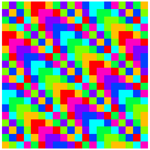
QUI VEUT JOUER AVEC MOI ?

Michel Rigo (Université de Liège)

`http://www.discmath.ulg.ac.be/`



Jouer sérieusement, pourquoi ?

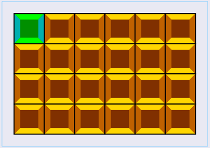
- Jeux coopératifs : marché boursier, économie, émergence de réseaux sociaux, ...
- Mise à disposition de ressources limitées : imprimante réseau, bande passante, routeur Wi-Fi, ...
- Vérification de programmes, intelligence artificielle : interaction entre un programme et son environnement.
- Biologie : stratégie évolutivement stable, proie/prédateur, comportement agressif/coopératif, territorialité, ...
- Mise au point, analyse et vérification de protocoles cryptographiques : authentification sur un serveur, partage de secrets, vote électronique, ...
- Liens et applications avec d'autres branches des mathématiques : logique, arithmétique, graphes, ...
- Analyse mathématique de jeux combinatoires impartiaux

CHOMP

Règles du jeu (D. Gale 1974)

Deux joueurs *A* et *B* jouent alternativement.
A débute la partie avec une tablette de chocolat pleine.

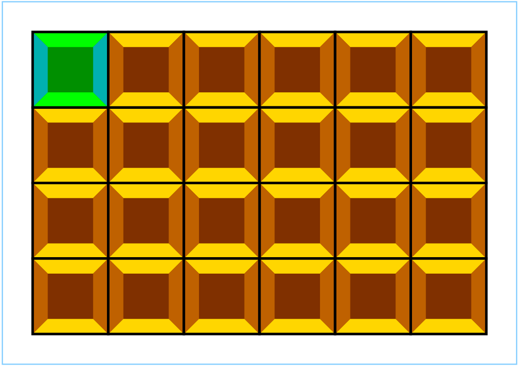
- A chaque tour, il faut manger au moins un carré de la tablette chocolat.
- Lorsqu'on mange un carré, il faut manger tous ceux à sa droite et en-dessous.
- Le carré du coin supérieur gauche est empoisonné !



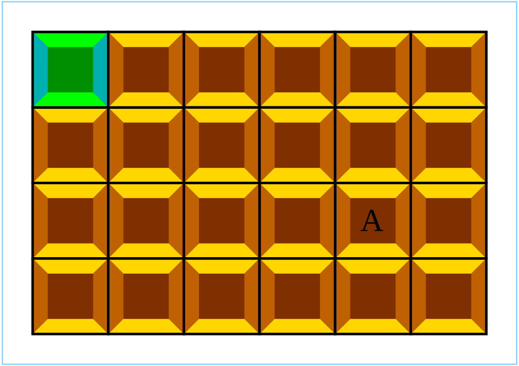
But du jeu : survivre !

CHOMP

Chomp ou le jeu de la tablette de chocolat empoisonnée
(F. Schuh 1952, D. Gale 1974)

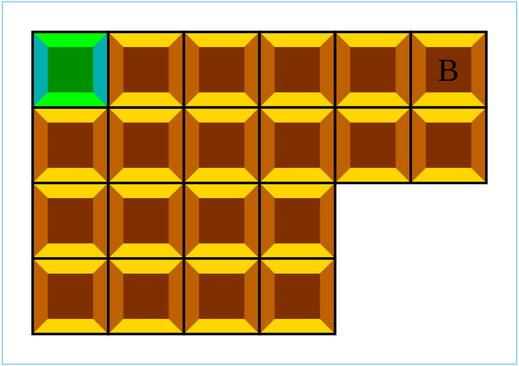


Chomp ou le jeu de la tablette de chocolat empoisonnée
(F. Schuh 1952, D. Gale 1974)



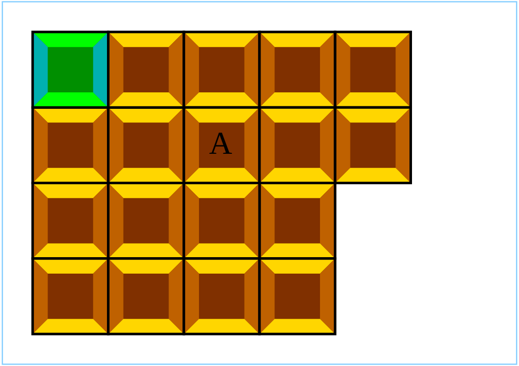
CHOMP

Chomp ou le jeu de la tablette de chocolat empoisonnée
(F. Schuh 1952, D. Gale 1974)

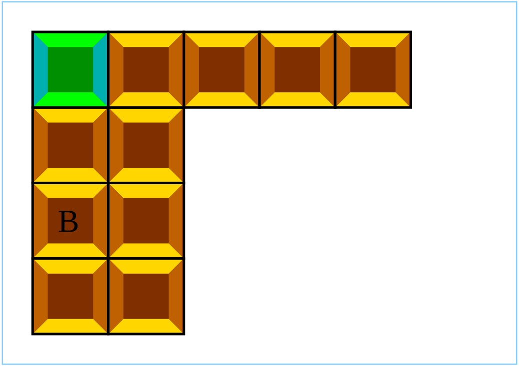


CHOMP

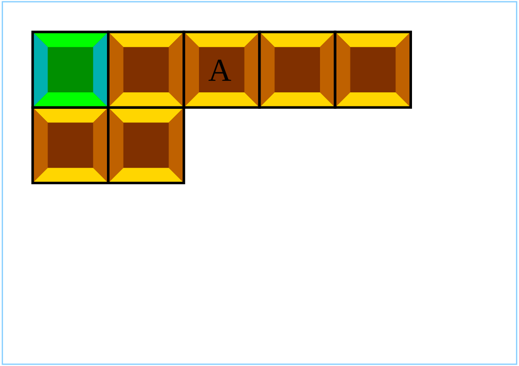
Chomp ou le jeu de la tablette de chocolat empoisonnée
(F. Schuh 1952, D. Gale 1974)



Chomp ou le jeu de la tablette de chocolat empoisonnée
(F. Schuh 1952, D. Gale 1974)

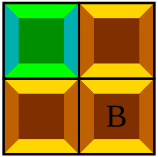


Chomp ou le jeu de la tablette de chocolat empoisonnée
(F. Schuh 1952, D. Gale 1974)



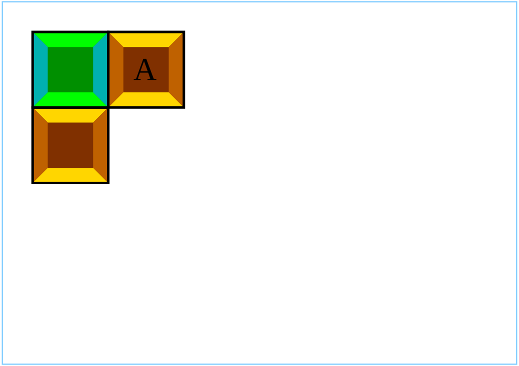
CHOMP

Chomp ou le jeu de la tablette de chocolat empoisonnée
(F. Schuh 1952, D. Gale 1974)

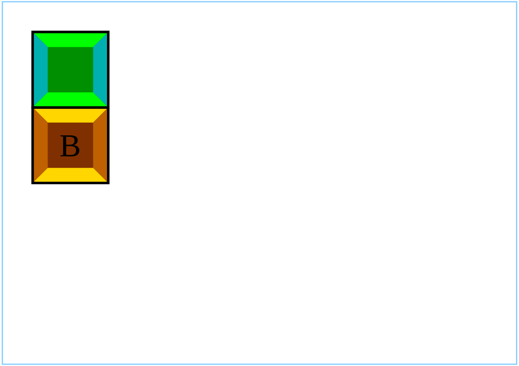


CHOMP

Chomp ou le jeu de la tablette de chocolat empoisonnée (F. Schuh 1952, D. Gale 1974)

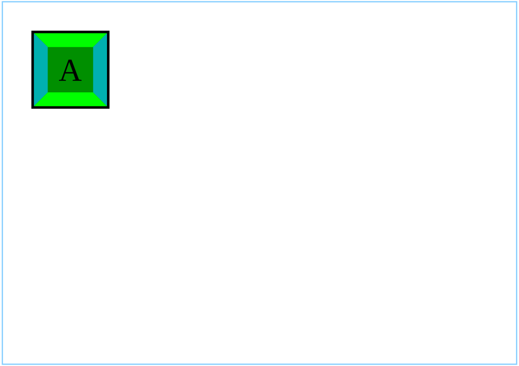


Chomp ou le jeu de la tablette de chocolat empoisonnée
(F. Schuh 1952, D. Gale 1974)



CHOMP

Chomp ou le jeu de la tablette de chocolat empoisonnée
(F. Schuh 1952, D. Gale 1974)

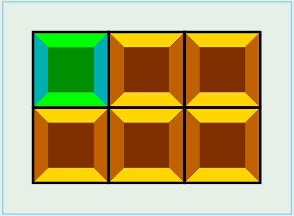


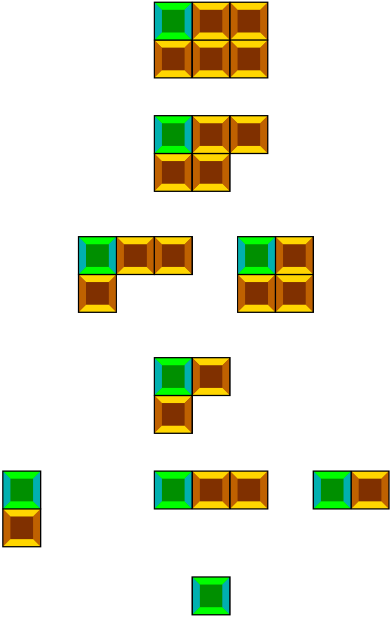
CHOMP

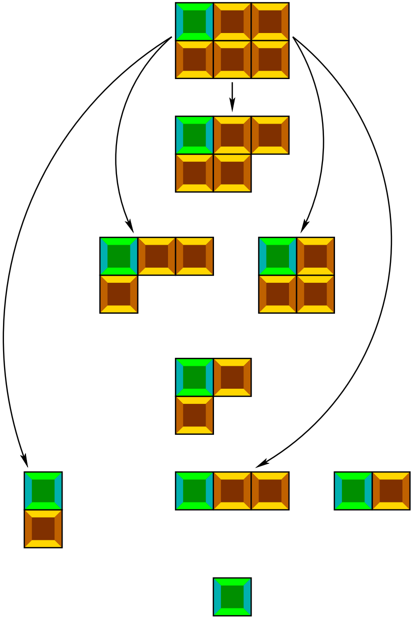
Questions

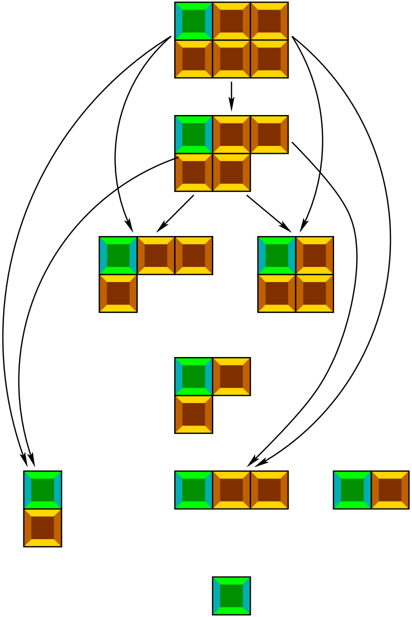
- Qui peut gagner la partie à partir d'une tablette $m \times n$?
- Quel coup doit-on jouer pour gagner ?

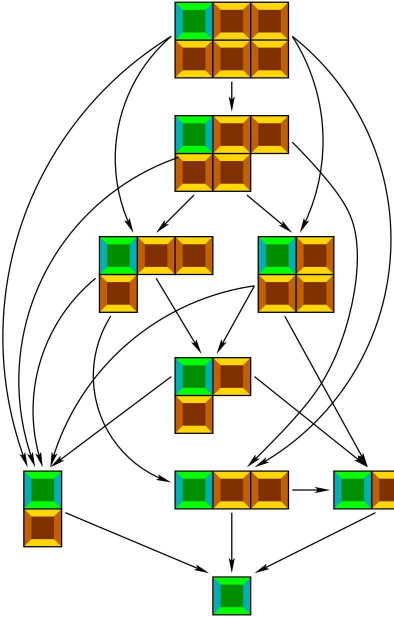
Analyse du cas 2×3

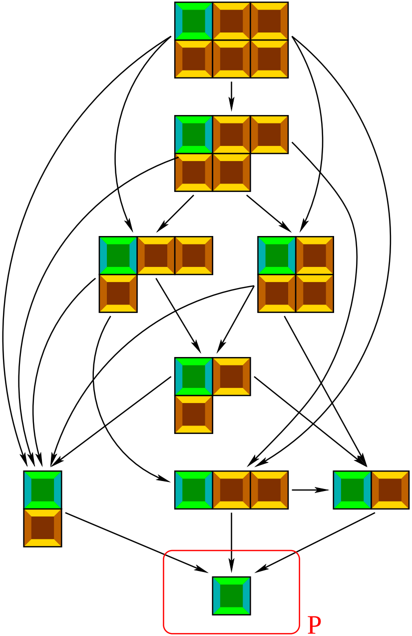


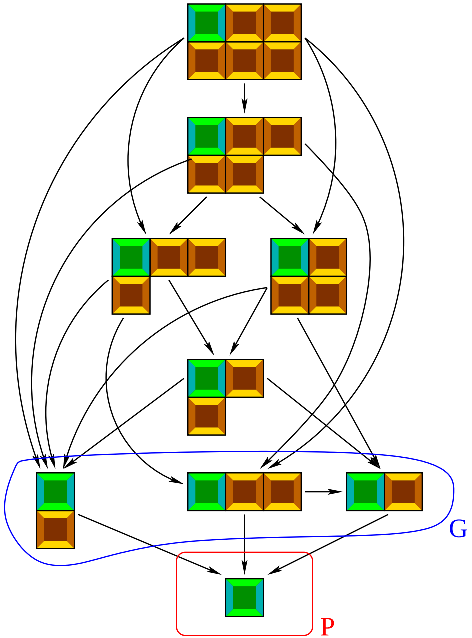


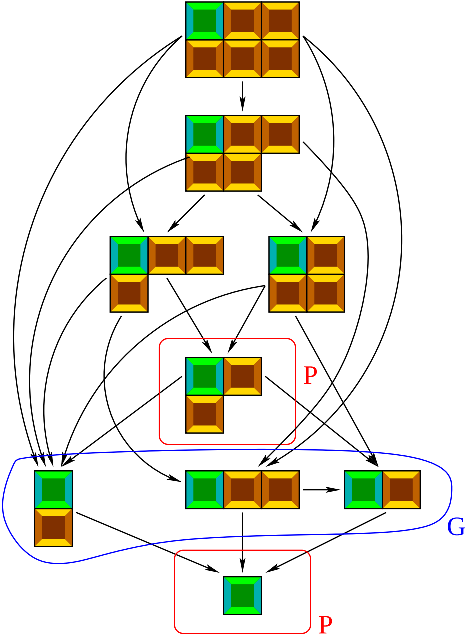


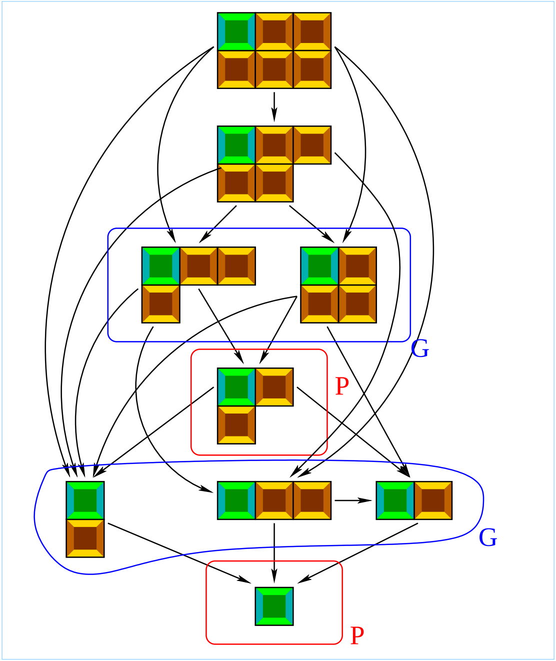


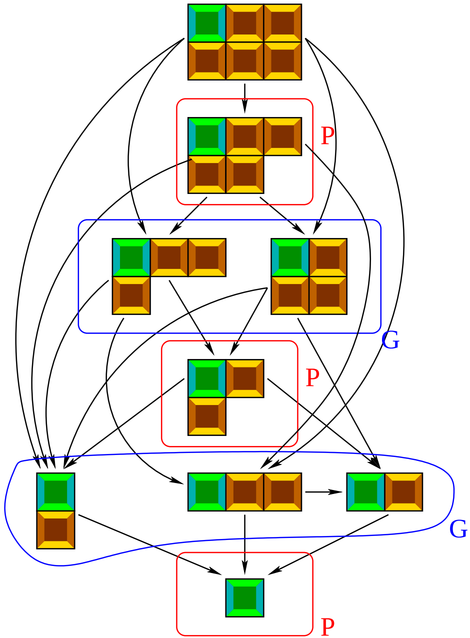


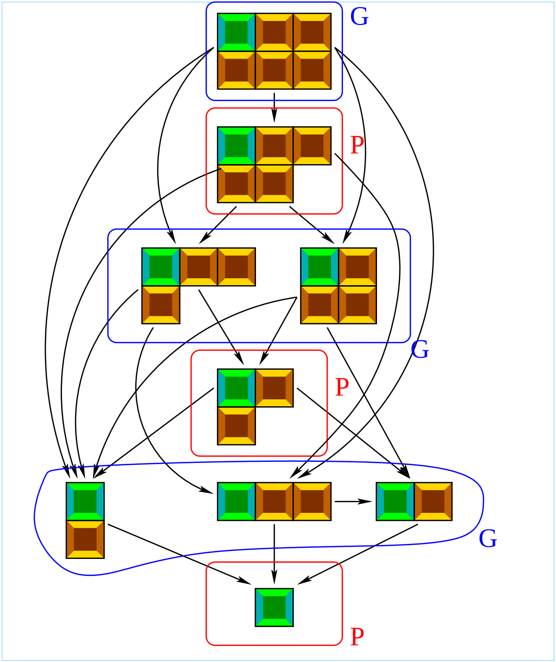

P

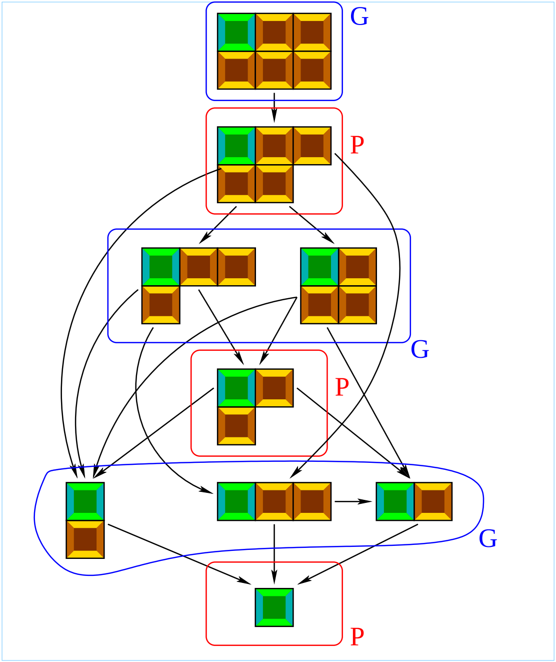

G
P

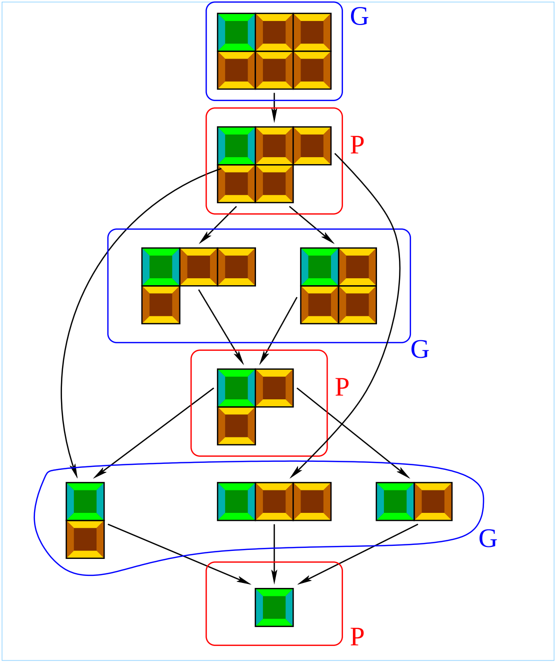

P
G
P


G
P
G
P


P
G
P
G
P


G
P
G
P
G
P


G
P
G
P
G
P


G
P
G
P
G
P

- P = {positions perdantes},
  quoi que le joueur fasse, l'autre joueur *peut* gagner.
- G = {positions gagnantes},
  le joueur peut gagner, *quoi que fasse* son adversaire.
- Stratégie gagnante : choisir une bonne option depuis une position gagnante pour assurer *in fine* le gain.

REMARQUE

Pour une tablette $m \times n$, toute position est gagnante ou perdante.

THÉORÈME

A partir d'une tablette $m \times n$, il existe toujours une stratégie gagnante pour le joueur qui débute.

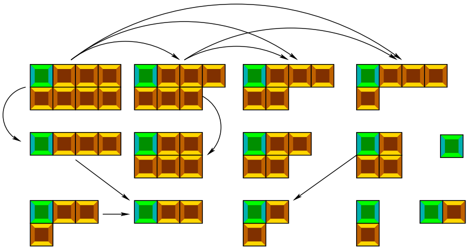
Preuve par l'absurde

Thèse : A dispose d'une stratégie gagnante, *i.e.*, la configuration de départ est une position gagnante.

- Supposons que B dispose d'une stratégie gagnante (quel que soit le premier coup joué par A), *i.e.*, la configuration de départ est une position perdante.
- Si A supprime le coin inférieur droit, par hypothèse, B peut répondre à A avec un coup $\mathcal{C}$ lui assurant à la fin la victoire.
- Dès lors, A aurait pu débuter la partie en jouant ce coup $\mathcal{C}$ qui lui assurerait la victoire finale.
  Ceci contredit notre hypothèse de départ.

En pratique

On peut calculer les coups gagnants pour de "petites" valeurs de m et n. Peut-on jouer *rapidement* si m, n sont "grands" ?



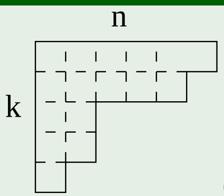
Esquisse du cas 2×4 (il manque de nombreux coups).

Cas $2 \times n$

nombre de positions : $\dfrac{n^2 + 3n}{2}$ et de coups : $\dfrac{n^3 + 2n^2 - n}{2}$

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
	9	14	20	27	35	44	54	65	77	90	104
	21	46	85	141	217	316	441	595	781	1002	1261

Le cas $k \times n$ (diagrammes de Young)



$(x_1, \ldots, x_k)$

avec $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_k \geq 0$ et $1 \leq x_1 \leq n$

nombre de positions : $\displaystyle\sum_{x_1=1}^{n} \sum_{x_2=0}^{x_1} \cdots \sum_{x_k=0}^{x_{k-1}} 1 \sim n^k / k!$

nombre de coups : $\displaystyle\sum_{x_1=1}^{n} \sum_{x_2=0}^{x_1} \cdots \sum_{x_k=0}^{x_{k-1}} (x_1 + x_2 + \cdots + x_k - 1) \sim n^{k+1} / 2\,k!$

liens avec le nombre de partitions d'un entier.

	nombre de positions
3	$(11n + 6n^2 + n^3)/6$
4	$(50n + 35n^2 + 10n^3 + n^4)/24$
5	$(274n + 225n^2 + 85n^3 + 15n^4 + n^5)/120$
6	$(1764n + 1624n^2 + 735n^3 + 175n^4 + 21n^5 + n^6)/720$

	nombre de coups
3	$(-4n + 21n^2 + 16n^3 + 3n^4)/12$
4	$(-2n + 65n^2 + 60n^3 + 19n^4 + 2n^5)/24$
5	$(52n + 920n^2 + 955n^3 + 395n^4 + 73n^5 + 5n^6)/240$
6	$(396n + 3668n^2 + 4137n^3 + 2030n^4 + 504n^5 + 62n^6 + 3n^7)/720$

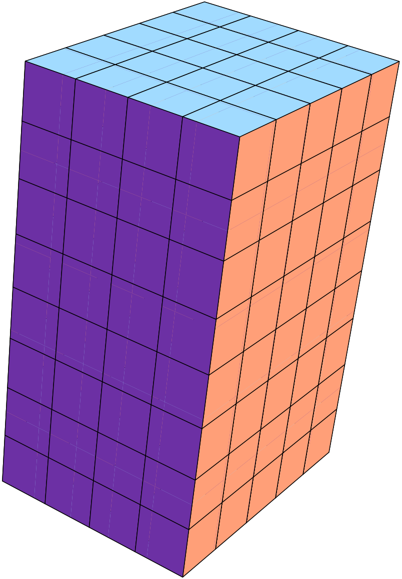
$k = 6,\ n = 12$

nombre de positions 18563, nombre de coups 649741

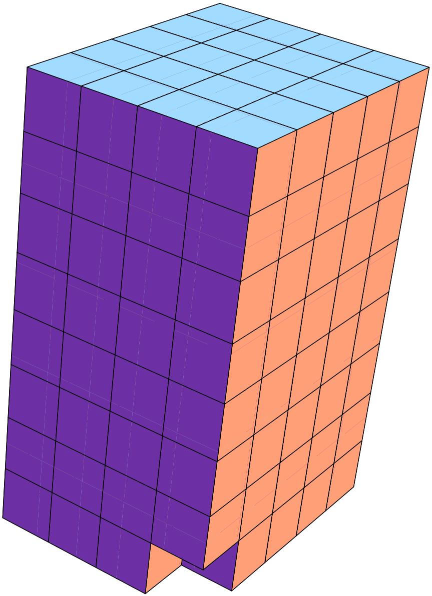
$k = n = 20$

nombre de positions 137 846 528 819
nombre de coups 27 431 459 235 181

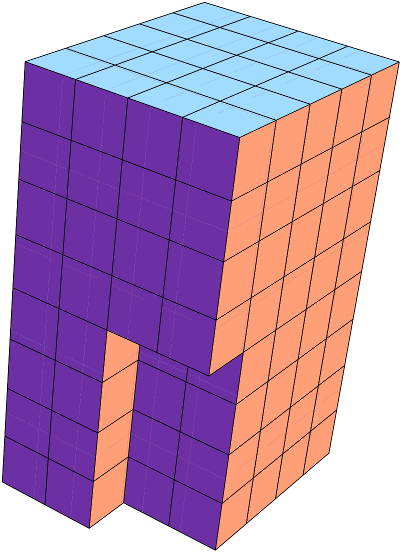
Généralisation CHOMP-3D



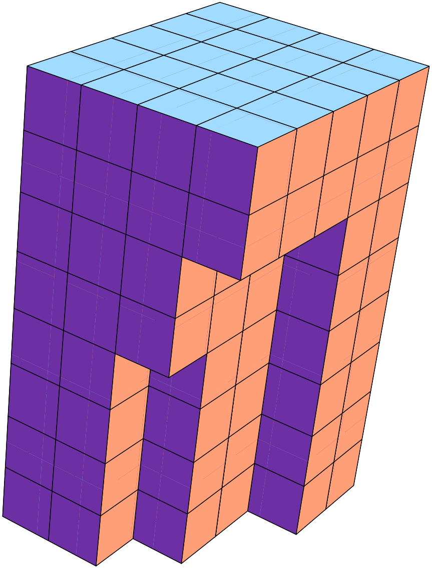
Généralisation CHOMP-3D



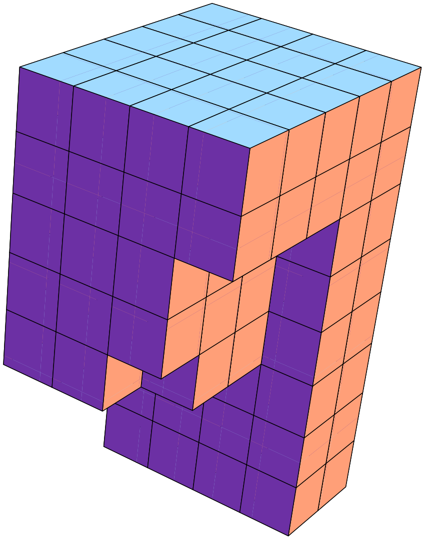
Généralisation CHOMP-3D



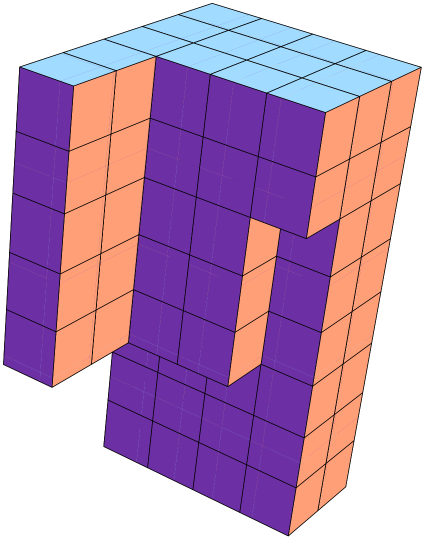
Généralisation CHOMP-3D



Généralisation CHOMP-3D



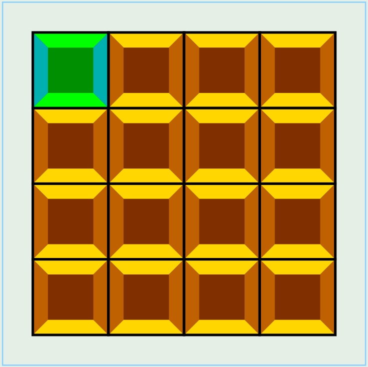
Généralisation CHOMP-3D



CAS PARTICULIER

CAS $m \times m$

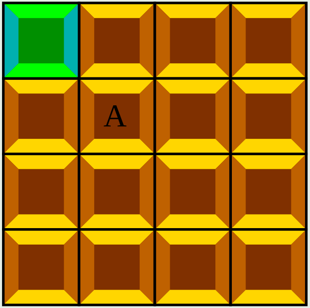
Dans ce cas, il y a une stratégie gagnante *facile*.



Cas particulier

Cas $m \times m$

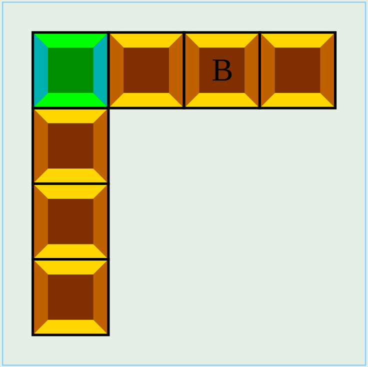
Dans ce cas, il y a une stratégie gagnante *facile*.



Cas particulier

Cas $m \times m$

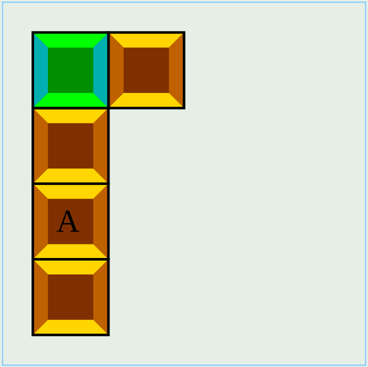
Dans ce cas, il y a une stratégie gagnante *facile*.



CAS PARTICULIER

CAS $m \times m$

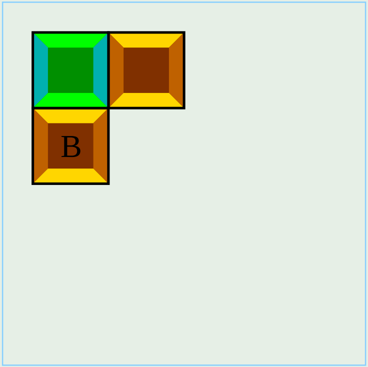
Dans ce cas, il y a une stratégie gagnante *facile*.



CAS PARTICULIER

CAS $m \times m$

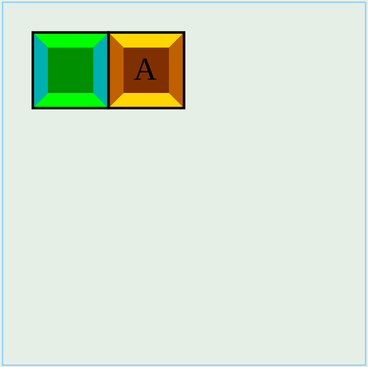
Dans ce cas, il y a une stratégie gagnante *facile*.



CAS PARTICULIER

CAS $m \times m$

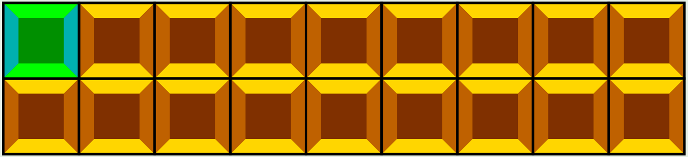
Dans ce cas, il y a une stratégie gagnante *facile*.



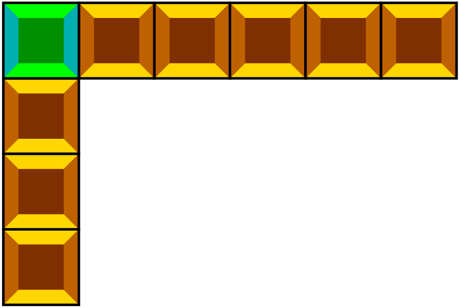
Cas particulier

Exercice, le cas $2 \times n$

On peut aussi trouver une stratégie gagnante *facile*...

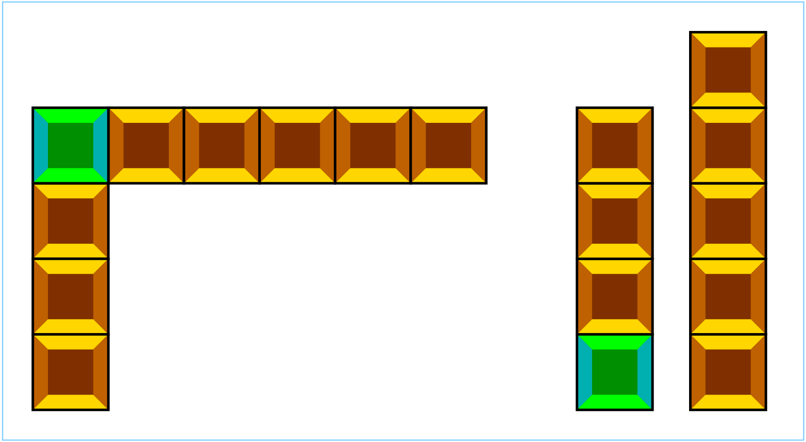


Nim, condition misère, le joueur qui prend le dernier carré perd.

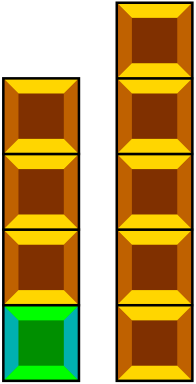


Le jeu de Nim

Nim, condition misère, le joueur qui prend le dernier carré perd.

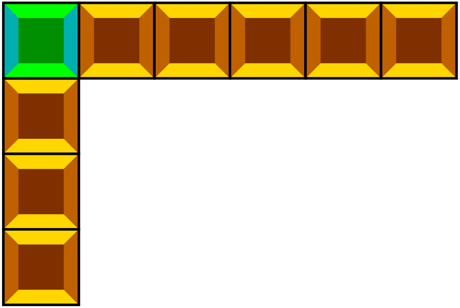


Nim, condition misère, le joueur qui prend le dernier carré perd.

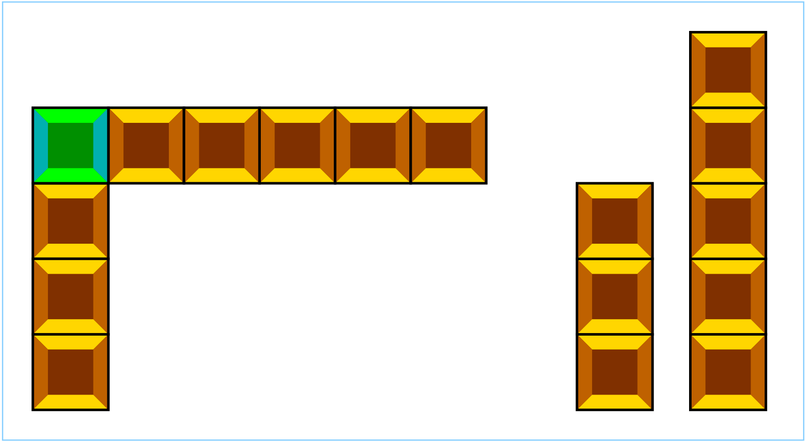



COCINOR-MARCEAU présente
DELPHINE SEYRIG
GIORGIO ALBERTAZZI et SACHA PITOEFF
L'Année Dernière
à MARIENBAD
RÉALISATION D'ALAIN RESNAIS
ALAIN ROBBE-GRILLET
PIERRE COURAU et RAYMOND FROMENT
DYALISCOPE

Nim, condition normale, celui qui prend le dernier carré gagne.

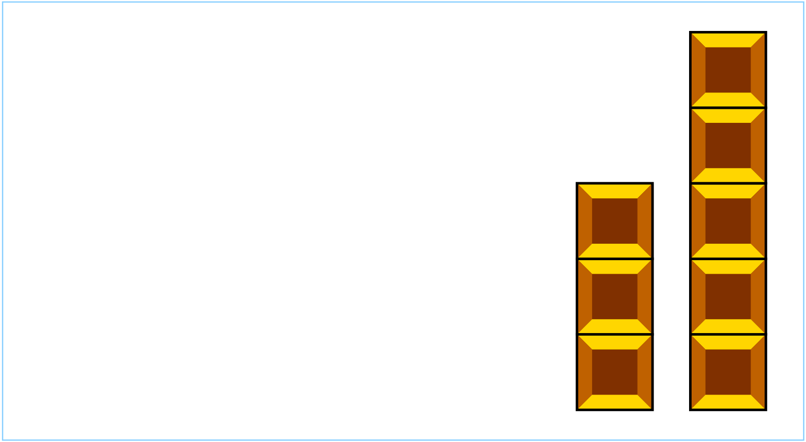


Nim, condition normale, celui qui prend le dernier carré gagne.

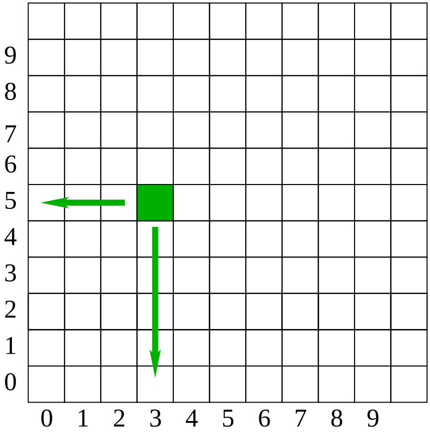


Le jeu de Nim

Nim, condition normale, celui qui prend le dernier carré gagne.



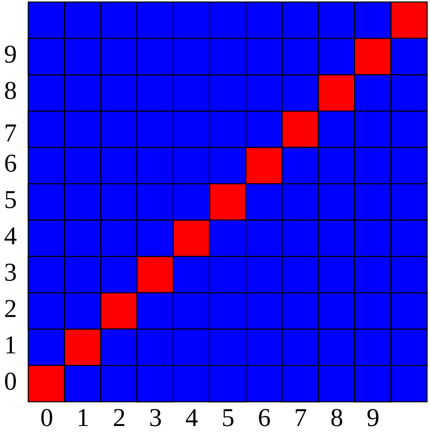
Pour le jeu de Nim à deux tas, on connaît déjà la stratégie gagnante!



On déplace une tour.

Le jeu de Nim

Pour le jeu de Nim à deux tas, on connaît déjà la stratégie gagnante!



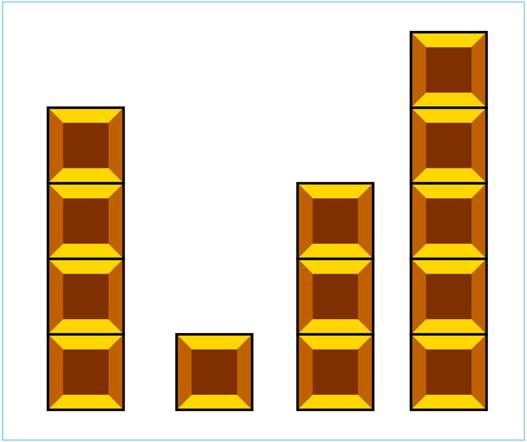
Les positions perdantes.

Remarque

Dès le début de la partie, on sait quel joueur va gagner...

Le jeu de Nim

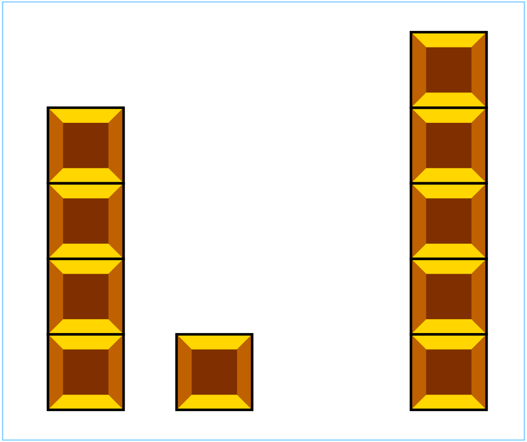
Extension à plusieurs tas, à son tour,
le joueur retire au moins un carré de l'un des tas.



		4	2	1
4		1	0	0
1				1
3			1	1
5	$\oplus$	1	0	1
		0	1	1

Le jeu de Nim

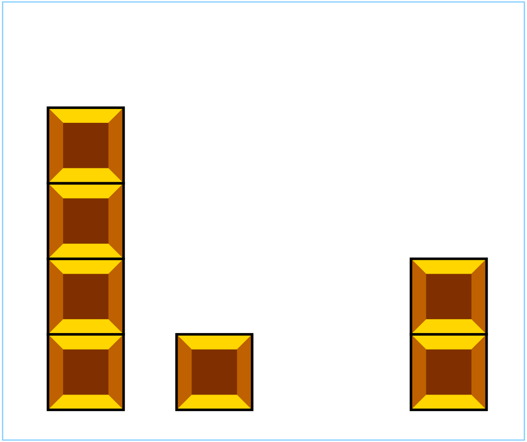
Extension à plusieurs tas, à son tour,
le joueur retire au moins un carré de l'un des tas.



		4	2	1
4		1	0	0
1				1
0				
5	$\oplus$	1	0	1
		0	0	0

Le jeu de Nim

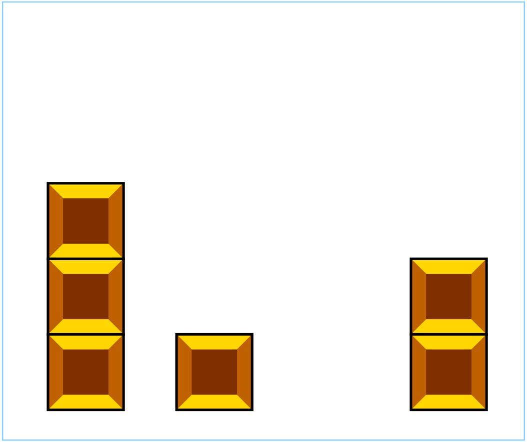
Extension à plusieurs tas, à son tour,
le joueur retire au moins un carré de l'un des tas.



		4	2	1
4		1	0	0
1				1
0				
2	$\oplus$		1	0
		1	1	1

Le jeu de Nim

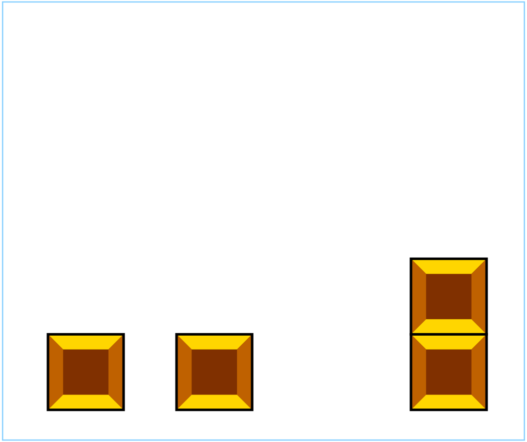
Extension à plusieurs tas, à son tour,
le joueur retire au moins un carré de l'un des tas.



		4	2	1
3			1	1
1				1
0				
2	$\oplus$		1	0
			0	0

Le jeu de Nim

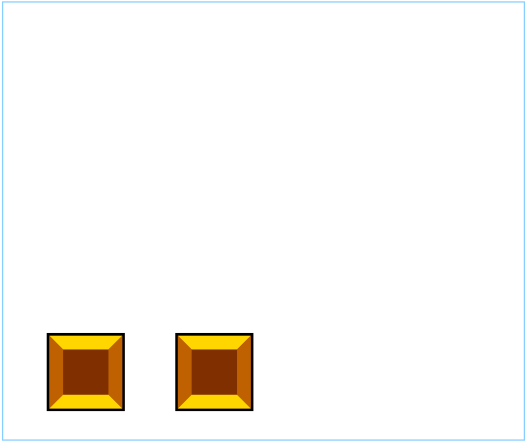
Extension à plusieurs tas, à son tour,
le joueur retire au moins un carré de l'un des tas.



		4	2	1
1				1
1				1
0				
2	$\oplus$		1	0
			1	0

LE JEU DE NIM

Extension à plusieurs tas, à son tour,
le joueur retire au moins un carré de l'un des tas.



		4	2	1
1				1
1				1
0				
0	$\oplus$			
				0

Théorème (Bouton 1902)

- Les positions perdantes sont à “Nim-somme” nulle : tout coup joué depuis une position à “Nim-somme” nulle amène dans une position à “Nim-somme” non nulle.
- Pour toute position à “Nim-somme” non nulle, il existe un coup vers une position de “Nim-somme” nulle (stratégie).

Remarque identique

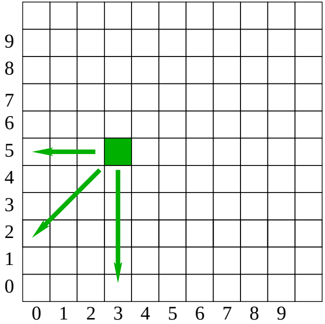
Dès le début de la partie, on sait quel joueur va gagner...

Le jeu de Wythoff

Règles du jeu

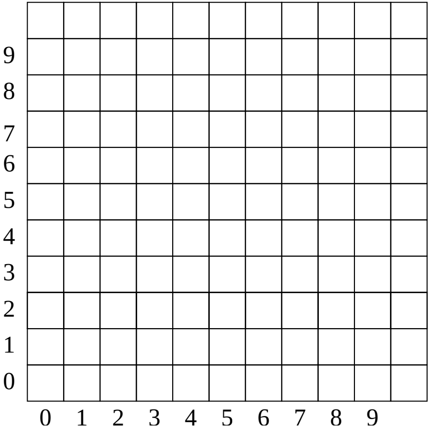
On joue avec deux tas, condition normale. A son tour, le joueur

- retire au moins un carré de l'un des tas,
- retire la même quantité sur chaque tas.

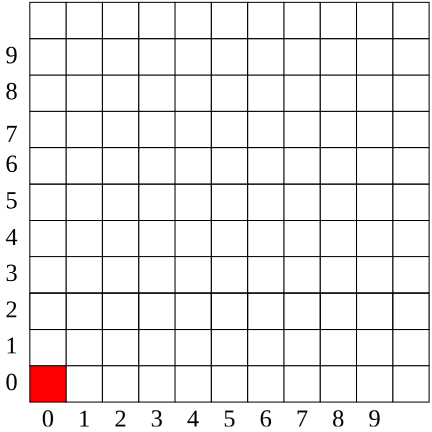


On déplace une reine.

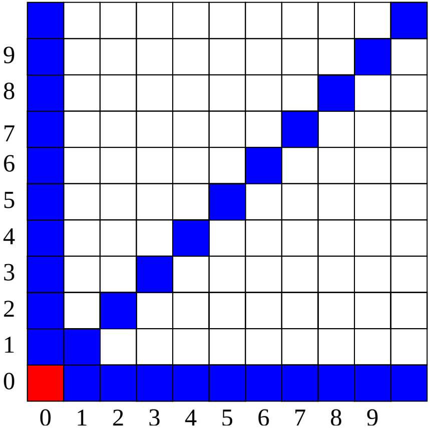
Le jeu de Wythoff



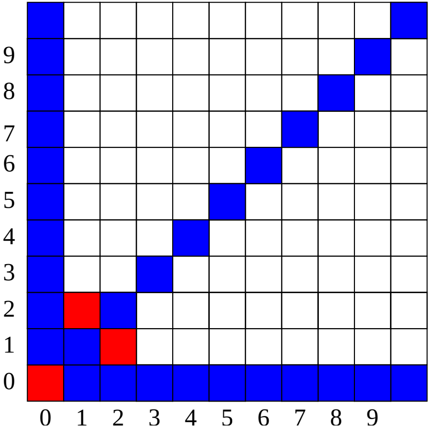
Le jeu de Wythoff



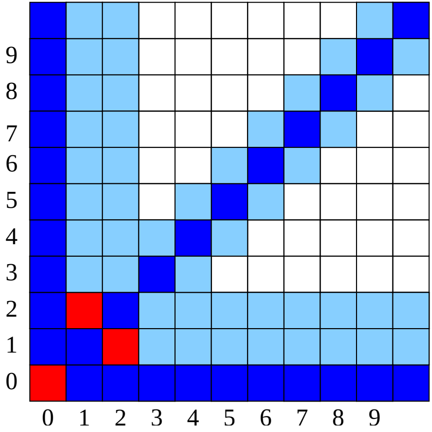
Le jeu de Wythoff



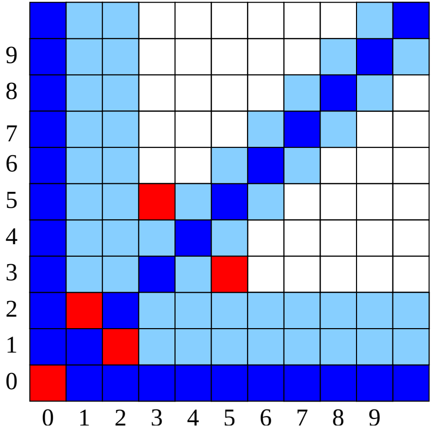
Le jeu de Wythoff



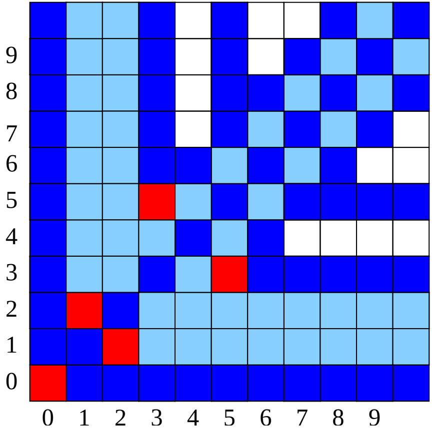
Le jeu de Wythoff



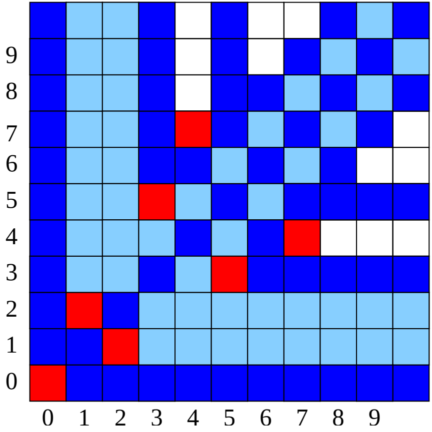
Le jeu de Wythoff



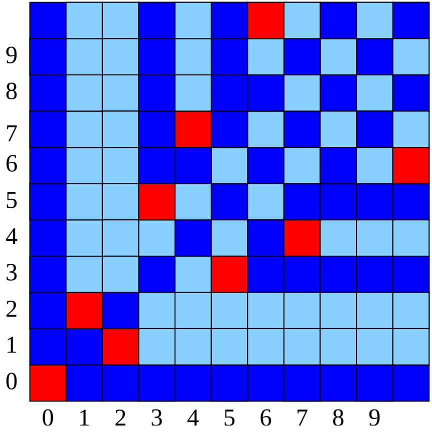
LE JEU DE WYTHOFF



Le jeu de Wythoff



Le jeu de Wythoff



Le jeu de Wythoff

Question

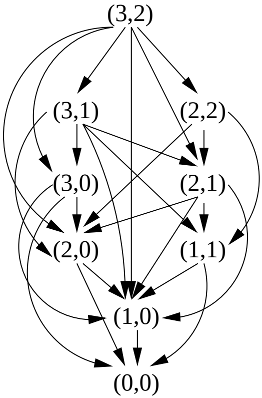
Peut-on décider “rapidement” si on se trouve sur une position gagnante ou perdante ?

$$(20365015276, 32951286898) \text{ est une position perdante}$$

$$(2180961, 2181194) \text{ est une position gagnante}$$

Le jeu de Wythoff

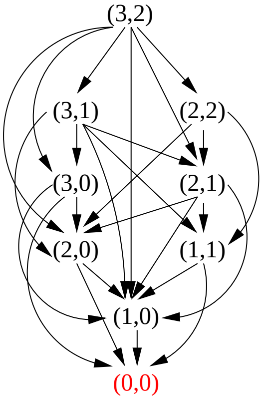
On peut faire la même analyse (*graphe du jeu*) que pour CHOMP :



On a le même problème : praticable uniquement pour de “petites” valeurs !

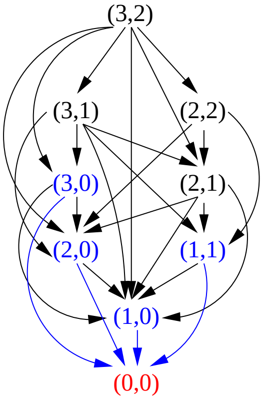
LE JEU DE WYTHOFF

On peut faire la même analyse (*graphe du jeu*) que pour CHOMP :



On a le même problème : praticable uniquement pour de "petites" valeurs !

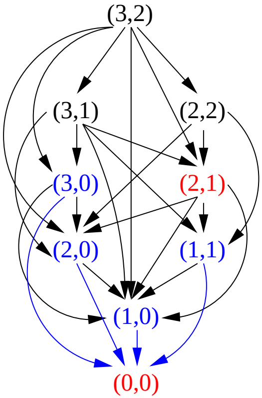
On peut faire la même analyse (*graphe du jeu*) que pour CHOMP :



On a le même problème : praticable uniquement pour de “petites” valeurs !

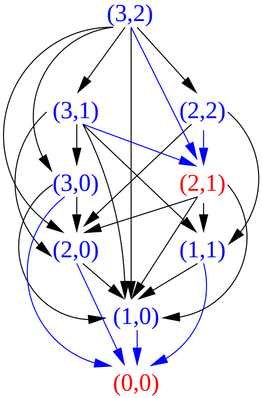
LE JEU DE WYTHOFF

On peut faire la même analyse (*graphe du jeu*) que pour CHOMP :



On a le même problème : praticable uniquement pour de "petites" valeurs !

On peut faire la même analyse (*graphe du jeu*) que pour CHOMP :



On a le même problème : praticable uniquement pour de "petites" valeurs !

LE JEU DE WYTHOFF

Les premières positions perdantes sont

$$(1,2),\ (3,5),\ (4,7),\ (6,10),\ (8,13),\ (9,15),\dots$$

THÉORÈME (WYTHOFF 1907)

Pour tout entier $n \geq 1$,

$$(A_n, B_n) = (\lfloor n\,\varphi \rfloor, \lfloor n\,\varphi^2 \rfloor) = (\lfloor n\,\varphi \rfloor, \lfloor n\,\varphi \rfloor + n)$$

où $\varphi = (1+\sqrt{5})/2$ est le nombre d'or.

THÉORÈME (S. BEATTY 1927)

Si $\alpha, \beta > 1$ sont irrationnels et vérifient $1/\alpha + 1/\beta = 1$, alors $\{\lfloor n\,\alpha \rfloor \mid n \geq 1\}$ et $\{\lfloor n\,\beta \rfloor \mid n \geq 1\}$ partitionnent $\mathbb{N}_{\geq 1}$.

Le jeu de Wythoff

Une formule ne suffit pas toujours...

$\varphi \simeq 1,6180339887498948482045868343656381177203091\ldots$

$$\lfloor 13 \times 1,6 \rfloor \neq \lfloor 13 \times 1.61803 \rfloor$$

$$\lfloor 610 \times 1.61803 \rfloor \neq \lfloor 610 \times 1.6180339887498948 \rfloor$$

Il faut s'y prendre autrement

Même avec 10^{10} décimales correctes, posera problème pour $10^{10} \times \cdots$! Utiliser $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$.

LE JEU DE WYTHOFF

suite de Fibonacci $F_{i+2} = F_{i+1} + F_i$, $F_0 = 1$, $F_1 = 2$

$\ldots, 610, 377, 233, 144, 89, 55, 34, 21, 13, 8, 5, 3, 2, 1$

1	1	8	10000	15	100010
2	10	9	10001	16	100100
3	100	10	10010	17	100101
4	101	11	10100	18	101000
5	1000	12	10101	19	101001
6	1001	13	100000	20	101010
7	1010	14	100001	21	1000000

Le jeu de Wythoff

$(1,2),\ (3,5),\ (4,7),\ (6,10),\ (8,13),\ (9,15),\ldots$

$\ldots, 610, 377, 233, 144, 89, 55, 34, 21, 13, 8, 5, 3, 2, 1$

1	2	1	10
3	5	100	1000
4	7	101	1010
6	10	1001	10010
8	13	10000	100000
9	15	10001	100010
11	18	10100	101000
12	20	10101	101010

première composante : nombre pair de zéros
seconde composante : décalé d'un cran vers la gauche

LE JEU DE WYTHOFF

$$(1,2),\ (3,5),\ (4,7),\ (6,10),\ (8,13),\ (9,15),\ldots$$

$$\ldots, 610, 377, 233, 144, 89, 55, 34, 21, 13, 8, 5, 3, 2, 1$$

1	2	1	10
3	5	100	1000
4	7	101	1010
6	10	1001	10010
8	13	10000	100000
9	15	10001	100010
11	18	10100	101000
12	20	10101	101010

première composante : nombre pair de zéros
seconde composante : décalé d'un cran vers la gauche

Question

Peut-on décider “rapidement” si on se trouve sur une position gagnante ou perdante ?

$$(20365015276, 32951286898) \text{ est une position perdante}$$

$$(2180961, 2181194) \text{ est une position gagnante}$$

$$20365015276 = F_{49} + F_{17} + F_6$$

10000000000000000000000000000000100000000001000000

$$32951286898 = F_{50} + F_{18} + F_7$$

100000000000000000000000000000001000000000010000000

$$2180961 = F_{30} + F_{16} + F_8 + F_5$$

1000000000000010000000100100000

Le jeu de Wythoff

Remarque

Dès le début, on sait quel joueur va *a priori* gagner...

Exercice

Il faut encore être en mesure, depuis une position gagnante, d'appliquer la bonne stratégie.

Suggestion : pour tout $t \geq 1$, il existe un seul n tel que $B_n - A_n = t$, à savoir $n = t$.

Remarque

La façon de représenter les nombres influe sur les méthodes de calcul, i.e., les algorithmes, et leurs perfomances !

Le dilemme du prisonnier

Un exemple de jeu *coopératif*.

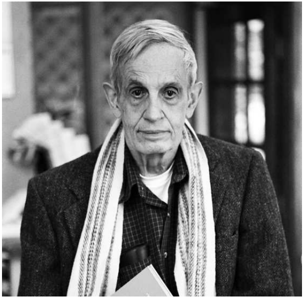
La situation, deux bandits arrêtés avec des preuves insuffisantes

- Les deux suspects sont mis à l'écart et interrogés séparément.
- Ils ont chacun le choix de *ne rien dire* ou de *dénoncer* l'autre.
- Ils ne savent pas ce que fait l'autre suspect et on suppose qu'ils sont rationnels.

	B dénonce	B ne dit rien
A dénonce	A et B écopent de 1 an de prison	A est libre B prend 5 ans de prison
A ne dit rien	A prend 5 ans B est libre	A et B écopent de 6 mois de prison

DÉFINITION

Une stratégie (*i.e.*, les choix réalisés par les différents joueurs) est un *équilibre de Nash*, si aucun joueur n'a intérêt à changer de façon unilatérale sa propre stratégie.



John Forbes Nash (1928–), John von Neumann (1903–1957)

RÉFÉRENCES

- C. L. Bouton, Nim, a game with a complete mathematical theory, *Ann. Math.* **3** (1902), 35–39.
- S. Beatty, Problem 3173, *American Math. Monthly* **33** (1926), 159, **34** (1927), 159.
- E. R. Berlekamp, J. H. Conway, R. K. Guy, *Winning Ways for Your Mathematical Plays*, vol. 1–4, A K Peters, Ltd (2001).
- D. Easley, J. Kleinberg, *Networks, Crowds, and Markets: Reasoning About a Highly Connected World*, Cambridge Univ. Press (2011).
- T. S. Ferguson, Game Theory, Lecture Notes, UCLA.
- A. S. Fraenkel, How to beat your Wythoff games' opponent on three fronts, *American Math. Monthly* **89** (1982), 353–361.
- D. Gale, A Curious Nim-Type Game, *American Math. Monthly* **81** (8), 1974, 876–879.
- F. Schuh, The game of divisions, *Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde* **39** (1952), 299–304.
- O. Serre, Games in a nutshell, An overview of the course "Game-theoretic techniques in computer science", CNRS/LIAFA, Paris (2011).
- W. A. Wythoff, A modification of the game of nim, *Nieuw Archief voor Wiskunde* **7** (1907), 199–202.
- E. Zeckendorf, Représentation des nombres naturels par une somme des nombres de Fibonacci ou de nombres de Lucas, *Bull. Soc. Roy. Sci. Liège* **41** (1972), 179–182

Sur le web,

- pas mal d'applets JAVA pour jouer à CHOMP ou Nim contre un algorithme.
- d'après E. Charlier, systèmes de numération, `http://reflexions.ulg.ac.be/cms/c_23086/sur-quelle-base-compter`
- d'après M. Rigo, jeux combinatoires, `http://reflexions.ulg.ac.be/cms/c_23157/les-jeux-des-maths-sans-en-avoir-lair`

Alors, qui veut jouer avec moi ?