EXTRAIT DU *Bulletin de la Société royale des Sciences de Liége*, N° 11, 1932.

Sur les ds^2 d'Espace-Temps contenant des termes en dt,

(*note présentée à la séance du 20 octobre*),

par P. SWINGS.

1. Dans des publications antérieures [1], il a été montré, par M. Dehalu et nous, que les formes quadratiques différentielles d'espace-temps du genre Einstein-Schwarzschild se ramènent, au point de vue équations de mouvement, à des potentiels contenant les composantes des vitesses. Cette propriété peut être utile pratiquement, parce qu'elle peut aider à comprendre la signification d'un ds^2 et parfois simplifier certains calculs de mécanique relativiste. Dans les ds^2 stationnaires à symétrie sphérique, il n'intervient pas de terme en $dq_i\,dt$. Nous allons maintenant considérer la forme plus complète

$$\left.\begin{aligned} ds^2 = g_{11}(q_1q_2t)\,dq_1^2 + 2g_{12}(q_1q_2t)\,dq_1dq_2 + g_{22}(q_1q_2t)\,dq_2^2 \\ + 2g_{13}(q_1q_2t)\,dq_1dt + 2g_{23}(q_1q_2t)\,dq_2dt + g_{33}(q_1q_2t)\,dt^2 \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

et nous essaierons de ramener cette forme, au moyen d'un changement de variables, à une autre ne contenant plus de terme en $dq_i\,dt$.

Considérons le changement de variables défini par

$$\left.\begin{aligned} q_1 &= f(Q_1, t) \\ q_2 &= g(Q_2, t) \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

et essayons de déterminer les fonctions f et g de manière à simplifier la forme (1) dans le sens indiqué plus haut. Désignons par $G_{\mu\nu}$ ce que devient $g_{\mu\nu}$ quand on y remplace q_1 et q_2 par $f(Q_1, t)$ et $g(Q_2, t)$. On a

$$\left.\begin{aligned} dq_1 &= \frac{\partial f}{\partial Q_1}\cdot dQ_1 + \frac{\partial f}{\partial t}\cdot dt \\ dq_2 &= \frac{\partial g}{\partial Q_2}\cdot dQ_2 + \frac{\partial g}{\partial t}\cdot dt. \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

[1] M. DEHALU, *Bulletin de l'Académie royale de Belgique* (Classe des Sciences), 1926, p. 639; P. SWINGS, *idem*, 1926, p 742; M. DEHALU et P. SWINGS, *Mém. in-8° de l'Académie royale de Belgique* (Classe des Sciences), 1927, t. IX; P. SWINGS, *Bulletin de l'Académie royale de Belgique*, (Classe des Sciences), 1927, p. 88; *C R.*, Paris, 186, 1520, 1928.

Transportons les expressions (3) dans (1); les coefficients des termes en $dQ_1\, dt$ et $dQ_2\, dt$ sont

$$2\frac{\partial f}{\partial Q_1}\cdot\left(G_{11}\frac{\partial f}{\partial t}+G_{12}\frac{\partial g}{\partial t}+G_{13}\right)$$
$$2\frac{\partial g}{\partial Q_2}\cdot\left(G_{12}\frac{\partial f}{\partial t}+G_{22}\cdot\frac{\partial g}{\partial t}+G_{23}\right).$$

Nous supposons

$$\frac{\partial f}{\partial Q_1}\neq 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial g}{\partial Q_2}\neq 0.$$

L'annulation des coefficients des termes en $dQ_1\, dt$ conduira donc aux deux équations

$$\left.\begin{aligned} G_{11}\cdot\frac{\partial f}{\partial t}+G_{12}\cdot\frac{\partial g}{\partial t}+G_{13}&=0\\ G_{12}\cdot\frac{\partial f}{\partial t}+G_{22}\cdot\frac{\partial g}{\partial t}+G_{23}&=0.\end{aligned}\right\}\qquad(4)$$

Dans le cas où l'on a

$$G_{11}G_{22}-G_{12}^2\neq 0,$$

le système (4) donne

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial t}&=\frac{G_{12}G_{23}-G_{13}G_{22}}{G_{11}G_{22}-G_{12}^2}\\ \frac{\partial g}{\partial t}&=\frac{G_{12}G_{13}-G_{11}G_{23}}{G_{11}G_{22}-G_{12}^2}\end{aligned}\right\}$$

ou encore

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial t}&=\frac{g_{12}(f,g,t)\cdot g_{23}(f,g,t)-g_{13}(f,g,t)\cdot g_{22}(f,g,t)}{g_{11}(f,g,t)\cdot g_{22}(f,g,t)-g_{12}^2(f,g,t)}=h_1(f,g,t)\\ \frac{\partial g}{\partial t}&=\frac{g_{12}(f,g,t)\cdot g_{13}(f,g,t)-g_{11}(f,g,t)\cdot g_{23}(f,g,t)}{g_{11}(f,g,t)\cdot g_{22}(f,g,t)-g_{12}^2(f,g,t)}=h_2(f,g,t).\end{aligned}\right\}$$

Une solution particulière de ce système est

$$\left.\begin{aligned}f&=\text{fonction arbitraire de } Q_1+k_1(t)\\ g&=\text{fonction arbitraire de } Q_2+k_2(t)\end{aligned}\right\}$$

k_1 et k_2 étant les intégrales du système

$$\left.\begin{aligned}\frac{dk_1}{dt}&=h_1(k_1,k_2,t)\\ \frac{dk_2}{dt}&=h_2(k_1,k_2,t).\end{aligned}\right\}$$

On pourra choisir f et g pour que l'on ait

$$\frac{\partial f}{\partial Q_1}\neq 0 \quad \frac{\partial g}{\partial Q_2}\neq 0 \qquad \text{et} \qquad G_{11}G_{22}-G_{12}^2\neq 0.$$

Dans ces conditions, le changement de variables (2) ramène la forme (1) à une autre sensiblement plus simple. En particulier, on pourra de cette façon ramener aux ds^2 stationnaires à symétrie sphérique — donc aux potentiels riemanniens — des ds^2 d'allure beaucoup plus compliquée.

2. Dans certains cas, on peut déterminer non un potentiel équivalent, mais bien une force $|(x, y)|$ donnant les mêmes équations de mouvement.

Considérons, par exemple, un mouvement plan et un ds^2 :

$$\left.\begin{aligned}ds^2&=g_{11}(xy)\,dx^2+2g_{12}(xy)\,dx\,dy+g_{22}(xy)\,dy^2\\ &\quad+2g_{13}(xy)\,dx\,dt+2g_{23}(xy)\,dy\,dt+g_{33}(xy)\,dt^2.\end{aligned}\right\}\qquad(5)$$

L'équation

$$\delta\int ds=0$$

peut s'écrire

$$\delta\int S\,dt=0,$$

avec

$$S=\sqrt{g_{11}\cdot\dot x^2+2g_{12}\,\dot x\dot y+g_{22}\dot y^2+2g_{13}\dot x+2g_{23}\dot y+g_{33}};$$

on appliquera donc l'équation

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial S}{\partial\dot q_i}\right)-\frac{\partial S}{\partial q_i}=0\qquad(6)$$

pour

$$q_1=x \quad \text{et} \quad q_2=y.$$

Pour $q_1=x$, l'équation (6) est

$$D_{11}\ddot x+D_{12}\ddot y+D_{13}=0,\qquad(7)$$

les symboles D_{ij} ayant les significations suivantes :

$$\left.\begin{aligned}D_{11}&=2[-\dot y^2\cdot G_{33}+2\dot y\cdot G_{23}-G_{22}];\\ D_{12}&=2[-\dot x\dot y\,G_{33}-\dot x\cdot G_{23}-\dot y\,G_{13}+G_{12}];\\ D_{13}&=\gamma_{111}\cdot\frac{\partial g_{11}}{\partial x}+\gamma_{112}\cdot\frac{\partial g_{11}}{\partial y}+\gamma_{221}\cdot\frac{\partial g_{22}}{\partial x}+\cdots\end{aligned}\right\}$$

On a posé

$$G = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} \text{ avec } g_{ik} = g_{ki};$$

$$G_{ik} = \text{mineur de } g_{ik};$$

$$\gamma_{111} = x^2(-g_{12}\dot{x}\dot{y} - g_{22}\dot{y}^2 - g_{33} - g_{13}\dot{x} - 2g_{23}\dot{y})$$

et des expressions analogues pour les autres γ.

De même, on obtient pour y une équation semblable :

$$D_{21}\ddot{x} + D_{22}\ddot{y} + D_{23} = 0. \tag{8}$$

En résolvant le système d'équations (7) et (8) par rapport à $\ddot{x}$ et $\ddot{y}$, on trouve, si

$$D_{11}D_{22} - D_{12}D_{21} \neq 0,$$

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x} &= f_1(xy\dot{x}\dot{y}t) \\ \ddot{y} &= f_2(xy\dot{x}\dot{y}t), \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

f_1 et f_2 étant les expressions où interviennent les g_{ik} et leurs dérivées partielles.

Si nous posons, m étant la masse du point matériel,

$$\left.\begin{aligned} X(xy\dot{x}\dot{y}t) &= mf_1(xy\dot{x}\dot{y}t) \\ Y(xy\dot{x}\dot{y}t) &= mf_2(xy\dot{x}\dot{y}t) \end{aligned}\right\}$$

nous aurons une force $|(x, y)|$ fournissant les mêmes équations de mouvement que le ds^2 donné (5). Cette force $|(x, y)|$ ne dérive pas en général d'un potentiel.

La méthode indiquée peut s'appliquer à d'autres formes quadratiques différentielles.

Institut d'Astrophysique de l'Université de Liége.
Septembre 1932.

MARCEL HAYEZ, Imprimeur, 112, rue de Louvain, Bruxelles.

UNIVERSITÉ DE LIÉGE

INSTITUT D'ASTRONOMIE ET DE GÉODÉSIE

N° 100

L'année polaire et la création d'une station magnétique temporaire au Congo belge.

PAR

M. M. DEHALU