ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE

Extrait des *Bulletins de la Classe des Sciences*. Séance du 9 octobre 1926, n° 10, pp. 742-753.

ASTRONOMIE-MATHÉMATIQUE. — **Les potentiels riemanniens et les formes quadratiques einsteiniennes dans le problème des deux corps,**

par P. SWINGS,

candidat en sciences physiques et mathématiques (*).

1. Divers auteurs ont tenté, en restant dans la mécanique classique, de substituer à la loi de gravitation d'Einstein d'autres lois rendant compte, au moins en partie, de l'avance séculaire anomale du périhélie de Mercure et de la déviation du rayon lumineux dans un champ de gravitation. Dans une note toute récente (**), M. Dehalu a même indiqué une loi qui conduit aux mêmes équations du problème des deux corps que la mécanique relativiste.

Je me propose de montrer qu'à tout ds^2 dans un champ gravifique stationnaire à symétrie sphérique correspond un potentiel riemannien donnant exactement les mêmes résultats et réciproquement. Le potentiel de M. Dehalu est un cas particulier du problème général que je vais étudier.

2. Supposons le mouvement plan et r, θ les coordonnées polaires du plan. Nous considérerons la forme la plus générale de ds^2 dans les conditions du problème (***)

$$ds^2 = -g_1 \cdot dr^2 - g_3 \cdot r^2 d\theta^2 + g_4 \cdot c^2 dt^2, \tag{1}$$

(*) Présenté par M. Dehalu.

(**) M. DEHALU, *Sur une loi de gravitation pouvant remplacer celle d'Einstein*. (BULL. DE L'ACAD. ROY. DE BELGIQUE [Classe des Sciences], octobre 1926.)

(***) Cf. DE DONDER, *La Gravifique einsteinienne*, p. 86, § 53. — J. BECQUEREL, *Le Principe de Relativité et la Théorie de la Gravitation*, p. 224.

g_1, g_3 et g_4 étant des fonctions de r seulement, supposées non nulles pour les valeurs de r que l'on considérera. L'équation

$$\delta \int ds = 0 \tag{2}$$

équivaut à

$$\delta \int \mathrm{R}\,dt = 0, \tag{3}$$

si l'on pose

$$\mathrm{R} = \frac{ds}{dt} = \sqrt{-g_1\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - g_3 r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + g_4 c^2}. \tag{4}$$

La condition (3) conduit aux équations de Lagrange (*)

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial q_i'} - \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial q_i} = 0 \qquad (q_1 = r, \quad q_2 = \theta).$$

La seconde équation de Lagrange donne

$$\frac{1}{\mathrm{R}} g_3 r^2 \frac{d\theta}{dt} = a \qquad (a = \mathrm{c}^{\mathrm{te}}). \tag{5}$$

De plus, R ne contenant pas explicitement t, on a (**)

$$r' \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial r'} + \theta' \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial \theta'} - \mathrm{R} = \mathrm{c}^{\mathrm{te}},$$

(*) Cf. De Donder, ouvrage cité, p. 50, équation 176.

(**) Pour le montrer, il suffit de prouver que l'expression

$$\Psi = \frac{d}{dt}\left[r' \cdot \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial r'} + \theta' \cdot \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial \theta'} - \mathrm{R}\right]$$

est nulle. On a

$$\begin{aligned}\Psi &= r' \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial r'}\right) + \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial r'} r'' + \theta' \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial \theta'}\right) \\ &+ \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial \theta'} \cdot \theta'' - \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial r} r' - \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial r'} r'' - \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial \theta} \theta' - \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial \theta'} \cdot \theta'' \\ &= r'\left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial r'}\right) - \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial r}\right\} + \theta'\left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial \theta'}\right) - \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial \theta}\right\}.\end{aligned}$$

D'après les équations de Lagrange, on a bien $\Psi = 0$.

c'est-à-dire

$$\frac{g_1}{\mathrm{R}}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{g_3}{\mathrm{R}} \cdot r^2 \cdot \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \mathrm{R} = \mathrm{c}^{\mathrm{te}} = \mathrm{E},$$

ou, en multipliant les deux membres par R,

$$g_4 c^2 = \mathrm{E\,R} \tag{6}$$

Éliminons R entre les équations (5) et (6); il vient

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{g_4}{g_3} \cdot \frac{a}{\mathrm{E}} c^2. \tag{7}$$

C'est l'analogue du théorème des aires.

On obtiendra l'analogue du théorème des forces vives en remplaçant dans (6), R par sa valeur (4) et en élevant les deux membres au carré. Il vient

$$g_1\left(\frac{dr}{dt}\right) + g_3 r^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 - g_4 c^2 + \frac{g_4^2 \cdot c^4}{\mathrm{E}^2} = 0. \tag{8}$$

L'équation (7) peut encore s'écrire

$$r^2 \cdot \frac{d\theta}{dt} = h_1 \cdot \frac{g_4}{g_3} \qquad \text{avec} \qquad h_1 = \frac{ac^2}{\mathrm{E}}. \tag{9}$$

La formule (6) permettra de calculer, au moyen des données à un instant t_0, le E correspondant à un ds^2 donné, dans des conditions données; cette formule (6) montre d'ailleurs que, pour les ds^2 qui s'introduisent dans la gravitation, E est très voisin de c.

3. Considérons maintenant un potentiel effectif

$$\Phi = \frac{k^2}{r}(1+\delta) - \alpha\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - \beta\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 - \gamma \frac{dr}{dt} \cdot \frac{d\theta}{dt}. \tag{10}$$

α, β, γ et δ étant des fonctions de r seulement.

L'équation des aires modifiée est

$$r^2 \frac{d\theta}{dt}\left(1 + \frac{2\beta}{r^2}\right) + \gamma \frac{dr}{dt} = h_2 \tag{11}$$

et l'équation des forces vives

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\left(\frac{1}{2} + \alpha\right) + \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\left(\frac{r^2}{2} + \beta\right) + \gamma \frac{dr}{dt} \cdot \frac{d\theta}{dt} - \frac{\mathrm{K}^2}{r}(1+\delta) + \mathrm{A} = 0. \tag{12}$$

4. Pour qu'un certain potentiel Φ et un certain ds^2 donnent les mêmes résultats, il faut et il suffit que les équations (9) et (8) soient respectivement les mêmes que (11) et (12).

La comparaison de (9) et (11) montre immédiatement que l'on a

$$\gamma = 0 \tag{13}$$

et

$$1 + \frac{2\beta}{r^2} = \frac{g_3}{g_4}, \tag{14}$$

car on doit avoir $h_1 = h_2$.

La comparaison des équations (8) et (12) conduit à

$$\frac{\frac{1}{2} + \alpha}{g_1} = \frac{\frac{r^2}{2} + \beta}{g_3 r^2} = \frac{\frac{k^2}{r}(1+\delta) + c^{te}}{g_4 c^2 - \frac{g_4^2 \cdot c^4}{E^2}} = \varkappa, \tag{15}$$

$\varkappa$ pouvant d'ailleurs dépendre de r, mais non s'annuler. On tire de (15)

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{2} + \alpha = g_1 \cdot \varkappa, \\ &\frac{r^2}{2} + \beta = g_3 r^2 \varkappa, \\ &\frac{k^2}{r}(1+\delta) + c^{te} = \left(g_4 c^2 - \frac{g_4^2 \cdot c^4}{E^2}\right)\varkappa. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

La comparaison de la seconde équation (16) à l'équation (14) donne

$$\varkappa = \frac{1}{2g_4}.$$

D'où finalement

$$\alpha = \frac{1}{2}\left(\frac{g_1}{g_4} - 1\right) \tag{17}$$

$$\beta = \frac{r^2}{2}\left(\frac{g_3}{g_4} - 1\right) \tag{18}$$

$$\frac{k^2}{r}(1+\delta) + c^{te} = \frac{c^2}{2} - \frac{1}{2} g_4 \cdot \frac{c^4}{E^2} \qquad (c^{te} = -A) \tag{19}$$

D'ailleurs, comme on doit avoir (*) $\lim g_4 = 1$ pour $r \to \infty$, on a

$$\frac{k^2}{r}(1+\delta) = -\frac{1}{2}(g_4 - 1)\frac{c^4}{E^2}. \tag{20}$$

On peut donc écrire

$$\Phi = -\frac{1}{2}(g_4 - 1)\frac{c^4}{E^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{g_1}{g_4} - 1\right)\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - \frac{r^2}{2}\left(\frac{g_3}{g_4} - 1\right)\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2. \tag{21}$$

A tout ds^2 tel que (1), on peut donc faire correspondre un potentiel tel que (12) qui donne exactement les mêmes résultats. D'ailleurs, il est aisé de déterminer les forces correspondant à un potentiel tel que (12).

5. *Exemples.*

A. *ds^2 de Schwarzschild* (à l'extérieur de la sphère massique). On a

$$g_1 = \left(1 - \frac{2p^2}{c^2 r}\right)^{-1} \qquad g_3 = 1 \qquad g_4 = 1 - \frac{2p^2}{c^2 r}.$$

Donc par (21)

$$\Phi = \frac{p^2}{r} \cdot \frac{c^2}{E^2} - \frac{1}{2}\left[\left(1 - \frac{2p^2}{c^2 r}\right)^{-2} - 1\right]\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - \frac{r^2}{2}\left[\left(1 - \frac{2p^2}{c^2 r}\right)^{-1} - 1\right]\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2.$$

On posera

$$p^2 \cdot \frac{c^2}{E^2} = k^2. \tag{22}$$

D'où

$$\left.\begin{aligned} \Phi = \frac{k^2}{r} &- \frac{1}{2}\left[\left(1 - \frac{2p^2}{c^2 r}\right)^{-2} - 1\right]\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 \\ &- \frac{r^2}{2}\left[\left(1 - \frac{2p^2}{c^2 r}\right)^{-1} - 1\right]\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2. \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

(*) Car, à distance infinie, de toute matière tout ds^2 doit devenir
$$-dr^2 - r^2 d\theta^2 + c^2 dt^2.$$

On retrouve ainsi le potentiel considéré par M. Dehalu dans sa note précitée. La relation (22) montre en outre que, pratiquement, on peut confondre p et k (puisqu'on a sensiblement $\mathrm{E} = c$) et écrire

$$\left.\begin{aligned}\Phi = \frac{k^2}{r} - \frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{2k^2}{c^2r}\right)^{-2} - 1\right]\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 \\ - \frac{r^2}{2}\left[\left(1-\frac{2k^2}{c^2r}\right)^{-2} - 1\right]\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2.\end{aligned}\right\} \quad (24)$$

B. ds^2 de Nordström (à l'extérieur de la sphère massique possédant une charge électrostatique) (*).

$$g_1 = \left(1 - \frac{2p^2}{c^2r} + \frac{\varepsilon^2}{r^2}\right)^{-1} \quad g_3 = 1 \quad g_4 = 1 - \frac{2p^2}{c^2r} + \frac{\varepsilon^2}{r^2}.$$

Il vient par (21), moyennant (22), λ étant une certaine constante,

$$\left.\begin{aligned}\Phi = \frac{k^2}{r}\left(1+\frac{\lambda}{r}\right) - \frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{2p^2}{c^2r}+\frac{\varepsilon^2}{r^2}\right)^{-2} - 1\right]\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 \\ - \frac{r^2}{2}\left[\left(1-\frac{2p^2}{c^2r}+\frac{\varepsilon^2}{r^2}\right)^{-1} - 1\right]\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2.\end{aligned}\right\} \quad (25)$$

C. ds^2 de Painlevé.

Les quatre ds^2 suivants (**) :

$$-f^2(r)\,.\,d\theta^2 - \frac{f'^2(r)\,.\,dr^2}{1-\dfrac{2p^2}{c^2f(r)}} + \left[1 - \frac{2p^2}{c^2f(r)}\right]c^2dt^2,$$

$$-\frac{dr^2}{1-\dfrac{2p^2}{c^2r}} + \left(1-\frac{2p^2}{c^2r}\right)(c^2dt^2 - r^2d\theta^2),$$

$$\left(1-\frac{2p^2}{c^2r}\right)c^2dt^2 - r^2\left(1-\frac{2p^2}{c^2r}\log\frac{rc^2}{p^2}\right)d\theta^2 - dr^2$$

$$\left(1-\frac{2p^2}{c^2r}\right)\left(c^2dt^2 - dr^2\right) - r^2\left(1-\frac{4p^2}{c^2r}\cdot\log\frac{rc^2}{p^2}\right)d\theta^2$$

(*) De Donder, ouvrage cité, p. 95, formule 407.
(**) Painlevé, *La Gravitation dans la mécanique de Newton et dans la mécanique d'Einstein*. (Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences de Paris, t. CLXXIII, p. 882, formules 5, 12bis, 13 et 14.)

conduisent respectivement aux potentiels

$$\left.\begin{aligned}\frac{k^2}{r} - \frac{1}{2}\left[f'^2\left(1-\frac{2p^2}{c^2f}\right)^{-2} - 1\right]\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 \\ - \frac{1}{2}\left[\frac{f^2}{r^2}\left(1-\frac{2p^2}{c^2f}\right)^{-1} - 1\right]r^2\cdot\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2,\end{aligned}\right\}$$

$$\frac{k^2}{r} - \frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{2p^2}{c^2r}\right)^{-2} - 1\right]\left(\frac{dr}{dt}\right)^2$$

$$\frac{k^2}{r} - \frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{2p^2}{c^2r}\right)^{-1} - 1\right]\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - \frac{r^2}{2}\left[\frac{1-\dfrac{2p^2}{c^2r}\cdot\log\dfrac{rc^2}{p^2}}{1-\dfrac{2p^2}{c^2r}} - 1\right]\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

$$\frac{k^2}{r} - \frac{r^2}{2}\left[\frac{1-\dfrac{4p^2}{c^2r}\cdot\log\dfrac{rc^2}{p^2}}{1-\dfrac{2p^2}{c^2r}} - 1\right]\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2.$$

6. Si l'on peut obtenir pour les potentiels trouvés une valeur approchée de la forme

$$\frac{k^2}{r}\left\{1 - \frac{\mathrm{M}k^2}{c^2r} - \frac{1}{c^2}\left[\mathrm{N}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \mathrm{P}r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]\right\},$$

M, N et P étant des constantes, on verra immédiatement si le potentiel en question (donc le ds^2 donné) donne la formule d'Einstein pour l'avance au périhélie d'une planète. La condition est, en effet (*),

$$\mathrm{M} + \mathrm{N} + \mathrm{P} = 3.$$

Ainsi, on voit aisément que le deuxième ds^2 cité, de Painlevé, donne les $^2/_3$ de la formule d'Einstein.

(*) Généralisation des formules (18) et (29) du ravail de M. Dehalu, *Le Mouvement du Périhélie de Mercure déduit de certaines lois de gravitation*. (Bull. de l'Acad. roy. de Belgique [Classe des Sciences], 1926, n° 6, pp. 381-393.)

7. Abordons maintenant le problème inverse.

Les seuls ds^2 pouvant s'introduire dans le problème étant de la forme (1) et amenant des potentiels tels que (12), où $\gamma = 0$, bornons-nous à rechercher quel ds^2 correspond à un potentiel effectif général de la forme

$$\Phi = \frac{k^2}{r}(1+\delta) - \alpha\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - \beta\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2, \tag{26}$$

où α, β et δ sont des fonctions de r seulement.

Reprenons les équations (17), (18), (19) et (20). La valeur de la constante $-A$ qui intervient dans (19) peut être déterminée par l'équation (12) si l'on connaît les conditions à un instant t_0. Dans la suite, A sera supposé connu. (19) combiné à (20) donne

$$-A = \frac{c^2}{2} - \frac{c^4}{2E^2}; \tag{27}$$

d'où

$$E^2 = \frac{c^4}{2A + c^2}, \tag{28}$$

A étant connu; E^2 est donc déterminé.

De (20) nous tirons

$$g_4 = 1 - \frac{2k^2}{c^2 r}(1+\delta)\cdot\frac{E^2}{c^2},$$

puis les équations (17) et (18) donnent

$$g_1 = (1+2\alpha)\left[1 - \frac{2k^2}{c^2 r}(1+\delta)\cdot\frac{E^2}{c^2}\right],$$

$$g_3 = \left(1 + \frac{2\beta}{r^2}\right)\left[1 - \frac{2k^2}{c^2 r}(1+\delta)\cdot\frac{E^2}{c^2}\right].$$

Conformément à l'équation (22), nous poserons

$$k^2\cdot\frac{E^2}{c^2} = p^2. \tag{22'}$$

Le ds^2 cherché est donc

$$\left.\begin{aligned} ds^2 = &-(1+2\alpha)\left[1 - \frac{2p^2}{c^2 r}(1+\delta)\right]dr^2 \\ &-\left(1+\frac{2\beta}{r^2}\right)\left[1 - \frac{2p^2}{c^2 r}(1+\delta)\right]r^2 d\theta^2 \\ &+\left[1 - \frac{2p^2}{c^2 r}(1+\delta)\right]c^2 dt^2. \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

8. *Exemples :*

A. — Considérons le potentiel effectif

$$\Phi = \frac{k^2}{r} - \frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{2p^2}{c^2 r}\right)^{-2} - 1\right]\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - \frac{1}{2}r^2\left[\left(1-\frac{2p^2}{c^2 r}\right)^{-1} - 1\right]\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2.$$

Le ds^2 correspondant est par (29)

$$ds^2 = -\left(1-\frac{2p^2}{c^2 r}\right)^{-1}\cdot dr^2 - r^2 d\theta^2 + \left(1-\frac{2p^2}{c^2 r}\right)c^2 dt^2.$$

On retrouve bien le ds^2 de Schwarzschild.

B. — Considérons le potentiel effectif

$$\Phi = \frac{k^2}{r}\left\{1 + \frac{Mk^2}{c^2 r} - \frac{1}{c^2}\left[N\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + Pr^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]\right\} \tag{30}$$

M, N et P étant des constantes.

Le ds^2 correspondant est

$$ds^2 = \left[1 - \frac{2p^2}{c^2 r}\left(1+\frac{Mk^2}{c^2 r}\right)\right]\left\{\begin{aligned} &-\left(1-\frac{2k^2 N}{c^2 r}\right)dr^2 \\ &-\left(1-\frac{2k^2 P}{c^2 r}\right)r^2 d\theta^2 + c^2 dt^2. \end{aligned}\right. \tag{31}$$

Cas particuliers des formules (30) et (31) :

I. — Lorsque N = P (*), on a

$$g_1 = g_3.$$

(*) M. Dehalu, *Le Périhélie de Mercure*... (*loc. cit.*), formule 7.

En particulier, si M = 0, N = P = 1 (potentiel de Riemann) (*), on a

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2p^2}{c^2 r}\right)\left\{ -\left(1 - \frac{2k^2}{c^2 r}\right)\left(dr^2 + r^2 d\theta^2\right) + c^2 dt^2 \right\}.$$

II. — Lorsque P = 0 (**), on a

$$g_3 = g_4.$$

En particulier, pour M = 0, N = 1, P = 0 (potentiel de Weber) (***), on a

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2p^2}{c^2 r}\right)\left\{ -\left(1 - \frac{2k^2}{c^2 r}\right) dr^2 - r^2 d\theta^2 + c^2 dt^2. \right\}$$

III. — Lorsque M = 0, N = 1 et P = a (potentiel de Lévy) (IV), on a

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2p^2}{c^2 r}\right)\left\{ -\left(1 - \frac{2k^2}{c^2 r}\right) dr^2 - \left(1 - \frac{2ak^2}{c^2 r}\right) r^2 d\theta^2 + c^2 dt^2. \right\}$$

IV. — Lorsque M = N = P = 0 (potentiel newtonien), on a

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2p^2}{c^2 r}\right)\left(c^2 dt^2 - dr^2 - r^2 d\theta^2\right).$$

V. — Lorsque N = P = 0, M ≠ 0 (potentiel quasi newtonien), on a

$$ds^2 = \left[1 - \frac{2p^2}{c^2 r}\left(1 + \frac{Mk^2}{c^2 r}\right)\right]\left(c^2 dt^2 - dr^2 - r^2 d\theta^2\right).$$

9. Il résulte de cet exposé que si l'avance au périhélie de Mercure (V) est bien d'environ 43″ et si la déviation du rayon

(*) M. Dehalu, *Le Périhélie de Mercure... (loc. cit.)*, formule 22.
(**) Idem, *ibid.*, formule 23.
(***) Idem. *ibid.*, formule 24.
(IV) Lévy, *Sur l'application des lois électrodynamiques au mouvement des planètes.* (Comptes rendus de l'Acad. des Sciences de Paris, 1890, pp. 545-551.)
(V) Chazy, *Sur l'avance du périhélie de Mercure.* (Comptes rendus de l'Acad. des Sciences de Paris, 181 (1925), p. 1033.)

lumineux (*) dans le voisinage du Soleil est de l'ordre de 1,7″, cela ne constitue pas une preuve de la relativité. Ces faits prouveraient simplement qu'à la loi de Newton on doit substituer une loi électrodynamique convenable (et admettre l'inertie de l'énergie). La loi de M. Dehalu peut suffire actuellement; mais s'il était établi plus tard que l'avance séculaire anomale du périhélie de Mercure est différente de 43″ (ou la déviation du rayon lumineux différente de celle prévue par Einstein), rien n'empêcherait de modifier quelque peu cette loi pour la faire cadrer avec les observations.

On remarquera enfin qu'on peut arriver à une valeur très approchée du potentiel de M. Dehalu de la façon suivante :

Supposons exactes les formules données par Einstein pour l'avance au périhélie d'une planète et pour la déviation du rayon lumineux. L'équation de l'orbite képlérienne, savoir $\left(\rho = \frac{1}{r}\right)$

$$\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2 + \rho^2 = \frac{2k^2}{h^2}\rho + c^{te}, \tag{32}$$

ne donnant pas de déplacement du périhélie, on peut se proposer d'adjoindre au second membre de l'équation (32) un terme correctif donnant lieu aux formules admises d'Einstein. Pour y arriver le plus facilement, il faut introduire un terme en ρ^3 et l'on vérifie facilement que (32) devra être remplacé par

$$\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2 + \rho^2 = \frac{2k^2}{h^2}\rho + \frac{2k^2}{c^2}\rho^3 + c^{te}. \tag{33}$$

Cela étant, cherchons un potentiel tel que (30) donnant l'équation (33) d'une manière très approchée.

On trouve aisément que l'orbite correspondant à Φ est

$$\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2\left(1 + \frac{2Nk^2}{c^2}\rho\right)\left(1 + \frac{2Pk^2}{c^2}\rho\right)^{-2} + \rho^2\left(1 + \frac{2Pk^2}{c^2}\rho\right)^{-1}$$
$$= \frac{2k^2}{h^2}\left(\rho + \frac{Mk^2}{c^2}\rho^2\right) + c^{te},$$

(*) Esclangon, *Les preuves astronomiques de la Relativité*, p. 16.

ou, d'une manière suffisamment approchée,

$$\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2\left[1+\frac{2k^2}{c^2}\left(\mathrm{N}-2\mathrm{P}\right)\rho\right]+\rho^2=\frac{2k^2}{h^2}\rho+\frac{2\mathrm{M}k^4}{h^2c^2}\rho^2+\frac{2\mathrm{P}k^2}{c^2}\rho^3+c^{te}. \quad (34)$$

Si l'on identifie (33) et (34), on trouve

$$\mathrm{M}=0, \qquad \mathrm{N}=2, \qquad \mathrm{P}=1.$$

D'où

$$\Phi=\frac{k^2}{r}\left\{1-\frac{1}{c^2}\left[2\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]\right\}.$$

On retrouve ainsi très sensiblement le potentiel de M. Dehalu.

Marcel Hayez, imprimeur, rue de Louvain, 112, Bruxelles.

UNIVERSITÉ DE LIÈGE BIBLIOTHÈQUE

19 / V / 1927

SUR
LES POTENTIELS
CONTENANT LES
COMPOSANTES DES VITESSES

PAR

M. DEHALU
Professeur à l'Université de Liége
Correspondant de l'Académie

ET

P. SWINGS
Candidat en Sciences physiques et mathématiques

BRUXELLES
MARCEL HAYEZ, IMPRIMEUR DE L'ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE
112, Rue de Louvain, 112
—
1927