ASTRONOMIE-MATHÉMATIQUE. — **Sur l'intégration de l'équation des orbites quasi képlériennes par la méthode des approximations successives,**

par P. SWINGS, assistant à l'Université de Liége,
et FL. BUREAU, candidat en Sciences physiques et mathématiques (*).

1. Au cours de ces dernières années, on a été très fréquemment amené à déterminer les déplacements périhéliques $\delta\varpi$ correspondant à des lois de gravitation différentes de celle de Newton. Pour obtenir des valeurs numériques approchées de ces $\delta\varpi$, on a très souvent utilisé le procédé rapide suivant (**). On écrit l'orbite sous la forme

$$\frac{d^2\rho}{d\theta^2} + \rho - \frac{k^2}{h^2} = f\left(\rho,\ \frac{d\rho}{d\theta},\ \theta\right), \tag{1}$$

(r, θ) étant les coordonnées polaires ayant le centre attractif pour pôle; ρ, l'inverse de r; k^2, la constante de gravitation f multipliée par la masse attirante M; h, la constante des aires [ou un nombre très voisin (***)]. Le premier membre de l'équation (1), égalé à zéro, est l'équation différentielle de l'orbite képlérienne, qui donne la première approximation $\rho_0(\theta)$ de la trajectoire cherchée. Le second membre constitue la correction apportée par la nouvelle loi de gravitation, correc-

(*) Présenté par M. Dehalu.

**) Ce procédé est appliqué notamment par EDDINGTON, *The Mathematical Theory of Relativity*. Cambridge, 1923, p. 88.

(***) M. DEHALU, Le mouvement du périhélie de Mercure déduit de certaines lois de gravitation. (*Bull. Acad roy. de Belgique* [Classe des Sciences], 1926, p. 386, formule (11).)

M. DEHALU et P. SWINGS, Sur les potentiels contenant les composantes des vitesses. (*Mém. in-8° Acad. roy. de Belgique* [Classe des Sciences], t. IX, 1927, p. 29.

tion dont la valeur numérique est toujours très petite vis-à-vis de celle de ρ, $\frac{d^2\rho}{d\theta^2}$ et $\frac{k^2}{h^2}$. On remplace, dans le second membre de l'équation (1), ρ et $\frac{d\rho}{d\theta}$ par leurs valeurs képlériennes $\rho_0(\theta)$ et $\frac{d\rho_0}{d\theta}$ et l'on ne prend en considération, parmi les termes du second membre, que ceux qui sont de la forme $A\cos(\theta + B)$, A et B étant des constantes. On résout alors l'équation

$$\frac{d^2 y}{d\theta^2} + y = A\cos(\theta + B)$$

et l'on prend, comme seconde approximation de ρ,

$$\rho_1 = \rho_0 + y.$$

On s'arrête à cette valeur et l'on en tire le $\delta\varpi$.

Dans les pages qui suivent, nous nous proposons d'abord de traiter l'équation générale (1) rigoureusement par la méthode des approximations successives; ensuite, dans un exemple, nous montrerons comment on retrouve le procédé approché que nous avons rappelé plus haut. On remarquera que la méthode employée dans les raisonnements qui vont suivre peut s'appliquer à de nombreuses équations de la mécanique céleste.

2. Considérons l'équation (1). Nous voulons trouver l'intégrale qui sous certaines conditions explicitées plus loin (voir n° 4) satisfait pour $\theta = \theta_0$, aux conditions

$$(\rho)_{\theta=\theta_0} = \rho_0^* \quad \text{et} \quad \left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)_{\theta=\theta_0} = \rho_0'^*, \tag{2}$$

ρ_0^* et $\rho_0'^*$ étant des nombres donnés. Nous commencerons par examiner l'équation (1) sans second membre; celle-ci nous fournira certains renseignements qui nous sont nécessaires par la suite.

L'intégrale ρ_0 de l'équation

$$\frac{d^2\rho}{d\theta^2} + \rho - \frac{k^2}{h^2} = \sigma \tag{3}$$

telle que

$$(\rho_0)^{\theta=\theta_0} = \rho_0^* \quad \text{et} \quad \left(\frac{d\rho_0}{d\theta}\right)_{\theta=\theta_0} = \rho_0'^*$$

s'obtient immédiatement par la méthode de variation des constantes arbitraires; c'est

$$\rho_0 = \rho_0^*\cos(\theta-\theta_0) + \rho_0'^*\sin(\theta-\theta_0) + \int_{\theta_0}^{\theta}\frac{k^2}{h^2}\sin(\theta-\nu)\,d\nu \tag{4}$$

ou

$$\rho_0 = \frac{k^2}{h^2} + \left(\rho_0^* - \frac{k^2}{h^2}\right)\cos(\theta-\theta_0) + \rho_0'^*\sin(\theta-\theta_0).$$

Limite supérieure du module de $\rho_0 - \rho_0^*$.

Supposons $\theta > \theta_0$. D'après (4), nous avons

$$\rho_0 - \rho_0^* = -\rho_0^*[1-\cos(\theta-\theta_0)] + \rho_0'^*\sin(\theta-\theta_0) + \int_{\theta_0}^{\theta}\frac{k^2}{h^2}\sin(\theta-\nu)\,d\nu,$$

ce qui peut s'écrire

$$\rho_0 - \rho_0^* = -2\rho_0^*\sin^2\frac{\theta-\theta_0}{2} + \rho_0'^*\sin(\theta-\theta_0) + \int_{\theta_0}^{\theta}\frac{k^2}{h^2}\sin(\theta-\nu)\,d\nu.$$

Par suite, il vient

$$|\rho_0 - \rho_0^*| < 2\,|\rho_0^*|\,\frac{(\theta-\theta_0)^2}{4} + |\rho_0'^*|\,(\theta-\theta_0) + (\theta-\theta_0)\,\frac{k^2}{h^2},$$

c'est-à-dire

$$|\rho_0 - \rho_0^*| < |\rho_0^*|\,\frac{(\theta-\theta_0)^2}{2} + \left\{|\rho_0'^*| + \frac{k^2}{h^2}\right\}(\theta-\theta_0). \tag{6}$$

Limite supérieure du module de $\rho_0' - \rho_0'^*$.

Nous avons, d'après (4),

$$\rho_0' = -\rho_0^*\sin(\theta-\theta_0) + \rho_0'^*\cos(\theta-\theta_0) + \int_{\theta_0}^{\theta}\frac{k^2}{h^2}\cos(\theta-\nu)\,d\nu. \tag{4'}$$

Par suite, il vient

$$\left.\begin{aligned}\rho_0' - \rho_0'^* &= - \rho_0^* \sin(\theta - \theta_0) \\ &+ \rho_0'^* [\cos(\theta - \theta_0) - 1] + \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{k^2}{h^2} \cos(\theta - \nu)\, d\nu,\end{aligned}\right\}$$

ce qui donne

$$|\rho_0' - \rho_0'^*| < \frac{|\rho_0'^*|}{2} (\theta - \theta_0)^2 + |\rho_0^*| (\theta - \theta_0) + (\theta - \theta_0) \frac{k^2}{h^2},$$

c'est-à-dire

$$|\rho_0' - \rho_0'^*| < \frac{|\rho_0'^*|}{2} (\theta - \theta_0)^2 + \left\{ |\rho_0^*| + \frac{k^2}{h^2} \right\} (\theta - \theta_0). \tag{7}$$

3. Lemme. — Considérons l'équation

$$\frac{d^2\rho}{d\theta^2} + \rho - \frac{k^2}{h^2} = \mathrm{F}(\theta), \tag{8}$$

la fonction $\mathrm{F}(\theta)$ étant supposée continue dans un certain intervalle de variation de θ qui sera précisé plus loin.

L'intégrale de (8) qui satisfait aux conditions initiales

$$(\rho)_{\theta=\theta_0} = \rho_0^* \quad \text{et} \quad \left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)_{\theta=\theta_0} = \rho_0'^*$$

peut s'écrire

$$\rho = \rho_0 + z, \tag{9}$$

ρ_0 étant l'intégrale (4) de l'équation (3).

z devra satisfaire à l'équation

$$\frac{d^2 z}{d\theta^2} + z = \mathrm{F}(\theta) \tag{10}$$

et vérifier les conditions initiales

$$(z)_{\theta=\theta_0} = 0, \quad \left(\frac{dz}{d\theta}\right)_{\theta=\theta_0} = 0. \tag{11}$$

D'ailleurs, cette intégrale est donnée par

$$z = \int_{\theta_0}^{\theta} \mathrm{F}(\nu) \sin(\theta - \nu)\, d\nu, \tag{12}$$

et nous avons

$$\rho = \rho_0 + \int_{\theta_0}^{\theta} \mathrm{F}(\nu) \sin(\theta - \nu)\, d\nu.$$

4. *Intégration par approximations successives de l'équation*

$$\frac{d^2\rho}{d\theta^2} + \rho - \frac{k^2}{h^2} = f(\rho\rho'\theta).$$

Nous supposerons la fonction $f(\rho\rho'\theta)$ définie et continue dans le domaine

$$\left.\begin{aligned} \rho_0^* - \mathrm{A} &\leq \rho \leq \rho_0^* + \mathrm{A}, \\ \rho_0'^* - \mathrm{B} &\leq \rho' \leq \rho_0'^* + \mathrm{B}, \\ \theta_0 &\leq \theta \leq \theta_0 + \tau_0, \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

A, B, τ_0 étant des nombres positifs.

Désignons par M la borne supérieure du module de la fonction $f(\rho\rho'\theta)$ dans le domaine défini par les conditions (13). Supposons de plus que dans ce domaine, cette fonction satisfasse à une condition de Lipschitz

$$|f(\rho_1\rho_1'\theta) - f(\rho_0\rho_0'\theta)| < \alpha\, |\rho_1 - \rho_0| + \beta\, |\rho_1' - \rho_0'|, \tag{14}$$

α et β étant des constantes positives.

Prenons comme première approximation l'intégrale (4) de l'équation

$$\frac{d^2\rho}{d\theta^2} + \rho - \frac{k^2}{h^2} = 0;$$

considérons la suite $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_\mu, \ldots$ des approximations déterminées par les équations

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2\rho_1}{d\theta^2} + \rho_1 - \frac{k^2}{h^2} = f(\rho_0\rho_0'\theta), \\ &\frac{d^2\rho_2}{d\theta^2} + \rho_2 - \frac{k^2}{h^2} = f(\rho_1\rho_1'\theta), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\frac{d^2\rho_\mu}{d\theta^2} + \rho_\mu - \frac{k^2}{h^2} = f(\rho_{\mu-1}\rho_{\mu-1}'\theta), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

$_0, \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_\mu, \ldots; \rho'_0, \rho'_1, \rho'_2, \ldots, \rho'_\mu, \ldots$ satisfaisant aux conditions initiales (2)

$$(\rho_\mu)_{\theta=\theta_0} = \rho_0^* \quad \text{et} \quad \left(\frac{d\rho_\mu}{d\theta}\right)_{\theta=\theta_0} \quad (\mu = 0, 1, 2, \ldots) \tag{16}$$

5. Nous allons d'abord montrer que sous certaines conditions nous pouvons introduire ces diverses approximations $\rho_0, \rho_1, \ldots, \rho_\mu, \ldots$ sous le signe fonctionnel $f(\rho\rho'\theta)$.

Les fonctions $\rho_0 \rho'_0$ appartiendront au domaine défini par (13), pourvu que

$$\left.\begin{aligned} \frac{|\rho_0^*|}{2}(\theta-\theta_0)^2 + \left\{|\rho_0'^*| + \frac{k^2}{h^2}\right\}(\theta-\theta_0) \leq A, \\ \frac{|\rho_0'^*|}{2}(\theta-\theta_0)^2 + \left\{|\rho_0^*| + \frac{k^2}{h^2}\right\}(\theta-\theta_0) \leq B; \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

il faudra donc que l'on ait, puisque $\theta_0 < \theta$ et en supposant ρ_0^* et $\rho_0'^*$ non nuls (*),

$$\left.\begin{aligned} \theta - \theta_0 < \frac{-\left\{|\rho_0'^*| + \frac{k^2}{h^2}\right\} + \sqrt{\left\{|\rho_0'^*| + \frac{k^2}{h^2}\right\}^2 + 2|\rho_0^*|A}}{|\rho_0^*|}, \\ \theta - \theta_0 < \frac{-\left\{|\rho_0^*| + \frac{k^2}{h^2}\right\} + \sqrt{\left\{|\rho_0^*| + \frac{k^2}{h^2}\right\}^2 + 2|\rho_0'^*|B}}{|\rho_0'^*|}, \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Désignons par τ_1 et τ_2 les seconds membres de ces relations; nous prendrons déjà $\theta - \theta_0$ inférieur au plus petit des nombres τ_0, τ_1, τ_2. Ainsi, ρ_0, ρ'_0 peuvent être introduits sous le signe fonctionnel $f(\rho\rho'\theta)$ et nous pouvons écrire l'équation

$$\frac{d^2\rho}{d\theta^2} + \rho - \frac{k^2}{h^2} = f(\rho_0\rho'_0\theta). \tag{19}$$

(*) Si l'une de ces quantités était nulle (ou les deux), une des inégalités (17) (ou les deux) deviendrait du premier degré; comme les coefficients des premiers membres sont positifs, on aurait encore des inégalités telles que (18), mais plus simples.

L'intégrale ρ_1 de cette équation satisfaisant aux conditions initiales (16), savoir

$$(\rho_1)_{\theta=\theta_0} = \rho_0^* \quad \text{et} \quad \left(\frac{d\rho_1}{d\theta}\right)_{\theta=\theta_0} = \rho_0'^*,$$

est donnée [cf. (9)] par

$$\rho_1 = \rho_0 + z_1,$$

moyennant [cf. (12)]

$$z_1 = \int_{\theta_0}^{\theta} F_0(\nu) \sin(\theta - \nu)\, d\nu$$

et

$$F_0(\theta) = f[\rho_0(\theta), \rho'_0(\theta), \theta].$$

Dès lors

$$\rho_1 = \rho_0 + \int_{\theta_0}^{\theta} F_0(\nu) \sin(\theta - \nu)\, d\nu$$

et

$$\rho'_1 = \rho'_0 + \int_{\theta_0}^{\theta} F_0(\nu) \cos(\theta - \nu)\, d\nu.$$

Nous pouvons écrire

$$\rho_1 - \rho_0^* = \rho_0 - \rho_0^* + z_1,$$
$$\rho'_1 - \rho_0'^* = \rho'_0 - \rho_0'^* + z'_1.$$

Nous observerons que

$$|z_1| < M(\theta - \theta_0), \qquad |z'_1| < M(\theta - \theta_0). \tag{20}$$

Pour que ρ_1, ρ'_1 puissent être introduits sous le signe fonctionnel $f(\rho\rho'\theta)$, il faut

$$|\rho_1 - \rho_0^*| \leq A \quad \text{et} \quad |\rho'_1 - \rho_0'^*| \leq B,$$

ce qui a lieu si

$$|\rho_0 - \rho_0^*| + |z_1| \leq A \quad \text{et} \quad |\rho'_0 - \rho_0'^*| + |z'_1| \leq B,$$

c'est-à-dire, si nous avons [cf. (17)],

$$\frac{|\rho_0^*|}{2}(\theta-\theta_0)^2+\left\{|\rho_0'^*|+\frac{k^2}{h^2}+M\right\}(\theta-\theta_0)\leq A,$$

$$\frac{|\rho_0'^*|}{2}(\theta-\theta_0)^2+\left\{|\rho_0^*|+\frac{k^2}{h^2}+M\right\}(\theta-\theta_0)\leq B.$$

Nous en tirons, en supposant ρ_0^* et $\rho_0'^*$ non nuls,

$$\left.\begin{aligned}\theta-\theta_0 &\leq \frac{-\left\{|\rho_0'^*|+\frac{k^2}{h^2}+M\right\}+\sqrt{\left\{|\rho_0'^*|+\frac{k^2}{h^2}+M\right\}^2+2|\rho_0^*|A}}{|\rho_0^*|},\\ \theta-\theta_0 &\leq \frac{-\left\{|\rho_0^*|+\frac{k^2}{h^2}+M\right\}+\sqrt{\left\{|\rho_0^*|+\frac{k^2}{h^2}+M\right\}^2+2|\rho_0'^*|B}}{|\rho_0'^*|}\end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Désignons par τ_3 et τ_4 les seconds membres de ces relations.

Les conditions (21) entraînent évidemment les conditions (18). *Nous prendrons* $\theta-\theta_0$ *inférieur au plus petit des nombres* τ_0, τ_3, τ_4.

Ainsi, $\rho_1\rho_1'$ peuvent être introduits sous le signe fonctionnel $f(\rho\rho'\theta)$ et nous pouvons écrire l'équation

$$\frac{d^2\rho}{d\theta^2}+\rho-\frac{k^2}{h^2}=f(\rho_1\rho_1'\theta)=F_1(\theta),$$

dont nous chercherons l'intégrale ρ_2 satisfaisant aux conditions initiales (16).

En général, et de proche en proche, nous obtiendrons

$$\rho_{\mu+1}=\rho_0+x_{\mu+1}=\rho_0+\int_{\theta_0}^{\theta}F_\mu(\nu)\sin(\theta-\nu)\,d\nu \tag{22}$$

avec

$$F_\mu(\theta)=f[\rho_\mu(\theta),\ \rho_\mu'(\theta),\ \theta].$$

6. Nous allons démontrer que les suites

$$\rho_0,\ \rho_1,\ \ldots,\ \rho_\mu,\ \ldots$$
$$\rho_0',\ \rho_1',\ \ldots,\ \rho_\mu',\ \ldots$$

sont uniformément convergentes quand $\mu\to\infty$.

En effet, nous avons en général

$$|\rho_\mu-\rho_{\mu-1}|=|x_\mu-x_{\mu-1}|\quad\text{et}\quad|\rho_\mu'-\rho_{\mu-1}'|=|x_\mu'-x_{\mu-1}'|.$$
$$\mu=1,2,\ldots$$

D'autre part, puisque $\rho_0=\rho_0'$, nous avons posé implicitement

$$x_0=0,\qquad x_0'=0.$$

D'après (20),

$$|\rho_1-\rho_0|<M(\theta-\theta_0),\qquad|\rho_1'-\rho_0'|<M(\theta-\theta_0).$$

Par suite, nous avons

$$|\rho_2(\theta)-\rho_1(\theta)|<\int_{\theta_0}^{\theta}\left\{\alpha M(\nu-\theta_0)+\beta M(\nu-\theta_0)\right\}d\nu$$

ou

$$|\rho_2(\theta)-\rho_1(\theta)|<(\alpha+\beta)M\frac{(\theta-\theta_0)^2}{2!};$$

de même,

$$|\rho_2'(\theta)-\rho_1'(\theta)|<(\alpha+\beta)M\frac{(\theta-\theta_0)^2}{2!}.$$

Supposons que

$$|\rho_\mu-\rho_{\mu-1}|<(\alpha+\beta)^{\mu-1}M\frac{(\theta-\theta_0)^\mu}{\mu!},$$
$$|\rho_\mu'-\rho_{\mu-1}'|<(\alpha+\beta)^{\mu-1}M\frac{(\theta-\theta_0)^\mu}{\mu!};$$

il viendra

$$|\rho_{\mu+1}-\rho_\mu|<\int_{\theta_0}^{\theta}\left\{\begin{aligned}&\alpha(\alpha+\beta)^{\mu-1}M\frac{(\theta-\theta_0)^\mu}{\mu!}\\+\,&\beta(\alpha+\beta)^{\mu-1}M\frac{(\theta-\theta_0)^\mu}{\mu!}\end{aligned}\right\}d\nu,$$

ou bien

$$|\rho_{\mu+1}-\rho_\mu|<(\alpha+\beta)^\mu M\frac{(\theta-\theta_0)^{\mu+1}}{\overline{\mu+1}!}, \tag{23}$$

et de même,

$$|\rho_{\mu+1}'-\rho_\mu'|<(\alpha+\beta)^\mu M\frac{(\theta-\theta_0)^{\mu+1}}{\overline{\mu+1}!}. \tag{23'}$$

Par comparaison avec la série exponentielle (*), on en déduit que les séries

$$\rho_0 + (\rho_1 - \rho_0) + (\rho_2 - \rho_1) + \cdots + (\rho_\mu - \rho_{\mu-1}) + \cdots \tag{24}$$

$$\rho_0' + (\rho_1' - \rho_0') + (\rho_2' - \rho_1') + \cdots + (\rho_\mu' - \rho_{\mu-1}') + \cdots \tag{25}$$

sont absolument et uniformément convergentes; la série (25) est la dérivée de (24) par rapport à θ; autrement dit, les suites

$$\rho_0, \rho_1, \ldots, \rho_\mu, \ldots \tag{26}$$

$$\rho_0', \rho_1', \ldots, \rho_\mu', \ldots \tag{27}$$

sont uniformément convergentes et il en est dès lors de même de la suite

$$\frac{d^2\rho_0}{d\theta^2}, \frac{d^2\rho_1}{d\theta^2}, \ldots, \frac{d^2\rho_\mu}{d\theta^2}, \ldots \tag{28}$$

7. Soit ρ_∞ la limite de la suite $\rho_0, \rho_1, \ldots, \rho_\mu, \ldots$ pour $\mu \to \infty$. Considérons l'équation

$$\frac{d^2\rho_\mu}{d\theta^2} + \rho_\mu - \frac{k^2}{h^2} = f\{\rho_{\mu-1}, \rho_{k-1}', \theta\},$$

Si nous tenons compte de la convergence uniforme des suites (26), (27), (28) et de la continuité de $f(\rho\rho'\theta)$, et si nous passons à la limite pour $\mu \to \infty$, nous pouvons écrire

$$\frac{d^2\rho_\infty}{d\theta^2} + \rho_\infty - \frac{k^2}{h^2} = f(\rho_\infty, \rho_\infty', \theta).$$

Ainsi, la fonction ρ_∞ est solution de l'équation différentielle (1).

L'unicité de la solution se vérifie par le procédé bien connu.

8. Les nombres τ_3 et τ_4 donnent des limites supérieures pour la variation $\theta - \theta_0$. Il peut arriver que l'intervalle de

(*) L'emploi de la formule (23) permettra d'avoir une idée du reste, lorsqu'on fera des évaluations numériques en se limitant à un certain nombre de termes.

convergence de la suite des approximations successives soit beaucoup plus étendu. C'est ce qui se passera dans le cas de l'orbite einsteinienne que nous examinerons plus loin.

Reprenons d'abord les formules (4) et (4'); on en tire

$$|\rho_0 - \rho_0^*| < 2|\rho_0^*| + |\rho_0'^*| + \frac{2k^2}{h^2} \tag{29}$$

et

$$|\rho_0' - \rho_0'^*| < 2|\rho_0'^*| + |\rho_0^*| + \frac{k^2}{h^2}. \tag{30}$$

Pour que l'on puisse intégrer l'équation (15_1), il faut que ρ_0 et ρ_0' satisfassent aux conditions (13), c'est-à-dire que l'on ait

et

$$\left.\begin{aligned} 2|\rho_0^*| + |\rho_0'^*| + \frac{2k^2}{h^2} &< A \\ 2|\rho_0'^*| + |\rho_0^*| + \frac{k^2}{h^2} &< B. \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

Supposons les conditions (31) remplies. On a alors

$$|\rho_1 - \rho_0^*| \leq |\rho_1 - \rho_0| + |\rho_0 - \rho_0^*|.$$

Or

$$|\rho_1 - \rho_0| = |z_1| \leq M \bmod \int_{\theta_0}^{\theta} \sin(\theta - \nu)\, d\nu \leq 2M.$$

Donc

$$|\rho_1 - \rho_0^*| \leq 2|\rho_0^*| + |\rho_0'^*| + \frac{2k^2}{h^2} + 2M. \tag{32}$$

De même, on a

$$|\rho_1' - \rho_0'^*| \leq 2|\rho_0'^*| + |\rho_0^*| + \frac{k^2}{h^2} + M. \tag{33}$$

Supposons que l'on ait

$$\left.\begin{aligned} 2|\rho^*| + |\rho_0'^*| + \frac{2k^2}{h^2} + 2M &\leq A, \\ 2|\rho_0'^*| + |\rho_0^*| + \frac{k^2}{h^2} + M &\leq B. \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

Les conditions (34) comprennent évidemment (31). M dépend de A, B et τ_0. Si, dans les problèmes pratiques auxquels nous voulons appliquer la méthode, nous pouvons vérifier que la fonction M de A, B, τ_0 satisfait aux conditions (34), nous serons en droit d'intégrer la deuxième équation (15). D'ailleurs, on a alors, de proche en proche,

$$\begin{aligned} |\rho_\mu - \rho_0^*| &\leq |\rho_\mu - \rho_0| + |\rho_0 - \rho_0^*| \\ &\leq 2|\rho_0^*| + |\rho_0'^*| + \frac{2k^2}{h^2} + 2\mathrm{M} \\ &\leq \mathrm{A} \end{aligned}$$

et de même,

$$\begin{aligned} |\rho_\mu' - \rho_0'^*| &\leq |\rho_\mu' - \rho_0'| + |\rho_0' - \rho_0'^*| \\ &\leq 2|\rho_0'^*| + |\rho_0^*| + \frac{k^2}{h^2} + \mathrm{M}. \\ &\leq \mathrm{B}. \end{aligned}$$

Nous pourrons donc introduire toutes les approximations successives ρ_μ, ρ_μ' sous le signe fonctionnel dans (15).

Au lieu des conditions (21), nous pouvons donc supposer simplement $\theta - \theta_0 < \rho_0$, si les inégalités (34) sont vérifiées. Les raisonnements des numéros 6 et 7 ne subissent pas de modification.

9. Exemple. — *Cas de l'orbite obtenue pour une planète, au moyen du* ds² *d'Einstein-Schwarzschild.*

L'équation différentielle de cette trajectoire est

$$\frac{d^2\rho}{d\theta^2} + \rho - \frac{k^2}{h^2} = \frac{3p^2}{c^2}\rho^2, \tag{38}$$

p^2 étant une constante intervenant dans le ds^2 d'Einstein-Schwarzschild; du point de vue numérique, cette constante peut pratiquement être confondue avec k^2; d'ailleurs c'est la mesure de la vitesse de la lumière dans le vide. On a ici

$$f(\rho\rho'\theta) = \frac{3p^2}{c^2}\rho^2;$$

la condition de Lipschitz est certainement réalisée, f_ρ' étant continue, quel que soit ρ fini.

L'astronomie pratique montre qu'il existe des positions du rayon vecteur (c'est-à-dire des angles θ) pour lesquels ρ est un maximum (périhélie); choisissons pour θ_0 une de ces valeurs ϖ et soit ρ_0^* la valeur correspondante $\left(\rho_0^* = \frac{1}{r_0^*},\ r_0^*\right.$ étant une distance périhélie). Nous sommes ainsi amenés à choisir

$$\rho_0'^* = 0.$$

Bref, nous désirons trouver l'intégrale de l'équation (35), qui se réduit à ρ_0^* pour $\theta = \varpi$ et telle que

$$\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)_{\theta=\varpi} = 0.$$

Dans l'intervalle $(\rho_0^* - \mathrm{A},\ \rho_0^* + \mathrm{A})$, la borne supérieure M de $f(\rho)$ est

$$\mathrm{M} = \frac{3p^2}{c^2}(\rho_0^* + \mathrm{A})^2.$$

On vérifie aisément que, dans le cas qui nous occupe, $\tau_3 \to 0$ lorsque $\mathrm{A} \to \infty$; si, d'autre part, on attribue à A la valeur observée, on trouve pour $\theta - \theta_0$ un intervalle très petit de variation. Nous essayerons donc plutôt d'appliquer la remarque du numéro 8.

pf ne dépendant pas de ρ', il suffit d'examiner la première condition (34). On doit avoir

$$2\left[\rho_0^* + \frac{k^2}{h^2} + \frac{3p^2}{c^2}(\rho_0^* + \mathrm{A})^2\right] \leq \mathrm{A} \tag{36}$$

ou

$$\frac{6p^2}{c^2}\mathrm{A}^2 + \mathrm{A}\left[\frac{12p^2}{c^2}\rho_0^* - 1\right] + \frac{6p^2}{c^2}\rho_0^{*2} + 2\rho_0^* + \frac{2k^2}{h^2} \leq 0. \tag{36'}$$

Le discriminant du trinôme vaut

$$\Delta = 1 - \frac{72p^2}{c^2}\rho_0^* - \frac{48p^2}{c^2}\cdot\frac{k^2}{h^2}.$$

Voyons pour la planète Mercure (*) [qui nous intéresse

(*) La vérification peut se faire pour tous les astres du système solaire.

spécialement et pour laquelle nous désirons trouver l'intégrale de (35)] quel signe revêt Δ. Les valeurs numériques approchées sont les suivantes :

$$\begin{array}{ll} \rho_0^* \sim 0{,}2 \,.\, 10^{-12} & \text{C. G. S.,} \\ p^2 \sim 3 \;\;.\, 10^{26} & \text{»} \\ c^2 \sim 9 \;\;.\, 10^{20} & \text{»} \\ \dfrac{72p^2}{c^2}\rho_0^* \sim 4{,}5 \,.\, 10^{-6} & \text{»} \\ \dfrac{48p^2}{c^2}\cdot\dfrac{k^2}{h^2} \sim 3 \;\;.\, 10^{-6} & \text{»} \end{array}$$

Δ est donc certainement positif; désignons par A′ et A″ les racines du trinôme; ces racines sont toutes deux positives. Pour

$$A' \leq A \leq A'', \tag{36''}$$

la relation (36′) ou (36) est sûrement vérifiée.

Or $f(\rho)$ a par rapport à ρ une dérivée continue quel que soit A, de $\rho_0^* - A$ à $\rho_0^* + A$. Il suffit donc de choisir A satisfaisant à (36″).

Mais cette inégalité donne des bornes pour A; il faut vérifier que ces bornes suffisent dans notre exemple. L'observation montre que r varie entre $r_0^* - D$ et $r_0^* + D$, D étant une fraction de r_0^* dont on peut déterminer une valeur numérique approchée dès qu'on connaît la valeur de l'excentricité de l'orbite elliptique constituant la première approximation (déjà très serrée) des orbites planétaires. ρ varie ainsi entre $\rho_0^* - A$ et $\rho_0^* + A$.

$$A = \frac{k^2}{h^2}(1+e) - \frac{k^2}{h^2}(1-e) = \frac{2ek^2}{h^2}.$$

Il faut donc que l'on ait

$$A' > \frac{2ek^2}{h^2}. \tag{37}$$

Or le calcul de la racine A′ montre qu'elle vaut sensiblement

$$A' = \frac{4k^2}{h^2}.$$

Comme on a $e < 1$, la relation (37) est certainement vérifiée.

Nous sommes donc en droit d'appliquer la méthode des approximations successives pour un intervalle $\theta - \theta_0 \equiv \theta - \varpi$ quelconque.

Écrivons la première approximation ρ_0 sous la forme

$$\rho_0 = \frac{k^2}{h^2}[1 + e\cos(\theta - \varpi)];$$

la condition

$$(\rho_0)_\varpi = \rho_0^*$$

est équivalente à

$$\frac{k^2}{h^2}(1+e) = \rho_0^*$$

et permet donc de calculer l'excentricité e. Quant à la condition $(\rho_0')_\varpi = 0$, elle est vérifiée immédiatement.

La seconde approximation ρ_1 résultera de l'équation

$$\frac{d^2\rho_0}{d\theta^2} + \rho_1 - \frac{k^2}{h^2} = P[1 + e\cos(\theta - \varpi)]^2,$$

en posant

$$P = \frac{3p^2}{c^2}\cdot\frac{k^4}{h^4}.$$

On a

$$\rho_1 = \rho_0 + z,$$

avec

$$z = P\int_\varpi^0 [1 + e\cos(\nu - \varpi)]^2 \sin(\theta - \nu)\,d\nu;$$

on trouve (*)

$$\rho_1 = \frac{k^2}{h^2}[1 + e\cos(\theta - \varpi)] + P\left[\begin{array}{c} 1 + \dfrac{e^2}{2} + e\theta \,.\, \sin(\theta - \varpi) \\ -e\varpi\sin(\theta - \varpi) - \left(1 + \dfrac{e^2}{3}\right)\cos(\theta - \varpi) \\ -\dfrac{e^2}{6}\cos 2(\theta - \varpi) \end{array}\right].$$

(*) Cette expression a été donnée par M. C. de Jans, en intégrant l'équation (35) par les fonctions elliptiques et en cherchant une valeur approchée du résultat; voir wis- en Natuurkundig, Tijdschrift, 1928, p. 116.

Des quadratures élémentaires donneraient l'approximation troisième, quatrième, etc.; mais déjà ρ_2 n'apporte plus rien d'intéressant au point de vue astronomique.

Examinons la seconde approximation ρ_1 en vue du déplacement du périhélie. ρ_1 a la période 2π pour tous ses termes, sauf pour $Pe\theta \sin(\theta - \varpi)$; c'est là le seul terme qui nous intéresse actuellement. Remarquons d'ailleurs que c'est celui qu'on obtient directement en employant le procédé utilisé par Eddington. Désignons par $[\rho_1]$ l'expression de ρ_1 diminué de tous les termes périodiques, sauf ρ_0. En vue d'un calcul approché de l'avance périhélique, nous écrirons

$$\left.\begin{aligned}[\rho_1] &= \frac{k^2}{h^2}\left[1 + e\cos(\theta - \varpi) + \frac{3k^4}{c^2h^2}e\theta\sin(\theta - \varpi)\right] \\ &= \frac{k^2}{h^2}[1 + e\cos(\theta - \varpi - \delta\varpi)]\end{aligned}\right\}$$

avec

$$\delta\varpi = \frac{3k^4}{c^2h^2}\theta;$$

c'est la formule d'Einstein.

*
* *

En terminant, nous tenons à remercier vivement M. Germay, chargé de cours à l'Université de Liége, dont les conseils nombreux et éclairés nous ont été très utiles pendant la préparation de cette note.

Observatoire de Cointe, mars 1929.

Marcel HAYEZ, imprimeur, rue de Louvain, 112, Bruxelles.