches existent, parmi les plus connues figurant celles de Polak–Ribière [157], et de Hestenes–Stiefel [88].

2 Algorithmes de Newton et quasi-Newton

La recherche d'un optimum par les méthodes de type Newton passe la résolution d'une équation de type $\nabla \mathcal{J}(\mathbf{f}) = 0$. Le schéma de Newton s'écrit alors

$$\mathcal{J}(\mathbf{f}_{k+1}) - \mathcal{J}(\mathbf{f}_k) \approx \mathcal{J}(\mathbf{f}_k) + \langle \nabla \mathcal{J}(\mathbf{f}_k), \mathbf{f}_{k+1} - \mathbf{f}_k \rangle + \frac{1}{2} \langle \Delta \mathcal{J}(\mathbf{f}_k)(\mathbf{f}_{k+1} - \mathbf{f}_k), \mathbf{f}_{k+1} - \mathbf{f}_k \rangle . \quad (\text{B.1})$$

Si l'on considère la valeur de \mathbf{f}_{k+1} qui minimise cette expression, c'est-dire que sa dérivée par rapport  \mathbf{f}_{k+1} est nulle, alors on obtient

$$\mathbf{f}_{k+1} = \mathbf{f}_k - (\Delta \mathcal{J}(\mathbf{f}_k)^{-1}) \nabla \mathcal{J}(\mathbf{f}_k) . \quad (\text{B.2})$$

L'évaluation de $\mathcal{J}(\mathbf{f}_k)^{-1}$ à chaque itération requiert cependant beaucoup de calculs, ce qui nuit à sa performance. Dans les schémas de type quasi-Newton, on ne va alors pas évaluer explicitement cette expression, mais simplement utiliser une approximation. Cette approximation peut alors prendre différentes formes suivant les différentes méthodes. On aura donc une formulation de la forme suivante,

$$\mathbf{f}_{k+1} = \mathbf{f}_k - \mathcal{H}^{-1}(\mathbf{f}_k) \nabla \mathcal{J}(\mathbf{f}_k), \quad (\text{B.3})$$

dans laquelle $\mathcal{H}^{-1}(\mathbf{f}_k) \approx (\Delta \mathcal{J}(\mathbf{f}_k)^{-1})$ est l'approximation du hessien considérée.

3 Multiplicateurs de Lagrange

Le multiplicateur de Lagrange est une méthode permettant de trouver les points stationnaires d'une fonction dérivable, d'une ou de plusieurs variables, et sous contraintes.

On cherche à trouver l'extremum d'une fonction φ de n variables à valeurs dans \mathbb{R} , ou encore une fonction d'un espace euclidien de dimension n , parmi les points respectant une contrainte, de type $\psi(x) = 0$ où ψ est une fonction du même ensemble de départ que φ . La fonction ψ est à valeurs dans un espace euclidien de dimension m . Elle peut encore être vue comme m fonctions à valeurs réelles, décrivant m contraintes.

Le point recherché est celui qui correspond au lieu où la différentielle de ψ possède un noyau orthogonal au gradient de φ en ce point. Le multiplicateur de Lagrange est une méthode offrant une condition nécessaire pour l'obtention d'un tel point. Les fonctions φ et ψ sont différentiables et leurs différentielles continues (fonctions de classe C^1). On considère Λ un vecteur pris dans l'ensemble d'arrivée de ψ , et la fonction L définie par

$$\begin{aligned} L(x, \Lambda) &= \varphi(x) + \langle \Lambda, \psi(x) \rangle \\ &= \varphi(x) + \sum_{k=1}^s \lambda_k \psi(x)_k \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

où l'opérateur $\langle ., . \rangle$ représente le produit scalaire. Si x_0 est une solution recherchée, il existe un vecteur Λ_0 tel que la fonction L admet une différentielle nulle au point (x_0, Λ_0) . Les coordonnées du vecteur Λ_0 sont appelées « multiplicateurs de Lagrange ». Cette technique permet de passer d'un problème d'optimisation sous contrainte(s), à une optimisation sans contrainte, celle de la fonction L .

On examine l'extremum de L en posant alors

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = 0, \quad (\text{B.5})$$

ce qui est équivalent à

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = - \sum_{k=1}^s \lambda_k \frac{\partial \psi_k}{\partial x_i}. \quad (\text{B.6})$$

On calcule les valeurs des multiplicateurs inconnus λ_k à l'aide des équations sur les contraintes et obtenons alors un extremum de L , qui satisfait en même temps aux contraintes ($\psi_k = 0$), ce qui est une condition nécessaire, pour que φ ait un extremum dans l'ensemble des points qui vérifient les contraintes.

4 Calcul de l'équation d'Euler appliquée aux fonctionnelles de déconvolution

4.1 Formule de Green

Soit Ω un domaine borné de \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3 , de frontière $\partial\Omega$, et $n(x)$ sa normale extérieure. Soit u et v deux fonctions régulières. Alors,

$$\int_{\Omega} (\Delta u)v \, dx = - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v \, d\sigma , \quad (\text{B.7})$$

avec σ la courbe frontière du domaine Ω .

Cette formule est également connue sous le nom de « première formule de Green ». Elle peut être vue comme une généralisation de l'intégration par parties.

4.2 Lemme fondamental du calcul des variations

Le lemme fondamental du calcul des variations est un lemme essentiel en optimisation. Il énonce que si f est une fonction continue sur l'intervalle $[a,b]$, et

$$\int_a^b f(x)h(x) \, dx = 0 \quad (\text{B.8})$$

pour toute fonction $h \in C^\infty[a,b]$ avec $h(a) = h(b) = 0$, alors f est identiquement nulle sur l'intervalle $[a,b]$.

Ce résultat est d'une importance première pour les calculs de dérivation des fonctionnelles traitées dans ce travail, calculs que nous détaillons dans ce qui suit.

4.3 Calcul des conditions d'optimalité des modèles de déconvolution

Considérons la modélisation du processus de floutage,

$$\mathbf{g} = H\mathbf{f} + \mathbf{b} . \quad (\text{B.9})$$

Nous montrons ici comment calculer les conditions d'optimalité d'Euler appliquées aux différentes fonctionnelles et opérateurs utilisés dans ce travail, dans le cadre des modèles de déconvolution avec régularisation H^1 , TV et Mumford-Shah, ainsi qu'avec éventuelle régularisation générale en $\varphi(|\nabla\mathbf{f}|)$.

Pour le terme de fidélité quadratique. Nous considérons ici la dérivation de l'expression $\mathcal{J}_1(\mathbf{f}) = \|H\mathbf{f} - \mathbf{g}\|^2$ par rapport à \mathbf{f} . On examine pour cela la valeur de

$$\|H(\mathbf{f} + \boldsymbol{\eta}) - \mathbf{g}\|^2 - \|H\mathbf{f} - \mathbf{g}\|^2 . \quad (\text{B.10})$$

On a

$$\begin{aligned}
 \|H(\mathbf{f} + \boldsymbol{\eta}) - \mathbf{g}\|^2 &= \|H\mathbf{f} + H\boldsymbol{\eta} - \mathbf{g}\|^2 \\
 &= \langle H\mathbf{f} + H\boldsymbol{\eta} - \mathbf{g}, H\mathbf{f} + H\boldsymbol{\eta} - \mathbf{g} \rangle \\
 &= \langle H\mathbf{f} - \mathbf{g}, H\mathbf{f} + H\boldsymbol{\eta} - \mathbf{g} \rangle + \langle H\boldsymbol{\eta}, H\mathbf{f} + H\boldsymbol{\eta} - \mathbf{g} \rangle \\
 &= \langle H\mathbf{f} - \mathbf{g}, H\mathbf{f} - \mathbf{g} \rangle + \langle H\mathbf{f} - \mathbf{g}, H\boldsymbol{\eta} \rangle + \langle H\boldsymbol{\eta}, H\mathbf{f} - \mathbf{g} \rangle \\
 &\quad + \langle H\boldsymbol{\eta}, H\boldsymbol{\eta} \rangle \\
 &= \|H\mathbf{f} - \mathbf{g}\|^2 + 2\langle H\mathbf{f} - \mathbf{g}, H\boldsymbol{\eta} \rangle + \|H\boldsymbol{\eta}\|^2 \\
 &= \|H\mathbf{f} - \mathbf{g}\|^2 + 2\langle H^*(H\mathbf{f} - \mathbf{g}), \boldsymbol{\eta} \rangle + o(|\boldsymbol{\eta}|) ,
 \end{aligned} \tag{B.11}$$

où H^* est l'adjoint de H .

D'où il s'en suit que le gradient de $\mathcal{J}_1(\mathbf{f}) = \|H\mathbf{f} - \mathbf{g}\|^2$ est

$$\nabla \mathcal{J}_1(\mathbf{f}) = 2H^*(H\mathbf{f} - \mathbf{g}) , \tag{B.12}$$

ce qui donne sous forme convolutive

$$\nabla \mathcal{J}_1(\mathbf{f}) = 2h^* * (h * f - g) , \tag{B.13}$$

où $h^*(x,y) = h(-x, -y)$.

Pour la régularisation quadratique H^1 . Nous montrons maintenant comment dériver le terme de régularisation $\mathcal{J}_2(\mathbf{f}) = \|\nabla \mathbf{f}\|^2$. On examine pour cela de même la valeur de l'expression

$$\|\nabla(\mathbf{f} + \boldsymbol{\eta})\|^2 - \|\nabla \mathbf{f}\|^2 . \tag{B.14}$$

On a

$$\|\nabla(\mathbf{f} + \boldsymbol{\eta})\|^2 = \|\nabla \mathbf{f} + \nabla \boldsymbol{\eta}\|^2 \tag{B.15}$$

$$= \|\nabla \mathbf{f}\|^2 + 2\langle \nabla \mathbf{f}, \nabla \boldsymbol{\eta} \rangle + \|\nabla \boldsymbol{\eta}\|^2 \tag{B.16}$$

$$= \|\nabla \mathbf{f}\|^2 - 2\langle \Delta \mathbf{f}, \boldsymbol{\eta} \rangle + o(\boldsymbol{\eta}) , \tag{B.17}$$

où le changement dans le deuxième terme se fait par application de la formule de Green (B.7), et en considérant des conditions de bords de type Neumann, soit

$$\frac{df}{dn} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \text{ la frontière du domaine,} \tag{B.18}$$

où n est la normale extérieure à $\partial\Omega$.

D'où il s'en suit que le gradient de $\mathcal{J}_2(\mathbf{f}) = \|\nabla \mathbf{f}\|^2$ est

$$\nabla \mathcal{J}_2(\mathbf{f}) = -2\Delta \mathbf{f} . \tag{B.19}$$

Pour la régularisation TV. On dérive ici l'expression $\mathcal{J}_3(\mathbf{f}) = \|\nabla \mathbf{f}\|$ par rapport à \mathbf{f} . On examine donc

$$\|\nabla(\mathbf{f} + \boldsymbol{\eta})\| - \|\nabla \mathbf{f}\| . \tag{B.20}$$

On a

$$\|\nabla(\mathbf{f} + \boldsymbol{\eta})\| = \sqrt{\|\nabla(\mathbf{f} + \boldsymbol{\eta})\|^2} \quad (\text{B.21})$$

$$= \sqrt{\|\nabla\mathbf{f}\|^2 + 2\langle\nabla\mathbf{f}, \boldsymbol{\eta}\rangle + o(|\boldsymbol{\eta}|)} \quad (\text{B.22})$$

$$= \sqrt{\|\nabla\mathbf{f}\|^2 + 2\langle\nabla\mathbf{f}, \boldsymbol{\eta}\rangle \frac{\|\nabla\mathbf{f}\|}{\|\nabla\mathbf{f}\|} + o(|\boldsymbol{\eta}|)} \quad (\text{B.23})$$

$$= \sqrt{\left(\|\nabla\mathbf{f}\| + \frac{\langle\nabla\mathbf{f}, \boldsymbol{\eta}\rangle}{\|\nabla\mathbf{f}\|}\right)^2 + o(|\boldsymbol{\eta}|)} \quad (\text{B.24})$$

$$= \|\nabla\mathbf{f}\| + \frac{\langle\nabla\mathbf{f}, \boldsymbol{\eta}\rangle}{\|\nabla\mathbf{f}\|} + o(|\boldsymbol{\eta}|) \quad (\text{B.25})$$

D'où il s'en suit que le gradient de $\mathcal{J}_3(\mathbf{f}) = \|\nabla\mathbf{f}\|$ est

$$\nabla\mathcal{J}_3(\mathbf{f}) = -\operatorname{div}\left(\frac{\nabla\mathbf{f}}{\|\nabla\mathbf{f}\|}\right), \quad (\text{B.26})$$

également par application de la formule de Green.

Pour le cas général de régularisation en $\varphi(|\nabla\mathbf{f}|)$. Ceci est donné à titre indicatif, dans le cas où l'on souhaite appliquer les conditions d'optimalité d'Euler à des fonctionnelles comprenant d'autres opérateurs de régularisation. On examine donc l'expression $\varphi(|\nabla(\mathbf{f} + \boldsymbol{\eta})|) - \varphi(|\nabla\mathbf{f}|)$:

$$\varphi(|\nabla(\mathbf{f} + \boldsymbol{\eta})|) = \varphi\left(|\nabla\mathbf{f}| + \frac{\nabla\mathbf{f}\nabla\boldsymbol{\eta}}{|\nabla\mathbf{f}|} + o(|\boldsymbol{\eta}|)\right) \quad (\text{B.27})$$

$$= \varphi(|\nabla\mathbf{f}|) + \frac{\nabla\mathbf{f}\nabla\boldsymbol{\eta}}{|\nabla\mathbf{f}|}\varphi'(|\nabla\mathbf{f}|) + o(|\boldsymbol{\eta}|) \quad (\text{B.28})$$

$$= \varphi(|\nabla\mathbf{f}|) - \operatorname{div}\left(\frac{\varphi'(|\nabla\mathbf{f}|)}{|\nabla\mathbf{f}|}\nabla\mathbf{f}\right) + o(|\boldsymbol{\eta}|). \quad (\text{B.29})$$

D'où il s'en suit que le gradient de $\mathcal{J}_4(\mathbf{f}) = \|\varphi(\nabla\mathbf{f})\|$ est

$$\nabla\mathcal{J}_4(\mathbf{f}) = -\operatorname{div}\left(\frac{\varphi'(|\nabla\mathbf{f}|)}{\|\nabla\mathbf{f}\|}\nabla\mathbf{f}\right). \quad (\text{B.30})$$

Pour la régularisation de Mumford-Shah (MS). On montre ici le calcul de dérivation en v de la fonctionnelle

$$\mathcal{G}_\eta(f, v) = \xi \int_\Omega v^2 |\nabla f|^2 + \int_\Omega \left(\eta |\nabla v|^2 + \frac{(v-1)^2}{4\eta} \right). \quad (\text{B.31})$$

Posons $\mathcal{F}(v) = \mathcal{G}_\eta(f, v)$. Alors on a

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}(v + a) &= \langle (v + a)^2, |\nabla f|^2 \rangle + \langle \eta, |\nabla(v + a)|^2 \rangle + \langle (v - 1 + a)^2, \frac{1}{4\eta} \rangle \\
 &= \langle v^2, |\nabla f|^2 \rangle + \langle a^2, |\nabla f|^2 \rangle + \langle 2va, |\nabla f|^2 \rangle + \langle \eta, (\nabla v + \nabla a)^2 \rangle + \langle (v - 1)^2, \frac{1}{4\eta} \rangle \\
 &\quad + \langle a^2 + 2a(v - 1), \frac{1}{4\eta} \rangle \\
 &= \langle v^2, |\nabla f|^2 \rangle + \langle a^2, |\nabla f|^2 \rangle + \langle 2va, |\nabla f|^2 \rangle + \langle \eta, (\nabla v)^2 \rangle + \langle \eta, (\nabla a)^2 \rangle \\
 &\quad + \langle \eta, 2\nabla a \nabla v \rangle + \langle (v - 1)^2, \frac{1}{4\eta} \rangle + \langle a^2, \frac{1}{4\eta} \rangle + \langle (2(v - 1)), \frac{1}{4\eta} \rangle \\
 &= \langle v^2, |\nabla f|^2 \rangle + \langle 2va, |\nabla f|^2 \rangle + \langle \eta, (\nabla v)^2 \rangle + \langle \eta, 2\nabla a \nabla v \rangle + \langle (v - 1)^2, \frac{1}{4\eta} \rangle \\
 &\quad + \langle (2(v - 1)), \frac{1}{4\eta} \rangle + o(|a|) .
 \end{aligned} \tag{B.32}$$

D'où

$$\mathcal{F}(v + a) - \mathcal{F}(v) = \langle 2va, |\nabla f|^2 \rangle + \langle \eta, 2\nabla a \nabla v \rangle + \frac{v - 1}{2\eta} . \tag{B.33}$$

Et donc, par le lemme fondamental du calcul des variations, et la formule de Green,

$$\nabla \mathcal{F}(v) = 2v|\nabla f|^2 - 2\eta \nabla^2 v + \frac{v - 1}{2} . \tag{B.34}$$

Bibliographie

- [1] R. A. ADAMS et J. J. F. FOURNIER : *Sobolev spaces*. Academic Press, 2003.
- [2] R. ALICANDRO, A. BRAIDES et J. SHAH : Free-discontinuity problems via functionals involving the L^1 -norm of the gradient and their approximation. *Interfaces and Free Boundaries*, 1, 1999.
- [3] L. ALVAREZ et L. MAZORRA : Signal and image restoration using shock filters and anisotropic diffusion. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 31(2), 1994.
- [4] L. AMBROSIO, N. FUSCO et D. PALLARA : *Functions of Bounded Variation and Free Discontinuity Problems (Oxford Mathematical Monographs)*. Oxford University Press, 2000.
- [5] L. AMBROSIO et V. M. TORTORELLI : Approximation of functionals depending on jumps by elliptic functionals via Γ -convergence. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, XLIII, 1990.
- [6] G. AUBERT et P. KORNPROBST : *Mathematical Problems in Image Processing : Partial Differential Equations and the Calculus of Variations*. Applied Mathematical Sciences. Springer-Verlag, 2002.
- [7] G. AYERS et J. C. DAINTY : Iterative blind deconvolution method and its applications. *Optics Letters*, 13(7), 1988.
- [8] M. BANHAM et A. KATSAGGELOS : Spatially adaptive wavelet-based multiscale image restoration. *IEEE Transactions on Image Processing*, 5(4), 1996.
- [9] M. R. BANHAM et A. K. KATSAGGELOS : Digital image restoration. *IEEE Signal Processing magazine*, 3 1997.
- [10] L. BAR, A. BROOK, N. SOCHEN et N. KIRYATI : Color image deblurring with impulsive noise. In *Geometric and Level Sets Methods in Computer Vision (VLSM'05)*, p. 49–60, 2005.
- [11] L. BAR, A. BROOK, N. SOCHEN et N. KIRYATI : Deblurring of color images corrupted by impulsive noise. *IEEE Trans. on Image Processing*, 16(4), 2007.
- [12] L. BAR, N. SOCHEN et N. KIRYATI : Image deblurring in the presence of impulsive noise. *International Journal of Computer Vision*, 70(3), 2006.
- [13] L. BAR, N. SOCHEN et N. KIRYATI : Semi-blind image restoration via Mumford-Shah regularization. *IEEE Transactions on Image Processing*, 15(2), 2006.
- [14] J. BECT, L. BLANC-FERAUD, G. AUBERT et A. CHAMBOLLE : A l^1 -unified variational framework for image restoration. In *European Conference on Computer Vision*, 2004.
- [15] M. BELGE et E. MILLER : Wavelet domain image restoration using edge preserving prior models. In *International Conference on Image Processing*, 1998.
- [16] M. BERTERO et P. BOCCACCI : *Introduction to inverse problems in imaging*. Institute of Physics, 1998.

- [17] D. P. BERTSEKAS : Projected Newton methods for optimization problems with simple constraints. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 20(2), 1982.
- [18] J. BIEMOND, R. L. LAGENDIJK et R. M. MERSEREAU : Iterative methods for image deblurring. *Proc. IEEE*, 78, 1990.
- [19] J. M. BIOUCAS-DIAS : Bayesian wavelet-based image deconvolution : A GEM algorithm exploiting a class of heavy-tailed priors. *IEEE Transactions on Image Processing*, 15(4), 2006.
- [20] J. M. BIOUCAS-DIAS, M. A. T. FIGUEIREDO et J. P. OLIVEIRA : Adaptive total variation-based image deconvolution : a majorization-minimization approach. In *International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 2006.
- [21] J. M. BIOUCAS-DIAS, M. A. T. FIGUEIREDO et J. P. OLIVEIRA : Total variation-based image deconvolution : a majorization-minimization approach. In *European Signal Processing Conference*, 2006.
- [22] M. J. BLACK et A. RANGARAJAN : Image quality assessment : From error visibility to structural similarity. *International Journal of Computer Vision*, 19(1), 1996.
- [23] L. BLANC-FERAUD : *Sur quelques problèmes inverses en traitement d'images*. Dissertation habilitationis, Université de Nice, 2000.
- [24] P. BLOMGREN et T. F. CHAN : Color TV : Total variation methods for restoration of vector-valued images. *IEEE Transactions on Image Processing*, 7(3), 1998.
- [25] A. BOSCO, A. BRUNA, G. MESSINA et G. SPAMPINATO : Fast method for noise level estimation and integrated noise reduction. *IEEE Transactions on Consumer Electronics*, 51(3), 2005.
- [26] A. BRAIDES : Introduction to homogenization and Gamma-convergence. "<http://http://axp.mat.uniroma2.it/~braides/0102/Dottorato/BraidesICTP.pdf>", 1993. Lecture Notes.
- [27] A. BRAIDES : *Approximation of free-discontinuity problems*. Lecture Notes in Mathematics, 1998.
- [28] M. M. BRONSTEIN, A. M. BRONSTEIN, M. ZIBULEVSKY et Y. Y. ZEEVI : Blind deconvolution of images using optimal sparse representations. *IEEE Transactions on Image Processing*, 14(6), 2005.
- [29] A. BROOK, R. KIMMEL et N. A. SOCHEN : Variational restoration and edge detection for color images. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 18, 2003.
- [30] P. CAMPISI et K. EGIAZARIAN : *Blind image deconvolution, theory and applications*. CRC Press, 2007.
- [31] M. CANNON : Blind deconvolution of spatially invariant image blurs with phase. *IEEE Transactions on Acoustic, Speech, and Signal Processing*, 24(1), 1976.
- [32] A. CARASSO : Direct blind deconvolution. *SIAM Journal of Applied Mathematics*, 61(6), 2001.
- [33] A. CARASSO : The APEX method in image sharpening and the use of low exponent Lévy stable laws. *SIAM Journal of Applied Mathematics*, 63(2), 2002.
- [34] J. N. CARON, N. M. NAMAZI, R. L. LUCKE, C. J. ROLLINS et P. R. LYNN : Blind data restoration with an extracted filter function. *Optics Letters*, 26(15), 2001.
- [35] J. N. CARON, N. M. NAMAZI et C. J. ROLLINS : Noninterative blind data restoration by use of an extracted filter function. *Applied Optics*, 41(32), 2002.
- [36] A. CHAMBOLLE : An algorithm for total variation minimization and applications. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 20(1-2), 2004.

- [37] A. CHAMBOLLE et P.-L. LIONS : Image recovery via total variation minimization and related problems. *Numerische Mathematik*, 76(2), 1997.
- [38] T. F. CHAN et S. ESEDOĞLU : Aspects of total variation regularized L^1 function approximation. *SIAM J. Appl. Math.*, 65(5), 2005.
- [39] T. F. CHAN et J. SHEN : *Image processing and analysis : variational, PDE, wavelet, and stochastic methods*. SIAM, 2005.
- [40] T. F. CHAN et C.-K. WONG : Total variation blind deconvolution. *IEEE Transactions on Image Processing*, 7(3), 1998.
- [41] T. F. CHAN et C. K. WONG : Convergence of the alternating minimization algorithm for blind deconvolution. *Linear Algebra and its Applications*, 316(1-3), 2000.
- [42] M. M. CHANG, A. M. TEKALP et A. T. ERDEM : Blur identification using the bispectrum. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 39(10), 1991.
- [43] S.-M. CHAO et D.-M. TSAI : Astronomical image restoration using an improved anisotropic diffusion. *Pattern Recognition Letters*, 2005.
- [44] P. CHARBONNIER, L. BLANC-FÉRAUD, G. AUBERT et M. BARLAUD : Deterministic edge-preserving regularization in computed imaging. *IEEE Transactions on Image Processing*, 6(2), 1997.
- [45] R. CHARTRAND et B. WOHLBERG : Total-variation regularization with bound constraints. In *Proceedings of IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICASSP)*, p. 766–769, 2010.
- [46] L. CHEN et K.-H. YAP : A fuzzy k-nearest-neighbor algorithm to blind image deconvolution. In *IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics*, vol. 3, 2003.
- [47] L. CHEN et K.-H. YAP : Identification of blur support size in blind image deconvolution. In *Proc. Int. Conf. on Information, Communications and Signal Processing and Pacific-Rim Conference on Multimedia*, vol. 1, p. 503–507, 2003.
- [48] L. CHEN et K.-H. YAP : A soft double regularization approach to parametric blind image deconvolution. *IEEE Transactions on Image Processing*, 14(5), 2005.
- [49] L. CHEN et K.-H. YAP : Efficient discrete spatial techniques for blur support identification in blind image deconvolution. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 54(4), 2006.
- [50] S. CHO, Y. MATSUSHITA et S. LEE : Removing non-uniform motion blur from images. In *Proceedings of International Conference on Computer Vision (ICCV)*, 2007.
- [51] T. W. S. CHOW, X.-D. LI et K.-T. NG : Double-regularization approach for blind restoration of multichannel imagery. *IEEE Transactions on Circuits and Systems-I : Fundamental Theory and Applications*, 48(9), 2001.
- [52] S. COLONNESE, P. CAMPISI et G. P. G. SCARANO : Blind image deblurring driven by nonlinear processing in the edge domain. *EURASIP Journal on Applied Signal Processing*, 2004(16), 2004.
- [53] P. L. COMBETTES et J.-C. PESQUET : Image restoration subject to a total variation constraint. *IEEE Transactions on Image Processing*, 13(9), 2004.
- [54] A. R. CONN, N. I. M. GOULD et P. L. TOINT : *Trust-region methods*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2000.
- [55] I. DAUBECHIES et G. TESCHKE : Variational image restoration by means of wavelets : Simultaneous decomposition, deblurring, and denoising. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 19(1), 2005.

- [56] B. L. K. DAVEY, R. G. LANE et R. H. T. BATES : Blind deconvolution of a noisy complex-valued image. *Optics communications*, 69(5/6), 1989.
- [57] M. DONATELLI : A multigrid for image deblurring with Tikhonov regularization. *Numerical linear algebra with applications*, 12(8), 2005.
- [58] D. L. DONOHO : Nonlinear solution of linear inverse problems by wavelet-vaguelette decomposition. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 2, 1995.
- [59] D. L. DONOHO, I. M. JOHNSTONE, J. C. HOCH et A. S. STERN : Maximum entropy and the nearly black object. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, 54(1), 1992.
- [60] R. FERGUS, B. SINGH, A. HERTZMANN, S. T. ROWEIS et W. T. FREEMAN : Removing camera shake from a single photograph. In *SIGGRAPH*, 2006.
- [61] M. A. FIGUEIREDO et R. D. NOWAK : An EM algorithm for wavelet-based image restoration. *IEEE Transactions on Image Processing*, 12(8), 2003.
- [62] M. A. T. FIGUEIREDO et R. D. NOWAK : A bound optimization approach to wavelet-based image deconvolution. In *International Conference on Image Processing*, 2005.
- [63] R. FLECTCHER et C. M. REEVES : Function minimization by conjugate gradients. *Computer Journal*, 7(2), 1964.
- [64] A. FOI : *Anisotropic nonparametric image processing : theory, algorithms and applications*. Dissertatio doctoralis, Politecnico di Milano, 2005.
- [65] А. Н. Тихонов : О регуляризации некорректно поставленных задач. *Доклады А. Н. СССР*, 153(1), 1963.
- [66] А. Н. Тихонов : О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации. *Доклады А. Н. СССР*, 151(3), 1963.
- [67] Л. М. БРЭГМАН : Релаксационный метод нахождения общей точки выпуклых множеств и его применение для решения задач выпуклого программирования. *Журнал вычислительной математики и математической физики*, 7(3), 1967.
- [68] А. Н. Тихонов et В. Я. АРСЕНИН : *Методы решения некорректных задач*. Наука, 1974.
- [69] О. В. БЕСОВ, В. П. ИЛЬИН et С. М. НИКОЛЬСКИЙ : *Интегральные представления функций и теоремы вложения*. Наука, 1996.
- [70] А. Н. Тихонов, А. В. Гончарский, В. В. СТЕПАНОВ et И. В. КОЧИКОВ : Некорректные задачи обработки изображений. *Доклады А. Н. СССР*, 290(6), 1986.
- [71] H. FU, M. K. NG, M. NIKOLOVA et J. L. BARLOW : Efficient minimization methods of mixed l^2 - l^1 and l^1 - l^1 norms for image restoration. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 27(6), 2006.
- [72] S. GABARDA et G. CRISTÓBAL : An evolutionaty blind image deconvolution algorithm through the pseudo-Wigner distribution. *Journal of Visual Communication and Image Representation*, 17(5), 2006.
- [73] N. P. GALATSANOS et R. T. CHIN : Digital restoration of multichannel images. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, Signal Processing*, 39:415–421, 1989.
- [74] D. GEMAN et C. YANG : Nonlinear image recovery with half-quadratic regularization. *IEEE Transactions on Image Processing*, 4(7), 1995.
- [75] S. GEMAN et D. E. MCCLURE : Bayesian image analysis : an application to single photon emission tomography. *Proceedings of the American Statistical Association. Statistical Computing Section*, p. 12–18, 1985.

- [76] G. GILBOA, N. SOCHEN et Y. ZEEVI : Regularized shock filters and complex diffusion. *In European Conference on Computer Vision*, 2002.
- [77] G. GILBOA, N. SOCHEN et Y. Y. ZEEVI : Image enhancement and denoising by complex diffusion processes. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 26(8), 2004.
- [78] A. GOLDENSHLUGER et A. NEMIROVSKI : On spatial adaptive estimation of nonparametric regression. *Mathematical Methods of Statistics*, 6, 1997.
- [79] R. C. GONZALEZ et R. E. WOODS : *Digital Image Processing, 2nd edition*. Prentice Hall, 2002.
- [80] Y. GOUSSEAU et J.-M. MOREL : Are natural images of bounded variation ? *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 33(3), 2001.
- [81] P. J. GREEN : Bayesian reconstruction from emission tomography data using a modified EM algorithm. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 9(1), 1990.
- [82] J. HADAMARD : *Lectures on Cauchy's problem in linear partial differential equations*. Yale University Press, 1923.
- [83] A. HAMMER, J. DUMOULIN, B. VOZEL et K. CHEHDI : Deblurring of UAV aerial images via Mumford-Shah / TV regularisation. *In International Symposium on Image and Signal Processing and Analysis*, 2007.
- [84] P. C. HANSEN, J. G. NAGY et D. P. O'LEARY : *Deblurring images. Matrices, Spectra and Filtering*. SIAM, 2006.
- [85] L. HE, A. MARQUINA et S. J. OSHER : Blind deconvolution using TV regularization and Bregman iteration. *International Journal of Imaging Systems and Technology*, 15(1), 2005.
- [86] Y. HE, K.-H. HAP, L. CHEN et L.-P. CHAU : Blind color image deconvolution based on wavelet decomposition. *In International Conference on Image Processing*, 2005.
- [87] C. HEINRICH et G. DEMOMENT : Minimization of strictly convex functions : an improved optimality test based on Fenchel duality. *Inverse Problems*, 16(3), 2000.
- [88] M. HESTENES et E. STIEFEL : Methods of conjugate gradients for solving linear systems. *Journal of Research of the National Bureau of Standards*, 49, 1952.
- [89] J. A. HOGBÖM : Aperture synthesis with a non-regular distribution of interferometer baselines. *Astronomy and Astrophysics Supplement Series*, 15, 1974.
- [90] T. J. HOLMES : Blind deconvolution quantum-limited incoherent imagery : maximum likelihood approach. *Journal of the Optical Society of America A*, 9(7), 1992.
- [91] K.-Q. HUANG, Z.-Y. WU, G. S. K. FUNG et F. H. Y. CHAN : Color image denoising with wavelet thresholding based on human visual system model. *Signal Processing : Image Communication*, 20(2), 2005.
- [92] J. IDIER : *Approche bayésienne pour les problèmes inverses*. Hermès Sciences, 2001.
- [93] A. JALOBEANU, L. BLANC-FÉRAUD et J. ZERUBIA : Satellite image deblurring using complex wavelet packets. *International Journal of Computer Vision*, 51(3), 2003.
- [94] A. JALOBEANU, L. BLANC-FÉRAUD et J. ZERUBIA : An adaptive gaussian model for satellite image deblurring. *IEEE Transactions on Image Processing*, 13(4), 2004.
- [95] J. JIA : Single image motion deblurring using transparency. *In CVPR*, 2007.
- [96] M. JIANG et G. WANG : Development of blind image deconvolution and its applications. *Journal of X-Ray Science and Technology*, 11(1), 2003.
- [97] M. JUNG et L. VESE : Image restoration via nonlocal Mumford-Shah regularizers. Rapport technique, Université de Californie - Los Angeles, 2009.

- [98] R. KAFTORY, N. SOCHEN et Y. Y. ZEEVI : Variational blind deconvolution of multi-channel images. *International Journal of Imaging Systems and Technology*, 15(1), 2005.
- [99] J. KALIFA : *Restauration minimax et déconvolution dans une base d'ondelettes miroir*. Dissertatio doctoralis, École Polytechnique - Paris, 1999.
- [100] J. KALIFA, S. MALLAT et B. ROUGÉ : Deconvolution by thresholding in mirror wavelet bases. *IEEE Transactions on Image Processing*, 12(4), 2003.
- [101] V. KATKOVNIK, K. EGIAZARIAN et J. ASTOLA : A spatially adaptive nonparametric regression image deblurring. *IEEE Transactions on Image Processing*, 14(10), 2005.
- [102] V. KATKOVNIK, K. EGIAZARIAN et J. ASTOLA : Adaptive window size image denoising based on intersection of confidence intervals ICI rule. *Journal of Mathematical Imaging And Vision*, 16(3), 2002.
- [103] V. KATKOVNIK, D. PALIY, K. EGIAZARIAN et J. ASTOLA : Frequency domain blind deconvolution in multiframe imaging using anisotropic spatially-adaptive denoising. *In European Signal Processing Conference*, 2006.
- [104] L. KLAINE : *Filtrage et restauration des images numériques*. Dissertatio doctoralis, Université de Rennes I, 2004.
- [105] I. KOPRIVA : Approach to blind image deconvolution by multiscale subband decomposition and independent component analysis. *Journal of the Optical Society of America A*, 24(4), 2007.
- [106] I. KOPRIVA, D. J. GARROOD et V. BORJANOVIĆ : Single frame blind image deconvolution by non-negative sparse matrix factorization. *Optics Communications*, 266(2), 2006.
- [107] D. KRISHNAN, P. LIN et A. Y. YIP : A primal-dual active-set method for non-negativity constrained total variation deblurring problems. *IEEE Transactions on Image Processing*, 16(11), 2007.
- [108] D. KUNDUR et D. HATZINAKOS : Blind image deconvolution. *IEEE Signal Processing magazine*, 5 1996.
- [109] C. LABAT : *Algorithmes d'optimisation de critères pénalisés pour la restauration d'images. Application à la déconvolution de trains d'impulsions en imagerie ultrasoudure*. Dissertatio doctoralis, Université de Nantes, 2006.
- [110] C. LABAT et J. IDIER : Comparaison entre les algorithmes semi-quadratiques et gradients conjugués préconditionnés pour la restauration d'image préservant les bords. *In GRETSI (3)*, p. 651–654, 2005.
- [111] S. LADJAL : Estimation du flou dans les images naturelles. *In Reconnaissance des Formes et Intelligence Artificielle*, 2006.
- [112] L. LANDWEBER : An iteration formula for Fredholm integral equations of the first kind. *American Journal of Mathematics*, 73(3), 1951.
- [113] R. G. LANE : Blind deconvolution of speckle images. *Journal of the Optical Society of America A*, 9(9), 1992.
- [114] R. G. LANE et R. H. T. BATES : Automatic multidimensional deconvolution. *Journal of the Optical Society of America A*, 4(1), 1987.
- [115] A. LEVIN : Blind motion deblurring using image statistics. *In Advances in Neural Information Processing Systems (NIPS)*, 2006.
- [116] D. LI, R. MERSEREAU et S. SIMSK : Blur identification based on kurtosis minimization. *In International Conference on Image Processing*, 2005.

- [117] D. LI, S. SIMSKE et R. M. MERSEREAU : Blind image deconvolution using constrained variance maximization. In *Conference Record of the Thirty-Eighth Asilomar Conference on Signals, Systems, and Computers*, 2004.
- [118] Y. LI et F. SANTOSA : A computational algorithm for minimizing total variation in image restoration. *IEEE Transactions on Image Processing*, 5(6), 1996.
- [119] S. LINTNER et F. MALGOUYRES : Solving a variational image restoration model which involves L^∞ constraints. *Inverse Problems*, 20(3), 2004.
- [120] V. LOYEV et Y. YITZHAKY : Initialization of iterative parametric algorithms for blind deconvolution of motion-blurred images. *Applied Optics*, 45, 2006.
- [121] D. P. K. LUN, T. C. L. CHAN, T.-C. HSUNG, D. D. FENG et Y.-H. CHAN : Efficient blind image restoration using discrete periodic Radon transform. *IEEE Transactions on Image Processing*, 13(2), 2004.
- [122] P. MAGAIN, F. COURBIN et S. SOHY : Deconvolution with correct sampling. *Astrophysical Journal*, 494, 1998.
- [123] S. MALLAT : A theory for multiresolution signal decomposition : the wavelet representation. *IEEE Transactions on Image Processing*, 11(7), 1999.
- [124] S. MALLAT : *Une exploration des signaux en ondelettes*. École Polytechnique, 2001.
- [125] I. MARKOVSKY et S. V. HUFFEL : Overview of total least squares methods. *Signal Processing*, 87, 2007.
- [126] A. MARQUINA : Inverse scale space methods for blind deconvolution. Rapport technique, Université de Californie - Los Angeles, 2006.
- [127] N. MASTRONARDI, P. LEMMERLING, A. KALSI, D. P. O'LEARY et S. V. HUFFEL : Implementation of the regularized structured total least squares algorithms for blind image deblurring. *Linear Algebra and its Applications*, 391, 2004.
- [128] B. C. MCCALLUM : Blind deconvolution by simulated annealing. *Optics Communications*, 75(2), 1990.
- [129] Y. MEYER : *Oscillating patterns in image processing and nonlinear evolution equations*, vol. 22 de *University Lecture Series*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2001. The fifteenth Dean Jacqueline B. Lewis memorial lectures.
- [130] M. MIGNOTTE : An adaptive segmentation-based regularization term for image restoration. In *International Conference on Image Processing*, 2005.
- [131] J. W. MISKIN et D. J. C. MACKAY : Ensemble learning for blind image separation and deconvolution. In *Advances in independent component analysis*, 2000.
- [132] M. E. MOGHADDAM et M. JAMZAD : Motion blur identification in noisy images using mathematical models and statistical measures. *Pattern Recognition*, 40(7), 2007.
- [133] R. MOLINA, J. MATEOS et A. KATSAGGELOS : Blind deconvolution using a variational approach to parameter, image, and blur estimation. *IEEE Transactions on Image Processing*, 15(12), 2006.
- [134] R. MOLINA, J. MATEOS, A. KATSAGGELOS et M. VEGA : Bayesian multichannel image restoration using compound Gauss-Markov random fields. *IEEE Transactions on Image Processing*, 12(12), 2003.
- [135] J. MONEY et S. KANG : Total variation minimizing blind deconvolution with shock filter reference. *Image and Vision Computing*, 26(2), 2008.
- [136] D. MUMFORD et J. SHAH : Optimal approximations by piecewise smooth functions and associated variational problems. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 42:577–684, 1989.

- [137] R. NEELAMANI : Wavelet-based deconvolution for ill-conditioned system. *Dissertatio magisterialis*, Rice University, 1999.
- [138] R. NEELAMANI : *Inverse problems in image processing*. *Dissertatio doctoralis*, Rice University, 2003.
- [139] R. NEELAMANI, H. CHOI et R. BARANIUK : ForWaRD : Fourier-wavelet regularized deconvolution for ill-conditioned systems. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 52(2), 2004.
- [140] M. K. NG, R. J. PLEMMONS et S. QIAO : Regularization of RIF blind image deconvolution. *IEEE Transactions on Image Processing*, 9(6), 2000.
- [141] N. NGUYEN et P. MILANFAR : Efficient generalized cross-validation with applications to parametric image restoration and resolution enhancement. *IEEE Transactions on Image Processing*, 10(9), 2001.
- [142] M. NIKOLOVA : Minimizers of cost-functions involving nonsmooth data-fidelity terms. application to the processing of outliers. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 40(3), 2002.
- [143] M. NIKOLOVA : Weakly constrained minimization : Application to the estimation of images and signals involving constant regions. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 21(2), 2004.
- [144] M. NIKOLOVA : Analysis of the recovery of edges in images and signals by minimizing nonconvex regularized least-squares. *SIAM Journal on Multiscale Modeling and Simulation*, 4(3), 2005.
- [145] M. NIKOLOVA et R. H. CHAN : The equivalence of half-quadratic minimization and the gradient linearization iteration. *IEEE Transactions on Image Processing*, 16(6), 2007.
- [146] J. P. OLIVEIRA, J. M. BIOCAS-DIAS et M. A. T. FIGUEIREDO : Adaptive total variation image deblurring : a majorization-minimization approach. *Signal Processing*, 89(9), 2009.
- [147] J. P. OLIVEIRA, M. A. T. FIGUEIREDO et J. M. BIOCAS-DIAS : Blind estimation of motion blur parameters for image deconvolution. In *Iberian Conference on Pattern Recognition and Image Analysis*, p. 604–611, 2007.
- [148] M. ŠOREL et J. FLUSSER : Space-variant restoration of images degraded by camera motion blur. *IEEE Transactions on Image Processing*, 17(2), 2008.
- [149] M. ŠOREL, F. ŠROUBEK et J. FLUSSER : Multichannel deblurring of digital images. *Kybernetika*, 47(3), 2011.
- [150] S. OSHER, M. BURGER, D. GOLDFARB, J. XU et W. YIN : An iterative regularization method for total variation based image restoration. *Multiscale Modeling and Simulation*, 4(2), 2005.
- [151] S. OSHER et L. RUDIN : Feature-oriented image enhancement using shock filters. *SIAM Journal of numerical analysis*, 27(4), 1990.
- [152] C. PAIGE et M. SAUNDERS : Solution of sparse indefinite systems of linear equations. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 12:617–629, 1975.
- [153] G. PANCI, P. CAMPISI, S. COLONNESE et G. SCARANO : Multichannel blind image deconvolution using the Bussgang algorithm : Spatial and multiresolution approaches. *IEEE Transactions on Image Processing*, 12(11), 2003.
- [154] V. M. PATEL, G. R. EASLEY et D. M. HEALY : Shearlet-based deconvolution. *IEEE Transactions on Image Processing*, 18(12), 2009.

- [155] E. L. PENNEC : *Bandelettes et représentation géométrique des images*. Dissertatio doctoralis, École Polytechnique - Paris, 2002.
- [156] P. PERONA et J. MALIK : Scale-space and edge detection using anisotropic diffusion. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 12(7), 1990.
- [157] E. POLAK : *Optimization. Algorithms and consistent approximations*. Springer-Verlag, 1997.
- [158] A. PRUESSNER et D. P. O'LEARY : Blind deconvolution using a regularized structured total least norm. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 24(4), 2002.
- [159] J. RASMUSON, J. HASSELGREN et T. AKENINE-MÖLLER : Exact and error-bounded approximate color buffer compression and decompression. *Graphics Hardware*, 24(4), 2007.
- [160] S. J. REEVES : *A cross-validation approach to image restoration and blur identification*. Dissertatio doctoralis, Georgia Institute of Technology, 1990.
- [161] S. J. REEVES : Fast image restoration without boundary artifacts. *IEEE Transactions on Image Processing*, 14(10), 2005.
- [162] S. J. REEVES et R. M. MERSEREAU : Blur identification by the method of generalized cross-validation. *IEEE Transactions on Image Processing*, 1(3), 1992.
- [163] H. RHO, C. S. HSU et H. KIM : A reduced-order H_∞ deconvolution filter design using bounded real lemma. *Signal Processing*, 86(7), 2006.
- [164] P. D. ROMERO et V. F. CANDELA : Blind deconvolution models regularized by fractional powers of the Laplacian. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 32(2), 2008.
- [165] F. ŠROUBEK et J. FLUSSER : Multichannel blind iterative image restoration. *IEEE Transactions on Image Processing*, 12(9), 2003.
- [166] L. RUDIN et S. OSHER : Total variation based image restoration with free local constraints. In *International Conference on Image Processing*, 1994.
- [167] L. RUDIN, S. OSHER et E. FATEMI : Nonlinear total variation based noise removal algorithms. *Physica D*, 60(1-4), 1992.
- [168] E. SALARI et S. ZHANG : Neural network-based image restoration using scaled residual with space-variant regularization. *International Journal of Imaging Systems and Technology*, 12, 2003.
- [169] O. SCHERZER et C. GROETSCH : Inverse scale space theory for inverse problems. In *Scale-Space*, p. 317–325, 2001.
- [170] L. SCHWARTZ : *Méthodes mathématiques pour les sciences physiques*. Hermann, 1965.
- [171] J. SHAH : A common framework for curve evolution, segmentation and anisotropic diffusion. In *IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, 1996.
- [172] Y. SHI et Q. CHANG : New time dependent model for image restoration. *Applied Mathematics and Computation*, 179(1), 2006.
- [173] D. L. SNYDER, T. J. SCHULTZ et J. A. O'SULLIVAN : Deblurring subject to nonnegativity constraint. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 40(5), 1992.
- [174] G. SPALETTA et L. CAUCCI : Constrained iterations for blind deconvolution and convexity issues. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 197(1), 2006.
- [175] J.-L. STARCK : *Entropie multiéchelle : définition et applications*. Dissertatio habilitationis, Université de Paris XI, 1999.

- [176] J.-L. STARCK et A. BIJAOUI : Filtering and deconvolution by the wavelet transform. *Signal Processing*, 35(3), 1994.
- [177] J.-L. STARCK et A. BIJAOUI : Multiresolution support applied to image filtering and restoration. *Graphical Models and Image Processing*, 57(5):420–431, 1995.
- [178] J.-L. STARCK, D. L. DONOHO et E. CANDÈS : Very high quality image restoration by combining wavelets and curvelets. In A. LAINE, M. UNSER et A. ALDROUBI., éds : *SPIE Conference on Signal and Image Processing : Wavelet Applications in Signal and Image Processing IX, Proceedings of SPIE*, vol. 4478, 2001.
- [179] J.-L. STARCK, M. K. NGUYEN et F. MURTAGH : Wavelets and curvelets for image deconvolution : a combined approach. *Signal Processing*, 83:2279–2283, 2003.
- [180] J.-L. STARCK, E. PANTIN et F. MURTAGH : Deconvolution in astronomy : a review. *The Publications of the Astronomical Society of the Pacific*, 114(800):1051–1069, 2002.
- [181] T. G. STOCKHAM, T. M. CANNON et R. B. INGEBRETSEN : Blind deconvolution through digital signal processing. *Proceedings IEEE*, 63(4), 1975.
- [182] D. STRONG et T. F. CHAN : Relation of regularization parameter and scale in total variation based image restoration. Rapport technique, Université de Californie - Los Angeles, 1996.
- [183] S. STRYHANYN-CHARDON : *Contribution au problème de la restauration myope des images numériques : analyse et synthèse*. Dissertatio doctoralis, Université de Rennes I, 1997.
- [184] H. TAKEDA, S. FARSIU et P. MILANFAR : Deblurring using regularized locally adaptive kernel regression. *IEEE Transactions on Image Processing*, 17(4), 2008.
- [185] Z. TELATAR : Adaptive filter design for image deblurring by using multi-criteria blurred image information. *Digital Signal Processing*, 15(1), 2005.
- [186] D. TSCHUMPERLE : *PDE's based regularization of multivalued images and applications*. Dissertatio doctoralis, Université de Nice, 2002.
- [187] F. TSUMURAYA, N. MIURA et N. BABA : Iterative blind deconvolution method using Lucy's algorithm. *Astronomy and Astrophysics*, 282(2), 1994.
- [188] J. TZENG, C. LIU et T. NGUYEN : Contourlet domain multiband deblurring based on color correlation for fluid lens cameras. *IEEE Transactions on Image Processing*, 19(10), 2010.
- [189] D. TZIKAS, A. LIKAS et N. GALATSANOS : Variational bayesian blind image deconvolution based on a sparse kernel model for the point spread function. In *European Signal Processing Conference*, 2006.
- [190] S. UMEYAMA : Blind deconvolution of blurred images by use of ICA. *Electronics and Communications in Japan, Part 3*, 84(12), 2001.
- [191] P. H. van CITTERT : Zum Einfluß der Spaltbreite auf die Intensitätsverteilung in Spektrallinien. II. *Zeitschrift für Physik*, 65(5-6), 1931.
- [192] V. VELISAVLJEVIC, B. BEFERULL-LOZANO, M. VETTERLI et P. L. DRAGOTTI : Directionlets : Anisotropic multi-directional representation with separable filtering. *IEEE Transactions on Image Processing*, 15(7), 2006.
- [193] L. VESE et S. J. OSHER : Image denoising and decomposition with total variation minimization and oscillatory functions. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 20, 2004.
- [194] C. R. VOGEL : Solution of linear systems arising in nonlinear image deblurring. In *Workshop on Scientific Computing*. Springer, 1997.

- [195] C. R. VOGEL : *Computational Methods for Inverse Problems*. SIAM, 2002.
- [196] C. R. VOGEL et M. E. OMAN : Iterative methods for total variation denoising. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 17(1), 1996.
- [197] C. R. VOGEL et M. E. OMAN : Fast, robust total variation-based reconstruction of noisy, blurred images. *IEEE Transactions on Image Processing*, 7(6), 1998.
- [198] B. VOZEL, K. CHEHDI et J. DUMOULIN : Restauration myope d'images pour l'inspection des ouvrages d'art par un système de vision embarqué sur drone. In *GRETISI*, 2005.
- [199] C. VURAL et W. A. SETHARES : Recursive blind image deconvolution via dispersion minimization. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 19(8), 2005.
- [200] C. VURAL et W. A. SETHARES : Blind image deconvolution via dispersion minimization. *Digital Signal Processing*, 16(2), 2006.
- [201] S. WANG, B. GUAN, G. WANG et Q. LI : Measurement of sinusoidal vibration from motion blurred images. *Pattern Recognition Letters*, 28(9), 2007.
- [202] Z. WANG, A. C. BOVIK, H. R. SHEIKH et E. SIMONCELLI : Image quality assessment : From error visibility to structural similarity. *IEEE Transactions on Image Processing*, 13(4), 2004.
- [203] S. WEI et H. XU : Staircasing reduction model applied to total variation based image reconstruction. In *European Signal Processing Conference*, 2009.
- [204] J. WEICKERT : *Anisotropic diffusion in image processing*. ECMI Series, 1998.
- [205] J. WEICKERT : *Design of non linear diffusion filters*, chap. 12. Elsevier - Academic Press, 2000.
- [206] M. WELK, D. THEIS, T. BROX et J. WEICKERT : PDE-based deconvolution with forward-backward diffusivities and diffusion tensors. In *Scale Space*, p. 585–597, 2005.
- [207] M. WELK, D. THEIS et J. WEICKERT : *Variational Deblurring of Images with Uncertain and Spatially Variant Blurs*, p. 456. Pattern Recognition : Lectures Notes on Computer Sciences, 2005.
- [208] Y. YITZHAKY, G. BOSHUSA, Y. LEVY et N. S. KOPEIKA : Restoration of an image degraded by vibrations using only a single frame. *Optical Engineering*, 39(8), 2000.
- [209] Y. YITZHAKY et N. S. KOPEIKA : Identification of blur parameters from motion blurred images. *Graphical Models and Image Processing*, 59, 1997.
- [210] Y. YITZHAKY, R. MILBERG, S. YOHAEV et N. S. KOPEIKA : Comparison of direct blind deconvolution methods for motion-blurred images. *Applied Optics*, 38(20), 1999.
- [211] Y. YITZHAKY, I. MOR, A. LANTZMAN et N. S. KOPEIKA : Direct method for restoration of motion-blurred images. *Journal of the Optical Society of America A*, 15(6), 1998.
- [212] Y.-L. YOU et M. KAVEH : A simple algorithm for joint blur identification and image restoration. In *International Conference on Image Processing*, p. 167–171, 1994.
- [213] Y.-L. YOU et M. KAVEH : A regularization approach to joint blur identification and image restoration. *IEEE Transactions on Image Processing*, 5(3), 1996.
- [214] Y.-L. YOU et M. KAVEH : Blind image restoration by anisotropic diffusion. *IEEE Transactions on Image Processing*, 8(3), 1999.

- [215] Y. SHI, Q. CHANG et J. XU : Convergence of fixed point iteration for deblurring and denoising problem. *Applied Mathematics and Computation*, 189(2), 2007.
- [216] J. YUAN et Z. HU : Image blind deconvolution based on kurtosis extrema. In *Fourth International Conference on Photonics and Imaging in Biology and Medicine*, 2006.