5

ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE.

Extrait des *Bulletins de la Classe des Sciences* Séance du 5 février 1927, n° 2, t. XIII, pp. 88-99.

ASTRONOMIE-MATHÉMATIQUE. — **Les orbites quasi elliptiques, les potentiels riemanniens et les forces centrales,**

par P. SWINGS,
Candidat en sciences physiques et mathématiques (*).

1. Soit donnée une orbite quasi elliptique

$$\frac{d^2\rho}{d\theta^2} + \rho = c^{te} + H(\rho), \tag{1}$$

ρ étant l'inverse du rayon vecteur r, θ l'angle polaire et $H(\rho)$ un terme correctif à l'orbite elliptique.

Nous nous proposons d'abord de déterminer la forme générale d'un potentiel riemannien

$$\Phi = \frac{k^2}{r}(1+\delta) - \alpha_1 \cdot \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - \beta_1 \cdot \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2, \tag{2}$$

α_1, β_1 et δ étant des fonctions de r seulement, le potentiel effectif Φ étant soumis à la condition de donner l'orbite (1) (**).

Nous appliquerons la convention de Fr. Neumann-Riemann (***) pour les potentiels Φ.

(*) Présenté par M. Dehalu.

(**) Un problème analogue, mais plus particulier, a été traité par CANTELLI (*Atti della R. Ac. dei Lincei*, série 5, 1922, RENDIC., 31, I). — Un cas particulier de ce problème se trouve aussi, à titre d'application, dans le mémoire de M. DEHALU et P. SWINGS : *Sur les potentiels contenant les composantes des vitesses*. (MÉM. IN-8° ACAD. ROY. DE BELGIQUE [Classe des Sciences], 1927.)

(***) Cf. M. DEHALU et P. SWINGS, *mém. cité*.

2. Les intégrales premières du mouvement sont

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right] - \frac{k^2}{r}(1+\delta) + \alpha_1\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \beta_1\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + A = 0. \quad (3)$$

et

$$r^2 \cdot \frac{d\theta}{dt}\left(1 + \frac{2\beta_1}{r^2}\right) = h. \qquad (4)$$

Éliminons dt entre ces deux équations; posons $\rho = \frac{1}{r}$ et multiplions les deux membres de l'équation résultante par $(1+2\beta_1\rho^2)^2(1+2\alpha_1)^{-1}$; il vient

$$\left.\begin{aligned} &\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2 + \rho^2\cdot(1+2\beta_1\cdot\rho^2)(1+2\alpha_1)^{-1} \\ &\quad = \frac{2k^2}{h^2}\rho\cdot(1+\delta)(1+2\beta_1\rho^2)^2\cdot(1+2\alpha_1)^{-1} \\ &\quad - \frac{2A}{h^2}(1+2\beta_1\rho^2)^2(1+2\alpha_1)^{-1}. \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Posons

$$\left.\begin{aligned} 1+\delta &= D, \\ 1+2\alpha_1 &= B, \\ 1+2\beta_1\rho^2 &= C. \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Moyennant cette écriture, l'équation (5) prend la forme

$$\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2 + B^{-1}.C.\rho^2 = \frac{2k^2}{h^2}\cdot\rho.DB^{-1}C^2 - \frac{2A}{h^2}B^{-1}C^2. \qquad (7)$$

Dérivons par rapport à θ :

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2\rho}{d\theta^2} + B^{-1}.C.\rho + \frac{1}{2}\cdot\frac{d(B^{-1}C)}{d\rho}\cdot\rho^2 = \frac{k^2}{h^2}\cdot DB^{-1}C^2 \\ &\quad + \frac{k^2}{h^2}\rho\cdot\frac{d(DB^{-1}C^2)}{d\rho} - \frac{A}{h^2}\cdot\frac{d(B^{-1}C^2)}{d\rho}. \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

C'est cette équation qu'il faudra identifier avec l'équation (1).

La constante du second membre de (1) peut dépendre de h et A; nous l'écrirons

$$C^{te} = f(h, A)$$

et, par suite, la relation (1) prendra la forme

$$\frac{d^2\rho}{d\theta^2} + \rho = f(h, A) + H(\rho). \qquad (9)$$

3. Les deux membres de (8) ne peuvent différer de ceux de (9) que par une même quantité; nous sommes ainsi conduit à écrire

$$\left\{\begin{aligned} &\varphi(\rho) = B^{-1}.C.\rho + \frac{1}{2}\cdot\frac{d(B^{-1}C)}{d\rho}\rho^2 - \rho, && (10) \\ &\left.\begin{aligned} \varphi(\rho) &= \frac{k^2}{h^2}\cdot DB^{-1}C^2 + \frac{k^2}{h^2}\cdot\rho\cdot\frac{d(DB^{-1}C^2)}{d\rho} \\ &\quad - \frac{A}{h^2}\cdot\frac{d(B^{-1}C^2)}{d\rho} - H(\rho) - f(h, A). \end{aligned}\right\} && (11) \end{aligned}\right.$$

Supposons B, C et D indépendants de h et A; la relation (10) montre alors que $\varphi(\rho)$ est indépendant de h et A.

Supposons encore — nous nous libérerons ultérieurement de cette hypothèse — que la fonction $H(\rho)$ est indépendante de h et A. Alors (11) donne

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial f(h, A)}{\partial h} = -\frac{2k^2}{h^3}\cdot DB^{-1}C^2 - \frac{2k^2}{h^3}\cdot\rho\cdot\frac{d(DB^{-1}C^2)}{d\rho} + \frac{2A}{h^3}\cdot\frac{d(B^{-1}C^2)}{d\rho}, && (12) \\ &\frac{\partial f(h, A)}{\partial A} = -\frac{1}{h^2}\cdot\frac{d(B^{-1}C^2)}{d\rho}. && (13) \end{aligned}\right.$$

Les premiers membres des équations (12) et (13) sont indépendants de ρ. Donc on a

$$\frac{d(B^{-1}C^2)}{d\rho} = \alpha = c^{te} \qquad (14)$$

et

$$DB^{-1}C^2 + \rho\cdot\frac{d(DB^{-1}C^2)}{d\rho} = \beta = c^{te}. \qquad (15)$$

De (14), on tire

$$B^{-1}C^2 = \alpha\rho + \varepsilon \qquad (\varepsilon = c^{te}) \qquad (16)$$

et de (15)

$$DB^{-1}C^2 = \beta + \frac{\varkappa}{\rho}. \qquad (\varkappa = c^{te}) \tag{17}$$

Nous ne pouvons déterminer ε et $\varkappa$ si nous ne faisons aucune hypothèse sur B, C et D autre que leur indépendance vis-à-vis de h et A.

Nous tirons de (16) et (17)

$$D = \frac{\beta + \varkappa r}{\frac{\alpha}{r} + \varepsilon}. \tag{17'}$$

Cela étant, on peut écrire

$$\frac{\partial f(h, A)}{\partial h} = -\frac{2k^2}{h^3}\cdot\beta + \frac{2A\alpha}{h^3} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f(h, A)}{\partial A} = -\frac{1}{h^2}\cdot\alpha.$$

D'où

$$f(h, A) = \frac{k^2}{h^2}\beta - \frac{A\alpha}{h^2} + \gamma. \tag{18}$$

D'ailleurs l'équation (11), comparée à (14), (15) et (18), donne

$$\varphi(\rho) = \frac{k^2}{h^2}\beta - \frac{A\alpha}{h^2} - \frac{k^2}{h^2}\beta + \frac{A\alpha}{h^2} - \gamma - H(\rho)$$

ou

$$\varphi(\rho) + \gamma + H(\rho) = 0; \tag{19}$$

d'où, par (10),

$$B^{-1}.C.\rho + \frac{1}{2}\cdot\frac{d(B^{-1}C)}{d\rho}\rho^2 - \rho + H(\rho) + \gamma = 0. \tag{20}$$

La solution de l'équation différentielle (20) est

$$B^{-1}.C = 1 - T - 2\gamma r + \eta r^2, \tag{21}$$

η étant une constante et T ayant la valeur

$$T = \frac{2}{\rho^2}\cdot\int_0^\rho H(\rho).d\rho. \tag{21'}$$

4. En résumé, on a, pour déterminer B, C et D, les équations (16), (17), (17'), (21) et (21'). On en tire

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}\left[\frac{\frac{\alpha}{r}+\varepsilon}{(1 - T - 2\gamma r + \eta r^2)^2} - 1\right], \qquad \beta_1 = \frac{r^2}{2}\left[\frac{\frac{\alpha}{r}+\varepsilon}{1 - T - 2\gamma r + \eta r^2} - 1\right],$$

$$1 + \delta = \frac{\beta + \varkappa r}{\frac{\alpha}{r} + \varepsilon}.$$

D'où

$$\left.\begin{aligned} \Phi = \frac{k^2}{r}\cdot\frac{\beta+\varkappa r}{\frac{\alpha}{r}+\varepsilon} - \frac{1}{2}\left[\frac{\frac{\alpha}{r}+\varepsilon}{(1 - T - 2\gamma r + \eta r^2)^2} - 1\right]\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 \\ - \frac{r^2}{2}\left[\frac{\frac{\alpha}{r}+\varepsilon}{1 - T - 2\gamma r + \eta r^2} - 1\right]\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2. \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

L'orbite correspondante est

$$\frac{d^2\rho}{d\theta^2} + \rho = \gamma + \frac{k^2}{h^2}\beta - \frac{A\alpha}{h^2} + H(\rho) \tag{23}$$

et le théorème des aires

$$r^2.\frac{d\theta}{dt}\cdot\frac{\frac{\alpha}{r}+\varepsilon}{1 - T - 2\gamma r + \eta r^2} = h. \tag{24}$$

Comme à tout potentiel riemannien on peut faire correspondre un ds^2 d'Espace-Temps donnant exactement les mêmes résultats (*), on pourra aussi écrire l'expression générale d'un ds^2 donnant l'orbite (1). Ceci ne présente absolument aucune difficulté.

(*) Cf. P. Swings, *Bulletins de la Classe des Sciences*, 9 octobre 1926, pp. 742-753.

5. Exemples. — I. — *Orbite elliptique*. On a ici $H(\rho) = 0$, donc $T = 0$.

Si l'on désire en plus (*) que B, C et D ne tendent ni vers zéro, ni vers l'infini quand ρ tend vers zéro, il faut, en vertu des équations (17) et (21), que l'on prenne

$$\varkappa = 0, \qquad \eta = 0, \qquad \gamma = 0.$$

Alors (**)

$$\Phi = \frac{\beta k^2}{\alpha + \varepsilon r} - \frac{1}{2r}[\alpha + (\varepsilon - 1) r] v^2. \tag{25}$$

II. — *Orbite tirée du* ds² *d'Einstein-Schwarzschild.*

On a ici

$$H(\rho) = \frac{3p^2}{c^2}\rho^2,$$

p^2 étant la constante intervenant dans le ds^2 de Schwarzschild, constante d'ailleurs pratiquement égale à k^2 (***).

Alors

$$T = \frac{2}{\rho^2} \cdot \int_0^\rho H \,.\, d\rho = \frac{2}{\rho^2} \cdot \frac{p^2}{c^2}\rho^3 = \frac{2p^2}{c^2 r}.$$

Si l'on désire avoir

$$C^{te} = \frac{k^2}{h^2}$$

comme dans l'orbite einsteinienne, la façon la plus simple de procéder consiste à poser

$$\gamma = 0, \qquad \beta = 1, \qquad \alpha = 0.$$

(*) C'est dans ces conditions que l'on s'est placé dans le mémoire cité : *Sur les potentiels contenant les composantes des vitesses.*

(**) Pour les conséquences et remarques diverses relatives à cette formule, voir le mémoire cité : *Sur les potentiels ...*

(***) Cf. M. Dehalu, *Bull. de la Classe des Sciences*, 9 octobre 1926, p. 640, notamment équation (6).

Alors

$$\begin{aligned}\Phi = \frac{k^2}{\varepsilon r} - \frac{1}{2}\left[\frac{\varepsilon}{\left(1 - \frac{2p^2}{c^2 r} + \eta r^2\right)^2} - 1\right]\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 \\ - \frac{r^2}{2}\cdot\left[\frac{\varepsilon}{1 - \frac{2p^2}{c^2 r} + \eta r^2} - 1\right]\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\cdot\end{aligned} \tag{26}$$

Si l'on pose pour B, C et D les mêmes conditions que dans l'exemple I, il faut en plus $\eta = 0$.

Le théorème des aires correspondant à (26) est

$$r^2 \cdot \frac{d\theta}{dt} \cdot \frac{\varepsilon}{1 - \frac{2p^2}{c^2 r} + \eta r^2} = h.$$

Si l'on veut le théorème einsteinien des aires, il faut poser

$$\eta = 0, \qquad \varepsilon = 1.$$

Alors

$$\Phi = \frac{k^2}{r} - \frac{1}{2}\left[\left(1 - \frac{2p^2}{c^2 r}\right)^{-2} - 1\right]\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - \frac{r^2}{2}\left[\left(1 - \frac{2p^2}{c^2 r}\right)^{-1} - 1\right]\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\cdot \tag{27}$$

C'est le potentiel trouvé par M. Dehalu (*).

On voit donc qu'on peut obtenir l'orbite einsteinienne par tous les potentiels (26); si, en plus, on désire le théorème einsteinien des aires, il faut, parmi les potentiels (26), choisir la forme (27).

On écrit aisément le ds^2 général équivalent à (26).

III. — Des considérations tout à fait semblables peuvent s'appliquer à toutes les orbites quasi képlériennes telles que (2), quand $H(\rho)$ est indépendant de h et A.

(*) M. Dehalu, *Sur une loi de gravitation analogue à celle d'Einstein.* (Bull. de l'Acad. roy. de Belgique [Classe des Sciences], octobre 1926, p. 639, équation (1).)

Ainsi, on pourra les appliquer si

$$H(\rho) = L_1 \cdot \rho^{n_1} + L_2 \cdot \rho^{n_2} + \cdots + L_\mu \cdot \rho^{n_\mu},$$

$L_1 \ldots L_\mu$ étant des constantes indépendantes de h et A.

6. Supposons que, dans l'orbite donnée, interviennent, parmi les correctifs, des termes en $\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2$ et $\frac{d^2\rho}{d\theta^2}$. Il est parfois possible de ramener ce cas à celui étudié plus haut.

Réunissons tous les termes en $\frac{d^2\rho}{d\theta^2}$ du premier et du second membre; opérons de même pour ceux en $\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2$. Soit $A(\rho)$ le coefficient obtenu pour $\frac{d^2\rho}{d\theta^2}$ et $B(\rho)$ celui que l'on trouve pour $\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2$. Nous serons ramenés au cas étudié, si l'on a

$$B(\rho) = \frac{1}{2} \cdot \frac{dA(\rho)}{d\rho}. \tag{28}$$

Supposons, en effet, que nous soyons dans ce cas et multiplions les deux membres de l'équation par $2\frac{d\rho}{d\theta}$; nous aurons, en écrivant seulement les termes en $\frac{d^2\rho}{d\theta^2}$ et $\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2$,

$$2A\frac{d^2\rho}{d\theta^2} \cdot \frac{d\rho}{d\theta} + \frac{dA}{d\rho} \cdot \frac{d\rho}{d\theta} \cdot \left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2 + \cdots = 0,$$

c'est-à-dire

$$\frac{d}{d\theta}\left[A\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2\right] + \cdots = 0.$$

Intégrons par rapport à θ :

$$A\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2 + \cdots = c^{te}.$$

Divisons les deux membres par A (si $A \neq 0$) :

$$\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2 + \cdots = \frac{c^{te}}{A};$$

puis dérivons par rapport à θ.

Nous nous trouvons alors dans le cas de la formule (1).

Exemple. — L'orbite (*)

$$\frac{d^2\rho}{d\theta^2} + \rho - \frac{k^2}{h} = -\frac{\beta k^2}{c^2} \cdot \left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2 - \frac{2\beta k^2}{c^2} \cdot \rho \cdot \frac{d^2\rho}{d\theta^2} + \frac{2\alpha k^4}{h^2c^2}\rho$$

se trouve dans les conditions de l'extension.

7. Dans le courant de l'identification, nous avons dû nous placer dans l'hypothèse où B, C et D ne dépendent pas de h et A. Cette hypothèse nous explique pourquoi on ne peut tirer, comme cas particulier de la formule (26), le potentiel

$$\Phi = \frac{k^2}{r}\left(1 + \frac{p^2h^2}{c^2k^2} \cdot \frac{1}{r^2}\right) \tag{29}$$

qui donne aussi l'orbite einsteinienne et qui correspond à la force centrale

$$F = -\frac{k^2}{r^2}\left(1 + \frac{3p^2h^2}{c^2k^2} \cdot \frac{1}{r^2}\right). \tag{30}$$

8. Quels que soient les termes correctifs de l'orbite quasi keplérienne, on peut évidemment toujours trouver une force centrale donnant cette orbite.

En effet, soit, par exemple,

$$\frac{d^2\rho}{d\theta^2} + \rho = \frac{k^2}{h^2} + \frac{k^2}{h^2} \cdot f\left(\rho, \frac{d\rho}{d\theta}, \frac{d^2\rho}{d\theta^2}\right) \tag{31}$$

l'équation donnée d'une orbite quasi keplérienne et supposons que l'on pose la condition

$$r^2 \cdot \frac{d\theta}{dt} = h.$$

Supposons que le point mobile ait une masse égale à l'unité;

(*) Cf. M. Dehalu, *Bull. de l'Acad. roy. de Belgique* [Classe des Sciences], nº 6, 1926, p. 390, équation (26).

la force centrale donnant l'orbite (31) est, d'après la formule de Binet,

$$F = -\frac{h^2}{r^2}\left[\frac{k^2}{h^2} + \frac{k^2}{h^2}\cdot f\left(\frac{1}{r}, -\frac{1}{h}\cdot\frac{dr}{dt}, -\frac{r^2}{h^2}\cdot\frac{d^2r}{dt^2}\right)\right],$$

c'est-à-dire

$$F = -\frac{k^2}{r^2}\left[1 + f\left(\frac{1}{r}, -\frac{1}{h}\cdot\frac{dr}{dt}, -\frac{r^2}{h^2}\cdot\frac{d^2r}{dt^2}\right)\right]. \qquad (32)$$

Exemples. — I. — *Orbite einsteinienne.* On a

$$f(\rho, \ldots) = \frac{3p^2}{c^2}\cdot\frac{h^2}{k^2}\cdot\rho^2.$$

D'où

$$F = -\frac{k^2}{r^2}\left(1 + \frac{3p^2h^2}{c^2k^2}\cdot\frac{1}{r^2}\right) \quad \text{et} \quad \Phi = \frac{k^2}{r}\left(1 + \frac{p^2h^2}{c^2k^2}\cdot\frac{1}{r^2}\right).$$

Ce sont les expressions (30) et (29)

II. — Soit l'orbite

$$\frac{d^2\rho}{d\theta^2} + \rho = \frac{k^2}{h^2} - \frac{k^2}{\alpha^2}\cdot\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2 - \frac{2k^2}{\alpha^2}\cdot\rho\cdot\frac{d^2\rho}{d\theta^2}.$$

La force centrale correspondante est, par (32),

$$F = -\frac{k^2}{r^2}\left\{1 - \frac{1}{\alpha^2}\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - 2r\frac{d^2r}{dt^2}\right]\right\}.$$

C'est la force de Weber.

9. Nous allons maintenant étendre les résultats du n° 4 au cas où $H(\rho)$ dépend de h et A; nous indiquerons seulement la marche des calculs, ceux-ci ne présentant d'ailleurs pas de difficulté spéciale.

Les seconds membres des équations (12) et (13) doivent être

complétés respectivement par $-\frac{\partial H}{\partial h}$ et $-\frac{\partial H}{\partial A}$. L'équation (14) doit être remplacée par

$$\frac{d(B^{-1}.C^2)}{d\rho} + h^2\cdot\frac{\partial H}{\partial A} = \alpha;$$

d'où

$$B^{-1}.C^2 = \alpha\rho + T_1 + \varepsilon \quad \text{avec} \quad T_1 = -h^2.\int_0^\rho \frac{\partial H}{\partial A}\cdot d\rho.$$

De même, l'équation (15) modifiée donnera

$$DB^{-1}C^2 = \frac{\varkappa}{\rho} + T_2 + \beta \quad \text{avec} \quad T_2 = -\frac{1}{\rho}\int_0^\rho\left(\frac{Ah^2}{k^2}\cdot\frac{\partial H}{\partial A} + \frac{h^3}{2k^2}\cdot\frac{\partial H}{\partial h}\right)d\rho.$$

L'équation (19) sera remplacée par

$$\varphi(\rho) + \frac{h}{2}\cdot\frac{\partial H}{\partial h} + H(\rho) + \gamma = 0;$$

d'où

$$B^{-1}C = \frac{\eta}{\rho^2} - \frac{2\gamma}{\rho} + 1 - T_3 \quad \text{avec} \quad T_3 = -\frac{1}{\rho^2}\int_0^\rho\left(2H + h\frac{\partial H}{\partial h}\right)d\rho.$$

On en tire alors comme précédemment α_1, β_1 et δ; par suite, on a l'expression générale de Φ.

10. En résumé, quelle que soit une orbite quasi képlérienne donnée (31), on peut toujours trouver une force centrale engendrant cette orbite (formules 31 et 32); dans le cas où le terme correctif est seulement fonction du rayon vecteur, on peut trouver une famille de potentiels riemanniens (donc de ds^2) donnant cette orbite; ceci est encore vrai lorsque le terme correctif dépend de $\frac{d\rho}{d\theta}$ et $\frac{d^2\rho}{d\theta^2}$, mais avec la relation (28).

Si l'on se donne un potentiel riemannien (ou un ds^2) particulier, on pourra rechercher l'orbite correspondante et, par suite, la famille de potentiels (ou de ds^2) donnant la même orbite que le potentiel particulier envisagé d'abord.

A titre de curiosité, on peut noter que la simple infinité de ds^2

$$ds^2 = \left\{ \begin{array}{l} -\dfrac{\varepsilon}{\left(1-\dfrac{2p^2}{c^2r}\right)^2}\cdot\left(1-\dfrac{2p^2}{c^2\varepsilon r}\right)dr^2 \\ -\dfrac{\varepsilon}{1-\dfrac{2p^2}{c^2r}}\left(1-\dfrac{2p^2}{c^2\varepsilon r}\right)r^2d\theta^2+\left(1-\dfrac{2p^2}{c^2\varepsilon r}\right)c^2dt^2 \end{array} \right.$$

donne l'orbite einsteinienne; ces ds^2 sont déduits de la formule (26) pour $\eta = 0$.

En terminant, je tiens à remercier M. le Prof^r Dehalu pour les encouragements et les conseils éclairés qu'il ne cesse de me prodiguer.

Marcel Hayez, imprimeur, rue de Louvain, 112, Bruxelles

UNIVERSITÉ DE LIÈGE

INSTITUT D'ASTRONOMIE ET DE GÉODÉSIE

N° 16

OBSERVATIONS DE L'ÉCLIPSE DE SOLEIL DU 29 JUIN 1927

FAITES A L'ÉQUATORIAL DE L'OBSERVATOIRE DE COINTE

PAR

L. HERMANS
Assistant à l'Observatoire

BRUXELLES
MARCEL HAYEZ, IMPRIMEUR DE L'ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE
112, Rue de Louvain, 112

1927