ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE.

Extrait des *Bulletins de la Classe des Sciences*, 5e série, t. XIV, nos 1-2,
Séance du 5 janvier 1928, pp. 60-66.

ASTRONOMIE MATHÉMATIQUE. — **Quelques analogies formelles entre certaines orbites,**

par P. SWINGS, docteur en sciences physiques et mathématiques (*).

1. Sir G. Greenhill a indiqué (**) une analogie formelle entre les orbites obtenues au moyen de la force newtonienne, de la force quasi newtonienne et du ds^2 d'Einstein-Schwarzschild.

Je me propose de montrer que les trajectoires obtenues pour les planètes, lorsqu'on applique les potentiels considérés par M. Dehalu (***), présentent la même analogie.

Nous rappellerons d'abord les résultats de Sir Greenhill.

2. Appelons r et θ les coordonnées polaires dans le plan de la planète, le pôle des coordonnées étant le centre du Soleil; nous supposons que les angles θ sont comptés à partir d'un aphélie considéré comme initial. Désignons encore par r_1 la valeur de r au périhélie, par r_2 la distance à l'aphélie et par ρ l'inverse du rayon r.

Considérons d'abord l'orbite newtonienne. Les intégrales premières du mouvement sont (IV)

$$\left.\begin{aligned} & r^2\theta' = r_1^2\theta_1' = r_2^2\theta_2' \quad \text{(intégrale des aires)}; \\ & r'^2 + r^2\theta'^2 - \frac{2k^2}{r} = r_1^2\theta_1'^2 - \frac{2k^2}{r_1} = r_2^2\theta_2'^2 - \frac{2k^2}{r_2} \quad \text{(forces vives)}; \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

(*) Présenté par M. Dehalu.

(**) GREENHILL, *Newton-Einstein Planetary Orbit*. (PHIL. MAG., 1921, série 6, t. XLI, pp. 143-148.)

(***) M. DEHALU, *Le mouvement du périhélie de Mercure*... (BULL. ACAD. ROY. DE BELG. [Classe des Sciences], 1926, no 6, pp. 381-393 [formules 7 et 23].) — M. DEHALU et P. SWINGS, *Sur les potentiels contenant les composantes des vitesses*. (MÉM. IN-8o DE L'ACAD. ROY. DE BELG., 3e partie, § 1, pp. 28-35.)

(IV) Les notations r_1', r_2', θ_1', θ_2' signifient

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)_{r=r_1}, \quad \left(\frac{dr}{dt}\right)_{r=r_2}, \quad \left(\frac{d\theta}{dt}\right)_{r=r_1} \quad \text{et} \quad \left(\frac{d\theta}{dt}\right)_{r=r_2}.$$

on a, en effet, $r'_1 = r'_2 = 0$, car r_1 et r_2 sont respectivement un minimum et un maximum de r.

Entre les quatre équations (1), éliminons θ'_1, θ'_2 et dt; on obtient

$$\frac{d\theta}{dr} = \sqrt{r_1 r_2} \cdot \frac{1}{r\sqrt{(r-r_1)(r_2-r)}}.$$

L'intégration donne

$$\theta = c^{te} - 2 \arcsin \sqrt{\frac{r_1}{r} \cdot \frac{r_2 - r}{r_2 - r_1}}.$$

Pour déterminer la constante, on fera $r = r_2$. On obtient

$$\frac{r_1}{r} \cdot \frac{r_2 - r}{r_2 - r_1} = \sin^2 \frac{\theta}{2};$$

d'où

$$\frac{1}{r_N} = \frac{\sin^2 \frac{\theta}{2}}{r_1} + \frac{\cos^2 \frac{\theta}{2}}{r_2}. \tag{2}$$

3. *Orbite einsteinienne.* — L'intégration par les fonctions elliptiques (*) conduit à

$$\frac{1}{r_E} = \frac{\mathrm{sn}^2 \frac{q\theta}{2}}{r_1} + \frac{\mathrm{cn}^2 \frac{q\theta}{2}}{r_2}. \tag{3}$$

q étant une certaine constante, très voisine de l'unité.

4. Orbite obtenue par la force centrale quasi newtonienne

$$F = -\frac{k^2 m}{r^2}\left(1 + \frac{\lambda}{r}\right),$$

m étant la masse de la planète.

On trouve alors

$$\frac{1}{r_M} = \frac{\sin^2 \frac{\varkappa\theta}{2}}{r_1} + \frac{\cos^2 \frac{\varkappa\theta}{2}}{r_2}, \tag{4}$$

(*) Cette intégration a été faite par divers auteurs, notamment par M. Forsyth, *Proc. R. Soc.*, A, Londres, 1920, t. XCVII, p. 145.

avec

$$\varkappa = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\lambda}{2}\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)}}.$$

5. Nous allons maintenant étudier l'orbite obtenue par le potentiel du genre riemannien

$$\Phi = \frac{k^2 m}{r}\left(1 + \frac{\alpha k^2}{c^2 r} - \frac{\beta v^2}{c^2}\right). \tag{5}$$

La seconde famille étudiée par M. Dehalu, savoir

$$\Phi_1 = \frac{k^2 m}{r}\left(1 + \frac{\alpha k^2}{c^2 r} - \frac{\beta r'^2}{c^2}\right),$$

se traiterait à peu près de la même façon.

Les intégrales des aires et des forces vives correspondant à Φ sont respectivement

$$r^2 \cdot \theta' \cdot \left(1 + \frac{2\beta k^2}{c^2 r}\right) = h \tag{6}$$

et

$$\left(r'^2 + r^2 \cdot \theta'^2\right)\left(1 + \frac{2\beta k^2}{c^2 r}\right) - \frac{2k^2}{r}\left(1 + \frac{\alpha k^2}{c^2 r}\right) = A_1, \tag{7}$$

h et A_1, étant des constantes.

Éliminons dt entre les équations (6) et (7). Nous obtenons

$$\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2 + \rho^2 = \frac{2k^2}{h^2}\left(1 + \frac{2\beta k^2}{c^2}\rho\right)\left(\rho + \frac{\alpha k^2}{c^2}\rho^2 + A_1\right). \tag{8}$$

Cette équation nous montre que ρ s'exprimera en fonction de θ au moyen des fonctions elliptiques. Au lieu des constantes h et A_1, nous allons, en vue de la symétrie, introduire les nombres r_1 et r_2.

Pour cela, nous tiendrons compte de ce que

$$\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)_{\rho=\frac{1}{r_2}} = \left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)_{\rho=\frac{1}{r_1}} = 0.$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{r_2}\left(1+\frac{2\beta k^2}{c^2 r_2}\right)\left(1+\frac{\alpha k^2}{c^2 r_2}\right)+A_1\left(1+\frac{2\beta k^2}{c^2 r_2}\right)-\frac{h^2}{2k^2 r_2^2}=0\\ \frac{1}{r_1}\left(1+\frac{2\beta k^2}{c^2 r_1}\right)\left(1+\frac{\alpha k^2}{c^2 r_1}\right)+A_1\left(1+\frac{2\beta k^2}{c^2 r_1}\right)-\frac{h^2}{2k^2 r_1^2}=0\end{aligned}\right\}$$

D'où

$$A_1 = \frac{C}{B r_1 r_2} \quad \text{et} \quad h = \frac{2Ak^2}{B} \tag{9}$$

en posant

$$\left.\begin{aligned}A &= \frac{k^2}{r_1}\cdot\left(1+\frac{\alpha k^2}{c^2 r_1}\right)-\frac{k^2}{r_2}\cdot\left(1+\frac{\alpha k^2}{c^2 r_2}\right)\\ B &= \frac{k^2}{r_1^2}\cdot\frac{1}{1+\frac{2\beta k^2}{c^2 r_1}}-\frac{k^2}{r_2^2}\cdot\frac{1}{1+\frac{2\beta k^2}{c^2 r_2}}\\ C &= \frac{k^2}{r_2}\cdot\frac{1+\frac{\alpha k^2}{c^2 r_1}}{1+\frac{2\beta k^2}{c^2 r_2}}-\frac{k^2}{r_1}\cdot\frac{1+\frac{\alpha k^2}{c^2 r_2}}{1+\frac{2\beta k^2}{c^2 r_1}}\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

L'équation (8) devient ainsi

$$\left.\begin{aligned}A\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2 = -A\rho^2 + B\rho\left(1+\frac{\alpha k^2\rho}{c^2}\right)\left(1+\frac{2\beta k^2\rho}{c^2}\right)\\ +\frac{C}{r_1 r_2}\left(1+\frac{2\beta k^2\rho}{c^2}\right).\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

On en tire

$$d\theta = \frac{\sqrt{A}\,.\,d\rho}{\sqrt{B\rho\left(1+\frac{\alpha k^2\rho}{c^2}\right)\left(1+\frac{2\beta k^2\rho}{c^2}\right)-A\rho^2+\frac{C}{r_1 r_2}\cdot\left(1+\frac{2\beta k^2\rho}{c^2}\right)}}. \tag{12}$$

Il faut chercher les zéros du polynôme P du 3ᵉ degré en ρ situé sous le radical dans (12). Ce polynôme contient certainement en facteur le produit

$$\left(\rho-\frac{1}{r_2}\right)\left(\frac{1}{r_1}-\rho\right);$$

par suite, on a

$$P = \left(\rho-\frac{1}{r_2}\right)\left(\frac{1}{r_1}-\rho\right)\left[-\frac{2B\alpha\beta k^4}{c^4}\rho-\left(\begin{aligned}\frac{B\alpha k^2}{c^2}+\frac{2B\beta k^2}{c^2}\\ +\frac{2B\alpha\beta k^4}{c^4 r_1}\\ +\frac{2B\alpha\beta k^4}{c^4 r_2}-A\end{aligned}\right)\right]. \tag{13}$$

Pour la suite, il nous est nécessaire de supposer que α et β ne sont pas nuls; d'ailleurs, lorsque $\alpha=0$ ou $\beta=0$ ou $\alpha=\beta=0$, on est ramené à des quadratures élémentaires.

Posons

$$D = \frac{Ac^4}{2B\alpha\beta k^4}-\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}-\frac{c^2.(\alpha+2\beta)}{2\alpha\beta k^2}. \tag{14}$$

L'équation (12) devient

$$d\theta = \frac{c^2}{k^2}\cdot\sqrt{\frac{A}{2B\alpha\beta}}\,\frac{d\rho}{\sqrt{\left(\rho-\frac{1}{r_2}\right)\left(\frac{1}{r_1}-\rho\right)\left(D-\rho\right)}}. \tag{15}$$

En vue de comparer ce cas avec les orbites newtonienne (2) et einsteinienne (3), nous allons chercher l'expression de ρ au moyen des fonctions *sn* (*).

Pour cela, posons

$$\rho = \frac{1}{r_2}+\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)x^2. \tag{16}$$

(*) Soit Σ la somme des trois zéros du dénominateur de (15); on pourrait exprimer $\rho-\frac{\Sigma}{3}$ par une fonction p de Weierstrass; mais pour notre recherche, les expressions au moyen des fonctions *sn* et *cn* de Jacobi sont plus intéressantes.

(15) devient

$$d\theta = \mathrm{E} \cdot \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k_1^2 \cdot x^2)}}, \tag{17}$$

avec

$$\mathrm{E} = \frac{2c^2}{k^2} \cdot \sqrt{\frac{\mathrm{A}}{2\mathrm{B}\alpha\beta \cdot \left(\mathrm{D} - \frac{1}{r_2}\right)}}, \qquad k_1^2 = \frac{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}}{\mathrm{D} - \frac{1}{r_2}}. \tag{18}$$

k_1^2 est positif et < 1 ; car $\frac{1}{r_1} > \frac{1}{r_2}$, $\mathrm{D} > \frac{1}{r_2}$ et $\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} < \mathrm{D} - \frac{1}{r_2}$ dans le problème astronomique. Donc on a

$$\theta = \mathrm{c^{te}} + \mathrm{E} \cdot \arg \mathrm{sn}\, x = \mathrm{c^{te}} + \mathrm{E} \cdot \arg \mathrm{sn} \sqrt{\frac{r_1}{r} \cdot \frac{r_2 - r}{r_2 - r_1}}.$$

Pour déterminer la constante, nous ferons $r = r_2$; par hypothèse, on a alors $\theta = 0$; donc $\mathrm{c^{te}} = 0$. On a donc

$$\theta = \mathrm{E} \cdot \arg \mathrm{sn} \sqrt{\frac{r_1}{r} \cdot \frac{r_2 - r}{r_2 - r_1}}; \tag{19}$$

d'où

$$\frac{r_1}{r} \cdot \frac{r_2 - r}{r_2 - r_1} = \mathrm{sn}^2 \frac{\theta}{\mathrm{E}}. \tag{19'}$$

De (19') on déduit

$$\frac{1}{r_\mathrm{D}} = \frac{\mathrm{sn}^2 \frac{\theta}{\mathrm{E}}}{r_1} + \frac{\mathrm{cn}^2 \frac{\theta}{\mathrm{E}}}{r_2}; \tag{20}$$

d'ailleurs, d'après (18) et (10), E est une constante voisine de 2.

On constate immédiatement que la formule (20) présente une grande ressemblance avec l'équation (3) de l'orbite einsteinienne.

Note. — L'équation (19) permet de calculer aisément une valeur approchée de l'avance périhélique, qui vaut, par tour,

$$\delta\varpi = 2\mathrm{EK} - 2\pi,$$

K étant le quart de la période réelle 4K, suivant les notations

habituelles. D'ailleurs, on a pour K la valeur approchée (k_1^2 étant très petit)

$$\mathrm{K} = \frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{k_1^2}{4}\right) = \frac{\pi}{2}\left[1 + \frac{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}}{4\left(\mathrm{D} - \frac{1}{r_2}\right)}\right].$$

En faisant les calculs, on trouve

$$\delta\varpi = \frac{(\alpha + 2\beta)\, k^2}{c^2 a (1 - e^2)} \cdot 2\pi.$$

Cette formule avait été trouvée par M. Dehalu (*) en appliquant le procédé d'intégration approchée d'Eddington.

(*) M. Dehalu, *Le mouvement du périhélie de Mercure...*, formule (18).

Marcel Hayez, imprimeur, rue de Louvain, 112, Bruxelles.