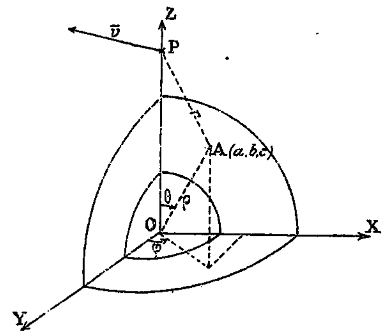
Extrait des *Mémoires de la Société royale des Sciences de Liége.*
3e série, tome XIV.

Attraction d'un corps formé de couches sphériques concentriques homogènes, sur un point extérieur, dans le cas d'un potentiel riemannien.

Application des potentiels riemanniens au cas d'un corps sphérique.

1. — Considérons un corps C limité par deux sphères concentriques, de rayons R_0 et R_1; supposons que la densité σ de chaque point A de ce corps soit seulement fonction de la distance $\rho = OA$, O étant le centre des sphères.



Supposons enfin qu'en un point P de masse 1 et extérieur au corps, la masse dm placée en A produise le potentiel

$$\Phi_1 = \left[\frac{f}{r}(1+\delta) - \alpha\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - \beta\left(\frac{d\theta_1}{dt}\right)^2\right] \cdot dm, \qquad (1)$$

r et θ_1 étant les coordonnées polaires de centre A, dans le plan de A et de la vitesse $\bar{v}$ du point P. Quant à α, β et δ, ce sont des fonctions de r seulement.

3. — Nous écrirons d'abord la formule (6) sous la forme

$$\left.\begin{aligned}
\Phi = {} & 2\pi f\int_{R_0}^{R_1}\int_0^{\pi}\frac{\sigma\rho^2\sin\theta}{(z^2+\rho^2-2\rho z\,.\cos\theta)^{3/2}}\\
& .\left[1+\delta\left(\sqrt{z^2+\rho^2-2\rho z\,.\cos\theta}\right)\right].\,d\rho\,.\,d\theta\\
& -2\pi(y'^2+z'^2)\int_{R_0}^{R_1}\int_0^{\pi}\frac{\sigma\rho^2\,.\sin\theta\,.\,\beta\left(\sqrt{z^2+\rho^2-2\rho z\,.\cos\theta}\right)}{z^2+\rho^2-2\rho z\,.\cos\theta}\,.\,d\rho\,.\,d\theta\\
& -\int_{R_0}^{R_1}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\left[\alpha\left(\sqrt{z^2+\rho^2-2\rho z\,.\cos\theta}\right)-\frac{\beta\left(\sqrt{\quad}\right)}{z^2+\rho^2-2\rho z\,.\cos\theta}\right]\\
& .\frac{[zz'-z'\rho\cos\theta-y'\rho\sin\theta\cos\varphi]^2}{z^2+\rho^2-2\rho z\cos\theta}\,.\,\sigma\rho^2\sin\theta\,.\,d\rho\,.\,d\theta\,.\,d\varphi.
\end{aligned}\right\}(7)$$

Considérons la troisième intégrale. Elle vaut

$$\left.\begin{aligned}
& \pi\int_{R_0}^{R_1}\int_0^{\pi}\left[\alpha-\frac{\beta}{z^2+\rho^2-2\rho z\,.\cos\theta}\right].\,\sigma\rho^2\,.\sin\theta\\
& \qquad .\frac{2(zz'-z'\rho\,.\cos\theta)^2+y'^2\,.\,\rho^2\,.\sin^2\theta}{z^2+\rho^2-2\rho z\,.\cos\theta}\,.\,d\rho\,.\,d\theta.
\end{aligned}\right\}$$

Pour obtenir les diverses intégrales par rapport à θ, nous devons poser

$$z^2+\rho^2-2\rho z\,.\cos\theta=t;\qquad \text{d'où}\qquad dt=2\rho z\,.\sin\theta\,.\,d\theta.$$

Cela étant, on trouve facilement :

$$\left.\begin{aligned}
1^\circ\ & \int_0^{\pi}\frac{\sin\theta}{(z^2+\rho^2-2\rho z\,.\cos\theta)^{3/2}}\,.\left[1+\delta\left(\sqrt{z^2+\rho^2-2\rho z\,.\cos\theta}\right)\right].\,d\theta\\
& \qquad =\frac{2}{z}+\frac{1}{2\rho z}\left\{F[(z+\rho)^2]-F[(z-\rho)^2]\right\},
\end{aligned}\right\}$$

moyennant

$$F(t)=\int\frac{\delta\left(\sqrt{t}\right)}{\sqrt{t}}\,.\,dt;$$

$$\left.\begin{aligned}
2^\circ\ & \int_0^{\pi}\beta\left(\sqrt{z^2+\rho^2-2\rho z\,.\cos\theta}\right).\,\frac{\sin\theta\,.\,d\theta}{z^2+\rho^2-2\rho z\,.\cos\theta}\\
& \qquad =\frac{1}{2\rho z}\left\{P[(z+\rho)^2]-P[(z-\rho)^2]\right\},
\end{aligned}\right\}$$

moyennant

$$P(t)=\int\frac{\beta\left(\sqrt{t}\right)}{t}\,.\,dt;$$

$$\left.\begin{aligned}
3^\circ\ & \int_0^{\pi}\sin\theta\,.\,\frac{2(zz'-z'\rho\,.\cos\theta)^2+y'^2\,.\,\rho^2\,.\sin^2\theta}{z^2+\rho^2-2\rho z\cos\theta}\\
& \qquad .\,\alpha\left(\sqrt{z^2+\rho^2-2\rho z\,.\cos\theta}\right).\,d\theta\\
& \qquad =\frac{1}{2\rho z}\left\{\begin{aligned}& m[G(z+\rho)^2-G(z-\rho)^2]\\ & +n[H(z+\rho)^2-H(z-\rho)^2]\\ & +p[K(z+\rho)^2-K(z-\rho)^2]\end{aligned}\right\},
\end{aligned}\right\}$$

moyennant

$$G(t)=\int\frac{\alpha\left(\sqrt{t}\right)}{t}\,.\,dt;\qquad H(t)=\int\alpha\left(\sqrt{t}\right).\,dt;$$

$$K(t)=\int\alpha\left(\sqrt{t}\right).\,t\,.\,dt$$

et

$$m=\frac{1}{4}\left(y'^2-2z'^2\right)\left(2\rho^2-z^2-\frac{\rho^4}{z^2}\right);$$

$$n=2z'^2+\frac{z^2+\rho^2}{2z^2}\,.\,(y'^2-2z'^2);\quad p=-\frac{1}{4z^2}\,.\,(y'^2-2z'^2);$$

$$\left.\begin{aligned}
4^\circ\ & \int_0^{\pi}\frac{\beta\left(\sqrt{z^2+\rho^2-2\rho z\,.\cos\theta}\right)}{z^2+\rho^2-2\rho z\,.\cos\theta}\,.\sin\theta\\
& \qquad .\,\frac{2(zz'-z'\rho\cos\theta)^2+y'^2\rho^2\sin^2\theta}{z^2+\rho^2-2\rho z\,.\cos\theta}\,.\,d\theta\\
& \qquad =\frac{1}{2\rho z}\left\{\begin{aligned}& m[M(z+\rho)^2-M(z-\rho)^2]\\ & +n[P(z+\rho)^2-P(z-\rho)^2]\\ & +p[N(z+\rho)^2-N(z-\rho)^2]\end{aligned}\right\}
\end{aligned}\right\}$$

moyennant

$$M(t) = \int \frac{\beta(\sqrt{t})}{t^2} \cdot dt \qquad \text{et} \qquad N(t) = \int \beta(\sqrt{t}) \cdot dt.$$

On en tire finalement la formule :

$$\left.\begin{aligned}
\Phi = 2\pi f \int_{R_0}^{R_1} \sigma\rho^2 \left\{ \frac{2}{z} + \frac{1}{2\rho z} \left[F(z+\rho)^2 - F(z-\rho)^2 \right] \right\} \cdot d\rho \\
- \pi \cdot \frac{y'^2 + x'^2}{z} \cdot \int_{R_0}^{R_1} \sigma\rho \left\{ P(z+\rho)^2 - P(z-\rho)^2 \right\} \cdot d\rho \\
- \frac{\pi}{2z} \cdot \int_{R_0}^{R_1} \sigma\rho \left\{ \begin{aligned} & m\left[G(z+\rho)^2 - G(z-\rho)^2\right] \\ & + n\left[H(z+\rho)^2 - H(z-\rho)^2\right] \\ & + p\left[K(z+\rho)^2 - K(z-\rho)^2\right] \\ & - m\left[M(z+\rho)^2 - M(z-\rho)^2\right] \\ & - n\left[P(z+\rho)^2 - P(z-\rho)^2\right] \\ & - p\left[N(z+\rho)^2 - N(z-\rho)^2\right] \end{aligned} \right\} \cdot d\rho.
\end{aligned}\right\} \quad (8)$$

σ est une certaine fonction de ρ seulement; les deux premières intégrales de (8) sont des fonctions de z; dans la troisième intégrale on trouvera, au premier degré, des termes en z'^2 et en $y'^2 - z'^2$, provenant de m, n et p.

Si le point P est à la distance Δ du centre, on aura

$$z = \Delta; \qquad y'^2 + z'^2 = v^2;$$

$$z'^2 = \left(\frac{d\Delta}{dt}\right)^2 \qquad \text{et} \qquad y'^2 - 2z'^2 = v^2 - 3\left(\frac{d\Delta}{dt}\right)^2.$$

Par suite, Φ a la forme

$$\Phi = f(\Delta) + v^2 \cdot g(\Delta) + \left(\frac{d\Delta}{dt}\right)^2 \cdot h(\Delta), \qquad (9)$$

f, g et h représentant les fonctions de Δ seulement.

La formule (9) est du type riemannien considéré habituellement jusqu'ici.

4. — Exemple I. *Loi de Weber :*

$$\Phi_1 = \frac{f}{r}\left[1 - \frac{1}{\gamma^2} \cdot \left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right] \cdot dm. \qquad (\gamma^2 = \text{constante}).$$

Ici, on a

$$\delta = 0, \qquad \alpha = \frac{f}{\gamma^2 r}, \qquad \beta = 0;$$

donc

$$F = 0; \qquad P = 0; \qquad M = 0; \qquad N = 0;$$

$$G(t) = -\frac{2f}{\gamma^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{t}}; \quad H(t) = \frac{2f}{\gamma^2} \cdot \sqrt{t}; \quad K(t) = \frac{2f}{3\gamma^2} \cdot t^{3/2}.$$

Désignons par μ la masse totale de C; on a

$$\mu = \int_{R_0}^{R_1} 4\pi\sigma\rho^2 \cdot d\rho.$$

Cela étant, on trouve aisément en partant de (8)

$$\Phi = \frac{f\mu}{z} - \frac{\pi f}{\gamma^2 . z} \cdot \int_{R_0}^{R_1} \sigma\rho \left(\begin{aligned} & \frac{m}{z-\rho} - \frac{m}{z+\rho} \\ & + 2n\rho + 2pz^2\rho + \frac{2p}{3}\rho^3 \end{aligned} \right) \cdot d\rho.$$

La parenthèse contenue dans l'intégrale (5) vaut, en tenant compte des valeurs de m, n et p,

$$4\rho z'^2 + (y'^2 - 2z'^2) \cdot \frac{4\rho^3}{3z^2}.$$

D'où finalement

$$\Phi = \frac{f\mu}{z}\left(1 - \frac{z_1'^2}{\gamma^2}\right) + \frac{4\pi f . (3z'^2 - v^2)}{3\gamma^2 . z^3} \int_{R_0}^{R_1} \sigma\rho^4 . d\rho. \qquad (10)$$

C'est la formule trouvée par Koenigsberger.

5. — Exemple II. Loi plus générale :

$$\Phi_1 = \frac{f}{r}\left\{1 + \frac{Af\mu}{\gamma^2 r} - \frac{1}{\gamma^2}\left[B\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + Cr^2 . \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]\right\} . dm,$$

A, B, C et γ^2 étant des constantes.

Ici, on a

$$\varepsilon = \frac{Af\mu}{\gamma^2 . r}, \qquad \alpha = \frac{fB}{\gamma^2 r}, \qquad \beta = \frac{fCr}{\gamma^2}.$$

D'où

$$F(t) = \frac{Af\mu}{\gamma^2} . \operatorname{Log} t; \qquad G(t) = \frac{-2fB}{\gamma^2 . \sqrt{t}}; \qquad H(t) = \frac{2fB}{\gamma^2} . \sqrt{t};$$

$$K(t) = \frac{2fB}{3\gamma^2} . t^{3/2};$$

$$P(t) = \frac{2fC}{\gamma^2} . \sqrt{t}; \qquad M(t) = -\frac{2fC}{\gamma^2 . \sqrt{t}}; \qquad N(t) = \frac{2fC}{3\gamma^2} . t^{3/2}.$$

On en tire

$$\left.\begin{aligned}\Phi = \frac{f\mu}{z} - \frac{f\mu C}{\gamma^2 . z} . (y'^2 + z'^2) + \frac{2\pi A f^2 \mu}{\gamma^2 . z} . \int_{R_0}^{R_1} \sigma . \rho . \operatorname{Log}\frac{z+\rho}{z-\rho} . d\rho \\ - \frac{\pi f . (B - C)}{\gamma^2 z} . \int_{R_0}^{R_1} \sigma\rho\left[4\rho z'^2 + (y'^2 - 2z'^2)\frac{4\rho^3}{3z^2}\right] . d\rho.\end{aligned}\right\}$$

Posons

$$\psi(z) = \int_{R_0}^{R_1} \sigma . \rho . \operatorname{Log}\frac{z+\rho}{z-\rho} . d\rho.$$

et remplaçons z par Δ.

On aura finalement

$$\left.\begin{aligned}\Phi = \frac{f\mu}{\Delta}\left\{1 + \frac{B - C}{\gamma^2} . \Delta'^2 - \frac{C}{\gamma^2} . v^2\right\} + \frac{2\pi A f^2 \mu}{\gamma^2 . \Delta} . \psi(\Delta) \\ + \frac{4\pi f . (3\Delta'^2 - v^2)}{3\gamma^2 . \Delta^3} . (B - C) . \int_{R_0}^{R_1} \sigma\rho^4 . d\rho.\end{aligned}\right\} \quad (11)$$

6. — Considérons enfin le cas où le potentiel produit en P par la masse dm située en A (a, b, c) soit (*)

$$w_1 = \left[\begin{aligned} u\,(x - a,\ y - b,\ z - c) \\ + v\,(x - a,\ y - b,\ z - c,\ x',\ y',\ z')\end{aligned}\right] dm.$$

Il faudra calculer ici

$$W = \int_{R_0}^{R_1}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} (u + v) . \sigma\rho^2 . \sin\theta . d\rho . d\theta . d\varphi$$

où l'on aura remplacé a, b et c par $\rho \sin\theta \sin\varphi$, $\rho \sin\theta \cos\varphi$ et $\rho \cos\theta$.

On obtiendra une formule telle que

$$W = U(xyz) + V(xyz\,x'y'z').$$

Je tiens, en terminant, à remercier M. le Prof[r] Dehalu qui m'a donné l'idée de cette étude et ne cesse de me prodiguer ses conseils éclairés et ses encouragements.

Observatoire de Meudon (Paris), novembre 1927.

(*) Dans ce cas général, la convention de Mayer est préférable à celle de Riemann.